

X5 .K7

1917-19

506.9782

C46



LIBRARY OF
THE NEW YORK BOTANICAL GARDEN

By exchange
1920

September 1899

R. W. Gibson. Inv.



SKRIFTER

UTGIT AV

VIDENSKAPSSELSKAPET I KRISTIANIA

1917

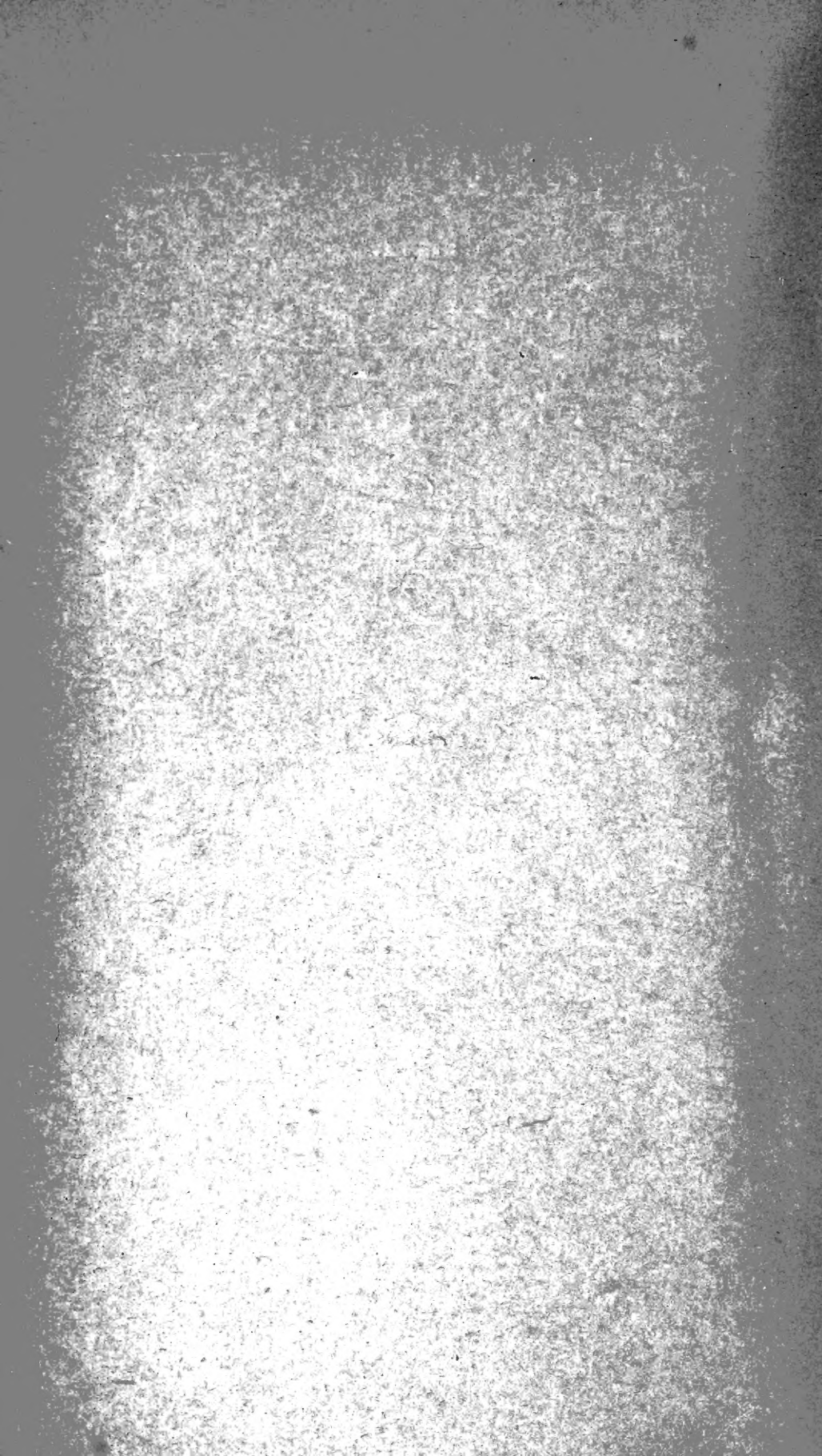
I. MATEMATISK-NATURVIDENSKABELIG KLASSE



KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1918



SKRIFTER

UTGIT AV

VIDENSKAPSSELSKAPET

I KRISTIANIA

1917

I. MATEMATISK-NATURVIDENSKABELIG KLASSE



KRISTIANIA

I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1918

.K7
1917-19

LIBRARY
NEW YORK
BOTANICAL
GARDEN

Indhold.

	Side
No. 1. Ragnvald Ingebrigtsen. Om nervetransplantation. Eksperimentelle undersøkelser over regenerationsforhold i nervesystemet og fri transplantation av perifere nerver. (Med 27 plancher)	I—174
" 2. Richard Birkeland. Recherches sur quelques problèmes mathématiques importants dans les applications	I—39
" 3. Carl Størmer. On auroral draperies and on the sign of the Aurora corpuscles. A short reply to Professor Birkeland	I—4
" 4. Axel Thue. Eine Bemerkung über die Gleichung $f(a-b)c^m = a^n - b^n$	I—6
" 5. Richard Birkeland. Quelques propositions dans la théorie de l'élasticité	I—17
" 6. Th. Skolem. Untersuchungen über einige Klassen kombinatorischer Probleme	I—99

15123.1020

OM NERVETRANSPLANTATION

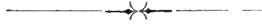
EKSPERIMENTELLE UNDERSØKELSER
OVER REGENERATIONSFORHOLD I NERVESYSTEMET
OG FRI TRANSPLANTATION AV
PERIFERE NERVER

AV

RAGNVALD INGEBRIGTSEN

(MED 27 PLANCHER)

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE 1917. No 1)



KRISTIANIA

I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

1918

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 17de novbr, 1916
av professor Axel Johannessen.

Til min lærer

Dr. ALEXIS CARREL

Indhold.

	Side
Indledning	I
Almindelig plan for forsøkene	2
Anatomiske bemærkninger	4
Den Wallerske degeneration	6
Kap. 1. Regeneration av perifere nerver	10
" 2. Regeneration av nervefibre in vitro	25
" 3. Vekstfænomener fra segmenter av perifere nerver ved dyrkning i plasma	43
" 4. Fri transplantation av perifere nerver	58
" 5. Dækning av defekter i perifere nerver ved fri transplantation	68
" 6. Dækning av defekter i perifere nerver ved andre metoder	142
" 7. Slutning	153

Rettelse:

Side 36, linje 2 f. o. staar: 5—6 μ , læs: 5—600 μ .



Fortale.

Dette arbeide planlagdes og paabegyndtes i Paris 1912—13. Det blev fortsat i New York ved The Rockefeller Institute og avsluttet ved Rikshospitalets patologiske Institut vaaren 1916.

Tekniken for studiet av perifere nervers histologi har jeg tilegnet mig ved arbeide i professor NAGEOTTES laboratorium ved Collège de France, og dyrkning av dyrisk væv utenfor organismen har jeg set hos metodens mester dr. CARREL.

Det er mig en behagelig pligt at takke d'hr. dr. med. OLE BERNER og dr. PLATOU for velvillig utførelse av en del av mikrofotografierne.

Dr. frøken ELSE RANDULFF har været mig til stor hjælp med korrekturen, hvorfor jeg bringer hende min bedste tak.

Kristiania, i mai 1916.

Forfatteren.

INDLEDNING.

Den frie transplantation har i det sidste decennium været viet et indgaaende studium indenfor den eksperimentelle og kliniske kirurgi. — Der manglet rigtignok heller ikke tidligere forsøk paa ved transplantation fra andre individer at erstatte tapt væv — forsøk som i intentionens dristighet vistnok ikke kan maale sig med nutidens, men blandt hvilke OLLIERS bentransplantationer dog er klassiske. Naar i det store og hele resultaterne allikevel var magre og litet konkluderende, skyldtes dette for en væsentlig del bristende metodik, og det blev forbeholdt det zode aarhundredes aseptik og kirurgiske teknik at kaste lys over den frie transplantations muligheter. Disse og særlig dens begrænsning kjender vi nu langt bedre end for 10 aar tilbage. Men feltet er vidt og de uløste spørsmaal fremdeles utallige — allerede indvundne resultater tat i betragtning.

Mens nu i løpet av de sidste 10—12 aar transplantationsforholdene indenfor bensystemet, karsystemet, fett- og bindevævet og de forskjellige kjertler med intern sekretion har været gjenstand for grundige undersøkelser, har derimot den frie transplantation av perifere nerver været relativt stedmoderlig behandlet. Grunden til dette skal jeg ikke forsøke at utfinde. Det er mulig, at de litet opmuntrende kliniske resultater av heteroplastiske nervetransplantationer for en del kan ha skylden. Men selv om det praktiske utbytte av nervetransplantationer skulde bli tyndt, var det mig paa den anden side overraskende, at et organ som den perifere nerve med sin overmaade karakteristiske og vel studerte Wallerske degeneration ikke i høiere grad har opfordret til transplantationsforsøk; man kunde i ethvert fald vente, at de vilde gi histologiske resultater, som ikke var uten betydning for vor opfatning av transplantationernes generelle biologi.

Betegnelsen fri transplantation av nerver vil nu sandsynligvis ikke misforstaaes. Rigtignok hersker der angaaende nomenklaturen ikke fuld overensstemmelse. Mens saaledes LETIÉVANT ved begrepet transplantation (»greffes«) betegner en operation, hvorved der dannes en anastomose mellem 2 nerver (tyskernes »Nervenpropfung«), forstaar andre og de fleste ved transplantation en implantation av et nervesegment mellem den centrale og den perifere ende av en overskaaret nerve (engelske for-

fatteres »bridging«), og det er den anvendelse, begrepet er git her. Det stykke, som indsættes, kan være hentet fra en anden nerve fra samme individ (autoplastik) eller fra et andet individ av samme art (homoplastik) eller fra et individ av en anden art (heteroplastik).

Almindelig plan for forsøkene.

Min hensigt med dette arbeide var i første række ved histologiske undersøkelser at studere og følge den skjæbne, som rammer et nervesegment, der implanteres mellem 2 nerveender. Og dernæst ved funktionsundersøkelser at bringe paa det rene de praktiske muligheter for den frie transplantation av nervesegmenter til dækning av defekter i perifere nerver.

For den histologiske undersøkelse av transplanterte nervesegmenter var det nødvendig at erhverve sig et førstehaands kjendskap til de perifere nervers normale histologi, endvidere til den Wallerske degeneration og til de perifere nervers regenerationsforhold. Jeg begyndte derfor med dette og har ved undersøkelser av nerver i levende tilstand gjort interessante iagttagelser saavel av normale nerver som av den Wallerske degeneration i forskjellige stadier.

Ved siden herav har jeg i en parallel forsøksrække undersøkt den Wallerske degenerations forløp in vitro d.v.s. i saltopløsning, i serum og i plasma. Mens den Wallerske degeneration — i ethvert fald i sine hovedtræk — ikke har været særlig diskutert i de sidste aar, har derimot de processer, som leder til en perifer nerves regeneration, like til den aller seneste tid været gjenstand for meningsforskjel, til trods for at de er et av de grundigst bearbejdede felter i hele patologien. Repræsenteret av fremragende anatomer og fysiologer staar utvoksningsteorien og teorien om den diskontinuerlige regeneration i den skarpeste motsætning til hinanden, og det er vanskelig for ikke at si umulig at danne sig en opfatning av spørsmålet, hvis man ikke undersøger det selv. Jeg har gjort dette og skal i et eget avsnit beskrive mine resultater.

Som en parallel til disse undersøkelser av regeneration in vivo slutter sig derpaa en forsøksrække over regeneration av aksecylindre in vitro fra dele av centralnervesystemet — en fremgangsmaate som mere end noget andet tillater en at analysere de vitale processer og utvide vor — ved de histologiske metoders rækkevidde — begrænsede horisont.

Efter disse præliminære arbeider paabegyndtes nerve-transplantationerne i 3 parallelle forsøksserier — auto-, homo- og heteroplastisk.

Efter overskjæring av en perifer nerve indtræder de første tegn paa Wallersk degeneration hos kaniner fra 3dje—4de dag. Det blev nødven-

dig at undersøke de modifikationer i den Wallerske degeneration, som indtræder under de forskjellige nye livsvilkaar — eftersom nervesegmentet overførtes til sin egen eiermand, eller til et andet dyr av samme art, eller til et dyr av en anden art. Dette undersøktes med visse intervaller gjennom et tidsrum av ca. 2—3 uker, som omtrent svarer til det vanlige forløp av de karakteristiske stadier i den Wallerske degeneration. Der blev herunder særlig lagt vekt paa at utforske de Schwannske cellers forhold.

Aksecylinderens regeneration i det transplanterte nervesegment utgjør det centrale punkt i undersøkelsen, og frembyder den største interesse, fordi dannelsen av dette nervøse element representerer nerveregenerationens endelige histologiske resultat og bestemmer den grad av funktion, som nerven tilslut beholder.

Spørsmålet om funktionen har den aller største praktiske kirurgiske interesse — og opmerksomheten har ogsaa været rettet mot dette, skjønt vanskelighetene ved at bestemme nervefunksjon hos dyr er ret store. Gjælder det — som ved *n. ischiadicus* — en blandet nerve, kan man undersøke paa sensibilitet og motilitet.

Sensibiliteten er — hvad enten den undersøkes paa huden med naalestik f. eks. eller under blotleggelse av nerven ved mekanisk eller elektrisk irritation av denne — en altfor upaalidelig indikator, til at den skal kunne brukes som et eksakt maal for nervefunksjon. Baade muligheten av tilstedeværende anastomoser (ARLOING et TRIPIER: *Sensibilité récurrente*) og endnu mere den tvil og usikkerhet, man maa nære ved tydingen av dyrets maate at reagere paa, gjør resultaterne av en saadan undersøkelse temmelig værdiløse.

Der er imidlertid netop for *n. ischiadicus*' vedkommende et tegn, som ikke er uten betydning til bedømmelse av nervefunksjon bortset fra motiliteten, og det er decubitussaaret paa hælen. Hvor meget man tør slutte av dettes forhold, skal nærmere omtales senere.

Tilbake staar da motilitetsprøven. Den direkte irritation av den blotlagte nerve ved faradisk strøm gir uten risiko for feiltagelser præcis opplysning om funksjonen. Men dette er ogsaa den eneste eksakte metode. Rigtignok har man under dyrets voluntære bevægelser ved gang anledning til at danne sig et begrep om funksjonen, men paalidelig er dette ikke. Hos katten f. eks. er det ofte meget vanskelig at iagttå nogen forandring i benets bevægelser, like efter at *n. ischiadicus* er skaaret over, idet laarets muskler tildels overtar lægge- og fotmusklers funksjon og maskerer paralyse. Ved hvert skridt dyret tar, løfter det ekstremiteten høiere, fører den derpaa kraftig forover, og i det øieblik poten rører jorden, føres benet kraftig baktill, saa

tærne passivt strækkes. Hos kaninen er denne maskering av paralysen ved vikarierende bevægelser i friske nabomuskler mindre fremtrædende; og VANLAIR har gjort opmerksom paa, at det er tilstrækkelig at hænge op en kanin efter ørene for at undersøke paralysen; hvis dens fotmuskler ikke er paralytiske, vil tærne straks strækkes og abducere. Resultatet av denne undersøkelse kan dog ofte stille sig tvilsomt og maa kun tillægges en relativ værdi.

Ved siden av disse hovedspørsmål, som det var hensigten at studere ved forsøkene, dukket der under arbeidet op visse andre spørsmål, som jeg har søkt at belyse.

For det første har jeg ved forsøksanordningen tat hensyn til slegtskapsforhold mellem de dyr, blandt hvilke de homoplastiske overføringer foregik, og har dels anvendt søkende, dels indbyrdes ubeslegtede dyr. For det andet har jeg til sammenligning med nervetransplantationen prøvet værdien av andet interponert materiale, nemlig katguttraade og arterier.

Anatomiske bemerkninger.

Hvis man ønsker at faa et begrep om de perifere nervers delikate struktur, er man nødt til at begynde med undersøkelsen av friske fibre dissocierte i en isotonisk oppløsning. Denne metode, som med saa rikt utbytte er anvendt av RANVIER og NAGEOTTE, skaffer sikker orientering over den mængde av varierende billeder, som de forskjellige fiksations- og farvemetoder gir. — Den kræver taalmodighet og tar lang tid, forat man skal kunne bli fortrolig med de traumatiske forandringer og utvælge de faa fibre, som er helt uskadte; men har man først én gang set en saadan, er det nok til at overbevise en om, at denne krystalcylinder med de geometriske konturer og rene linjer representerer myelinfiberens virkelige form (NAGEOTTE).

Det interannulære avsnit er noksaa let at studere. I aksecylinderen, som er meget voluminos, homogen og klar, ser man ingen nevrofibriller — ikke engang ved dunkelfeltsbelysning. Myelinet, som paa grund av sin lysbrytende evne er sterkt iøinefaldende, danner derimot en relativt tynd skede av absolut ensartet tykkelse — med visse mellemrum gjennemsat av de Schmidt-Lantermannske incisurer, som i form av symmetriske skraa linjer paa begge sider av fiberen iflg. NAGEOTTE representerer det optiske længdesnit av en i marvskeden løpende cirkulær membran, hvis form svarer til en del av en kegleoverflate.

I de ved traumer (dissociering) skadede fibre er billedet et ganske andet. Myelinskeden synes at ha delt sig op i et stort antal traade, der repræsenterer det optiske længdesnit av tynde lameller, og dette kommer først og lettest i de Schmidt-Lantermannske indsnøringer, hvor myelinskedens lamellose struktur derved træder tydelig frem.

De Ranvierske indsnøringer er langt skrøpeligere og skades lettere ved traumer end de interannulære avsnit, og de er uhyre vanskelige at studere i frisk tilstand efter dissociation. Deres virkelige form avviker ikke litet fra RANVIERS beskrivelse, og den er først blit kjendt ved NAGEOTTES arbeider, hvis resultater jeg ved mine undersøkelser har kunnet bekræfte.

Ved hver ende av det interannulære avsnit avsluttes myelinskeden, idet den gjør en regelmæssig bøining for at inserere sig perpendikulært paa en sterkt indsnævret del av aksecylindren; myelinskeden har herunder overalt bevaret sin tykkelse uten forandring. Den danner en kuppel, hvis top er perforert av et cylindrisk hul til passage for aksecylindrens sterkt forsnævrede del; nabosegmentets myelinskede ender i en lignende kuppel med hvælvingen i motsat retning; disse ligger i klods berøring med hinanden, og den cylindriske aapning i den ene ligger i den andens forlængelse. I denne cylindriske kanal, hvori aksecylindren uten nogen bikonisk opsvulmning passerer fra det ene interannulære segment til det andet, sees en fin transversel stripning, paavist av NAGEOTTE — og denne kanal er av ham paa grund av en viss ytre likhet git navnet det »takkede dobbelt-armbaand«. Stripningen skyldes marvskedens opbygning av lameller. — Dette utseende avviker fra det tidligere av RANVIER beskrevne væsentlig deri, at aksecylindrens bikoniske opsvulmning mangler. Denne er iflg. NAGEOTTE et artefakt, idet aksecylindren passerer gjennom RANVIERS indsnøring som en regulær cylinder.

I friske dissociationspræparater kan man nu videre iagttå de Schwannske kjerner; men baade disse, det Schwannske syncytium og de Schwannske skeder studeres bedre i farvede pillepræparater.

Ved en enkel teknik angit av NAGEOTTE kan man farve de Schwannske skeder elektivt. Nervefibrene fikseres i formol 10%, dissocieres uten alkoholbehandling og farves med hæmalun (hvis man farver efter alkoholbehandling, tar foruten skeden ogsaa protoplasmaet og aksecylindren farven).

Man ser da for det første, at den Schwannske skede fortsætter sig uten avbrytelse fra det ene interannulære segment over paa det andet, idet den nøiagtig følger myelinskedens overflate og ved RANVIERS indsnøring nærmer sig saa sterkt til den indsnævrede aksecylinder, at den næsten berører denne. Skeden danner her et tverstillet diafragma med et centralt hul til passage for aksecylindren.

For at studere de Schwannske celler har jeg anvendt en teknik, som likeledes er anvendt av NAGEOTTE. Fiksation av nerven i Liq. de Dominici med formol, derpaa dissociation og farvning med hæmatoxylin (efter jernalun beisning) uten at passere alkohol. Man ser da den store ovale, noget flattrykte Schwannske kjerne omtrent midt i det interannulære avsnit omgitt av en perinukleær klat protoplasma; fra dette utgaar til begge sider et tyndt slør av protoplasma, forsterket med flere longitudinelle protoplasmastriper, der i det interannulære avsnit danner et stormasket protoplasmanet. De Schmidt-Lantermannske indsnøringer er ufarvede, hvilket viser, at de er uavhengige av de Schwannske cellers protoplasma. Ved hver RANVIERS indsnøring blir de protoplasmatiske baand sterkere og bredere, og maskerne er mindre, da netverket blir tettere; protoplasmabaandene løper ut i et sirkulært protoplasmaalag, som omgir indsnøringen, og meget ofte ser man, at de longitudinelle protoplasmabaand paa hver side av indsnøringen er placert det ene i forlængelsen av det andet, saaledes at det ene fortsætter sig direkte i det andet paa den anden side av indsnøringen. Dette viser, at de Schwannske celler i de forskjellige interannulære avsnit staar i forbindelse med hinanden indbyrdes og, som paavist av NAGEOTTE, danner et *syncytium*, som uten avbrytelse følger nerven fra dens begyndelse til enden.

Den Wallerske degeneration.

Naar en perifer nerve overskjæres, saa dens forbindelse med gangliacellen, nevronets kjerneholdige del, avbrytes, indtræder i det perifere segment en typisk degenerationsproces, som har faat navn den Wallerske degeneration. Den repræsenterer en noksaa enkel protoplasma-nekrobiose, hvis første stadium som bekjendt bestaar deri, at nervefibrene fragmenteres inde i den Schwannske skede. — Ved sin struktur og ved den lethet, hvormed de kan haandteres, danner nervefibrene et overmaade gunstig objekt for studium av denne slags protoplasmaød.

Processen studeres i sin begyndelse bedst paa friske, ufikserte og ufarvede præparater.

Det første fænomen er, at aksecylindren mister sit fysiologiske ødem og retraherer sig fra myelinskeden, saa den overalt faar en diameter, som den ellers kun har ved RANVIERS indsnøringer. Den findes nu i centrum av den endnu intakte myelinskede, omgitt av et væskelag. —

Litt senere — efter 1 eller 2 dage — indtræder en kornet degeneration av den retraherte aksecylinder. Væsken, som omgir den, viser en eienommeligg forandring, idet den deler sig i 2 deler. — Den ene, som synes

mere viskøs, utskilles som større og mindre draaper, der indeholder den granulerte aksecylindere, som ved disse draapers utskillelse opdeles i fragmenter. Mellem de mere viskøse draaper og den anden del af væsken er der en saavidt synlig og ganske smal grænselinje, som antages at bestaa af lipoide stoffe. —

Eftersom degenerationen skrider frem, minker de viskøse draaper, hvori aksecylindere ligger, i volum, og det vandagtige stof tiltar i mængde. Snart kommer segmentation af myelinskeden, hvis resultat er dannelsen af de karakteristiske ovoider, som NAGEOTTE først har set opstaa like for sine øine. — Ved at følge hans fremgangsmaate, nemlig taalmodig gennem nogen tid at iagttage de dissocierte nervefibre, som er tat ut af en kanin, et par dage efter nervens overskjæring, paa et tidspunkt da ovoiderne begynder at dannes, kan enhver gjøre det samme.

Paa de steder, hvor de viskøse draaper skilles fra hinanden, falder myelinskeden, som her mangler støtte indenfra, sammen, og væggene klæber til hinanden. Myelinskedens lameller slites over paa tværs, og segmenternes ender lukker sig ved, at væggen paa brudstedet falder ind mod centrum og her agglutinerer til en kuppel, og i løpet af et øieblik er myelinrøret paa den maate segmentert. — Segmentets poler dannes af regelmæssige, som oftest sfæriske eller ellipsoide kupler, og segmentationen foregaar altid i eller like ved en af de Schmidt-Lantermannske indsnøringer.

Dette er de væsentlige træk i ovoidformationen. Mens den foregaar, kan man hele tiden se den degenererte, kornede aksecylindere ligge som en slangebugtet pølse inde i ovoiderne. Naar den efter 12—14 dage er forsvunden, mister ogsaa ovoiderne sin struktur og omdannes til kuler og uregelmæssige fragmenter uden typisk organisation. — (Fig. 1—8.)

Efter 4 à 5 dage præges billedet af den Wallerske degeneration i høi grad af de cellulære elementers forhold i nervefibren; disse kan vanskelig følges i friske præparater og studeres bedst efter fiksatoren og farvning. — I de første 2 dage efter nervens overskjæring, mens aksecylindere og myelinskeden segmenteres, undergaar det Schwannske syncytium kun passive forandringer, — forandringer som i ethvert fald at dømme efter de histologiske billeder er rent mekaniske og afhængige af de nye rumforhold i nervefibrene; den Schwannske kjerne og det perinukleære protoplasma glider ind fra periferien og falder ind i midten af fibrene mellem 2 myelin-ovoider. (Fig. 1—2.) Ved de Ranvierske indsnøringer tiltar ogsaa protoplasmaet og dækker myelinsegmenternes poler som en kalot, mens det Schwannske syncytium forsvinder i den øvrige del af det interannulære afsnit, hvor det før dannet et netværk.

Fra den 3dje og i særdeleshed tydelig fra den 4de dag iagttages en hyperplasi av det perinukleære protoplasma, som nu blir sterkt granulert. — Fra den 6te dag sees i kjernen store klumper kromatin, og multiplikation av de Schwannske kjerner begynner den 6te og 7de dag.

Det har været antat, at alle de celler, som fra nu av findes i nervefibrene under degenerationsprocessen, er produkter av de Schwannske cellers proliferation. At dette ikke forholder sig saaledes, er paa en overbevisende maate demonstrert av NAGEOTTE, som fandt, at talrike énkjernede rundceller trænger ind gennem de Schwannske skeder, angriper myelinovoiderne, fylder sig med myelinkorn og opfører sig som egne fettkornceller, slik som vi kjender dem fra emollitionsfoci i centralnervesystemet.

Paa den 4de dag, da de Schwannske kjerner endnu ikke er begyndt at multipliceres og findes midt inde i det interannulære avsnit — hos kaninen ca. 1 mm. fra sin nærmeste nabokjerne i samme nervefiber — paa dette tidspunkt kan det hænde, at typiske fettkornceller allerede sees inde i fiberen og i saa stor en afstand fra de endnu hvilende Schwannske kjerner, at det er absolut utænkelig, at disse to celler staar i genetisk forbindelse med hinanden. — Og desuten er de morfologisk vidt forskjellige. — Kjernen i fettkorncellerne er liten, kantet eller rund, sterkt farvet, næsten sort, mens de Schwannske cellers kjerner er ovale, blekere og betydelig større end de førstnævnte. Men at der i nervefibrene foregaar en livlig fagocytose av myelinovoiderne ved indvandrede celler, vil ikke si det samme som, at de Schwannske celler er uvirksomme overfor resterne av myelinskeden, for ogsaa enkelte Schwannske celler finder man ladet med fettkorn.

12—14 dage efter overskjæringen findes alle nervefibre komplet degenererte; inde i de Schwannske skeder sees nu konglomerater av fett-draaper, omgitt av litt protoplasma, hvori sees 1 eller 2 runde, sterkt farvede kjerner. Dette er NAGEOTTES »corps granuleux«, d. v. s. indvandrede celler, der overfor myelinresterne optræder som fagocyter. Den gamle aksecylinder er forsvundet; kun i enkelte lange fett-draaper sees endnu spor av den som en pølseformig granulert substans. Paa de steder i den gamle myelinfiber, hvor næsten alt fett er resorbert, sees, som observert allerede av RANVIER og senere av VANLAIR, STROEBE, ZIEGLER o. fl., en massiv protoplasmacylinder med spolfornede fortykkelser; i disse findes ovale kjerner fremkommet ved proliferation av de Schwannske kjerner.

Disse protoplasmastrengene repræsenterer v. BÜNGNERS cellebaand. De viser en fin længdestripning, som har forledet v. BÜNGNER til at tyde dem som forstadier til den kommende aksecylinder.

Jeg har omtalt den Wallerske degeneration saavidt nøiagtig, fordi den er en karakteristisk og stadig gjenvendende degenerationsproces i den perifere del av en overskaaren nerve, og fordi kjendskapet til den derfor danner utgangspunktet og grundlaget for vor forstaaelse og tydning av de processer, som finder sted i perifere nerver under fri transplantation.

Kap. 1. Regeneration av perifere nerver.

Hvorledes regenererer det perifere segment av en avskaaret nerve, efterat dets fibre, som alle undersøkelser enstemmig viser, har undergaat den Wallerske degeneration?

Læser man igjennem de talrike arbeider, som fra histologer og fysiologer er levert til besvarelsen av dette spørsmål, saa findes, at disse grupperer sig om en av to store grundteorier, nemlig *kontinuitets-teorien* eller den monogenistiske teori og *diskontinuitets-teorien* eller den polygenistiske teori. Tilhængerne av den første mener, at de nydannede fibre i det perifere segment er dannet ved utvoksning og forlængelse av de overskaarne fibre i den centrale stump, mens polygenisterne antar, at disse fibre er opstaaet ved utdifferentering og sukcessiv omdannelse av de prolifererende Schwannske celler i det perifere segment.

Det ligger utenfor rammen av dette arbeide historisk at referere alle de undersøkelser, som er utført paa dette gebet, og det ansees ogsaa helt overflødig, da der i tidens løp er levert mange oversikter over temaet, saaledes bl. a. av STROEBE, SCHÜTTE, CAJAL og PERRONCITO.

Efterat fysiologen WALLER i 1852 hadde formulert det monogenistiske grundsyn, underbyggedes denne opfatning ved de histologiske undersøkelser av regenerationsprocesserne i overskaarne nerver av BRUCH, REMAK, RANVIER, VANLAIR og mange andre.

Den polygenistiske teori var imidlertid lancert i 1859 av PHILIPPEAUX og VULPIAN, efterat SCHIFF hadde uttalt sig for muligheten av heling per primam.

PHILIPPEAUX' og VULPIANS resultater støttedes ved TIZZONIS, LEEGAARDS og av v. BÜNGNERS arbeider. LEEGAARD fandt i det perifere segment en diskontinuerlig utvikling av nervefibre inde i de Schwannske skeder.

Kort efter v. BÜNGNERS publikation kom STROEBES særdeles omhyggelige undersøkelser, der syntes at skulle bekræfte utvoksningsteorien utenfor al tvil. Men BETHE bragte et fuldstændig omslag i opfatningen ved sit begeistrede forsvar for den autogene regeneration, som fra 1903 docertes som den rette tro i mange lærebøker.

BETHE gjentok PHILIPPEAUX' og VULPIANS forsøk og reseceerte hos nogle faa dage gamle pattedyr n. isch. med dislokation av enderne for at utelukke forening og etablering av fysiologisk kontinuitet. BETHE fandt under disse betingelser, hvorved han anser det absolut utelukket, at nervefibre trænger ind i den perifere stump fra den centrale — i et visst antal tilfælder en makroskopisk og mikroskopisk absolut avbrytelse av segmenterne og samtidig en mere eller mindre fremskreden regeneration av det perifere, der viste elektrisk irritabilitet. Dette saavelsom hans paastaaede bekræftelse av v. BÜNGNERS observation av de forskjellige utviklingstrin av de Schwannske celler til unge nervefibre bragte BETHE til at anse den autogene regeneration i perifere nerver efter overskjæring som mulig.

Enhver nydannet aksecylinder skal være resultatet av et samarbeide mellem talrike Schwannske celler, i hvis protoplasma nervefibrillerne utdifferentieres. Det Schwannske celleprotoplasma danner parallelle baand, hvori utdifferentieres et granulert perifert og et længdestripet centralt skikt. I nærheten av kjernerne opstaar der diskontinuerlige nevrofibriller, som smelter sammen til en kontinuerlig aksecylinder.

Disse nydannede fibre er dog, naar det perifere segment paany gjen-nemskjæres, hjemfaldne til degeneration, og BETHE antar derfor, at de uvægerlig gaar til grunde, hvis de unddrages den trofiske virkning fra den centrale ende; denne indflydelse er saa betydelig, at »et nervesegments regenerasjonsevne er saa meget kraftigere, jo nærmere det ligger det tilsvarende nervecentrum«.

Læren om den autogene regeneration av det perifere segment har en ivrig forsvarer i HENRIKSEN, som i 1903 og senest i 1913 publicerte sine undersøkelser, hvis resultater forfatteren tyder derhen, at aksecylindren nydannes fra neurilemkjernerne, som omgir sig med protoplasma.

Den nye fotografiske metode til farvning av nevrofibrillerne, som indførtes i 1905 av RAMON Y CAJAL, tillot opfinderen et særdeles præcist studium av regenerationsprocesserne i aksecylindren, nervefiberens vigtigste del. CAJAL underkastet BETHES lære en tilintetgjørende kritik; resultatet av disse hans fundamentale undersøkelser er uangripelige, og arbeidet er det vigtigste dokument fra den monogenistiske leir. CAJALS konklusjoner skal kort refereres:

1. Ved alle eksperimenter med dislokation, resektion og vanskeliggjørelse av regenerationen efter BETHES mønster findes der et nervefibredrag, som stammer fra den centrale ende og i størsteparten av tilfældene rækker hen til det perifere segment og trænger ind i dette.
2. De Schwannske protoplasmastrenger, som optræder i den degenererte perifere stump, danner ikke nye fibre, men indskrænker sig til at til-

trække de fra arret kommende og opta dem i sig. Det støttes ved følgende iagttagelser:

- a. Den direkte fortsættelse av fibrene fra den centrale stump til arret og herfra til det perifere segment.
 - b. I tilfælde av umiddelbar forening av de 2 nerveender sees nye aksecylindre i den perifere stump allerede fra 8de dag, d. v. s. længe *før* de Büngnerske fibre har dannet sig.
 - c. Mangelen paa overgang mellem disse protoplasmabaand og nervefibreneres optræden; disse dukker pludselig op midt inde i strengen.
 - d. De av mange forfattere observerte allerede tidlig tilstedeværende aksecylindre, som ligger *mellem* protoplasmabaandene.
 - e. Den direkte iagttagelse av den frie ende av de i det periferes egment indtrængende aksecylindre, som næsten konstant er forsynt med en protoplasmakolbe, der er rettet mot periferien.
 - f. Den absolute mangel paa diskontinuitet ved utspringsstedet for den perifere endes nye fibre, saaledes som det antages av v. BÜNGNER og polygenisterne.
 - g. Den store forskjil i fibreneres antal i den perifere stump i tilfælder, hvor overskjæringen kompliceres med resektion og dislokation av stumperne. Mens den perifere stumps centrale ende i tilfælder, hvor der er ubetydelige hindringer for utvoksningen, synes fuldstændig innervert efter 15—20 dage, er der i det perifere segment endog efter 2—2½ md. ingen eller et ubetydelig antal aksecylindre, hvis utvoksningen vanskeliggjøres ved dislokation av nerveenderne eller resektion av et større stykke. Saadanne uregelmæssigheter, som let forklares ved kontinuitetslæren, er ikke forenelige med den polygenistiske teori.
3. Naar de 2 ender av den overskaarne nerve forblir i nærheten av hinanden, representerer flertallet av de nye fibre i det perifere segment den direkte forlængelse av den præeksisterende aksecylinder i det centrale segment. Kun i det intermediære ar findes nogen spaltninger. Men er der hindring for utvoksningen, saa kommer der foruten en nydannelse av fibre ved direkte forlængelse en multiplikation av fibre ved forgreninger, som begynder i arret og naar sit maksimum ved det perifere segments hilus.
 4. Det er sandsynlig, at de nye fibres vekst, forgrening og orientering ledes av kemotaktiske kræfter fra de Schwannske celler i den perifere stump.

Et særdeles vigtig indlæg til fordel for den monogenistiske teori er PERRONCITOS arbeide fra 1907. Han meddeler her en række nye obser-

vationer av detaljer i nerveregenerationen, paaviste ved den fotografiske metode, hvoriblandt de *tidlige*, allerede 3—4 timer efter overskjæringen stedfindende regenerationsbestræbelser i den centrale stump er de vigtigste. Dette er senere bekræftet av CAJAL. PERRONCITOS konklusioner falder i det hele sammen med CAJALS og modsiger paa det bestemteste BETHES resultater.

For den monogenistiske teori uttaler sig likeledes LANGLEY og ANDERSON, LUGARO samt HALLIBURTON og MOTTS, EDMONDS, NAGEOTTE, MARINESCO og MINEA.

Paa den anden side har VAN GEUCHTEN (1904), ved at gjenta PHILIPPEAUX' og VULPIANS samt BETHES eksperiment med utrivning av n. isch. ved dens uttrædelse av bækkenet hos unge hunde (faa dage gamle) og dislokation av den perifere stump, fundet, at naar han flere maaneder senere irriterter den perifere stump, fik han kontraktion av ben- og fotmuskler, mens elektrisk irritation av den centrale stump var uten virkning. Han konkluderer av dette, at der har fundet sted en autoregeneration i det perifere segment.

En histologisk undersøkelse av det intermediære segment mangler, og CAJAL anfører mot VAN GEUCHTEN, som mot VULPIAN og BETHE, denne mangel som tilstrækkelig til helt at avsvække beviskraften i forsøket, da en nøiagtig histologisk undersøkelse av det intermediære avsnit i tilfælde vilde avslørt nervefibre, som fra omgivelserne eller fra den centrale stump var vokset ind i den perifere stump; dette har CAJAL altid fundet i saadanne tilfælder.

Til forsøksobjekt ved mine *egne undersøkelser* over regeneration av perifere nerver efter overskjæring har jeg anvendt n. ischiadicus hos 3—4 maaneder gamle kaniner; nerven er dels overskaaret med en skarp kniv, dels avklemt med en arteriepinct.

Ved den histologiske undersøkelse av segmenterne har regenerationsfænomenerne fra aksecylindren interessert mig mest; til at farve denne har jeg anvendt CAJALS fotografiske metode med reducert sølvnitrat efter fiksation i alkohol og ammoniak. Impregnationen av neurofibrillerne med reducert sølvnitrat har git metodens mester glimrende resultater og har desuten med rikt utbytte været anvendt av MEDEA, VAN GEUCHTEN, NAGEOTTE, MARINESCO, LUGARO, DOGIEL, PERRONCITO og andre. Metodens brukbarhet maa derfor ansees hævet over tvil, og HENRIKSENS i 1913 fremkomne kritik av den er svakt underbygget. HENRIKSEN støtter sin kritik væsentlig paa uoverensstemmelsen mellem de billeder, man finder ved sølvimpregnation, og de, man ser ved anvendelse av andre histologiske metoder.

Denne uoverensstemmelse er dog kun tilsynelatende og opstaar der- ved, at sølvimpregnationen viser saa uendelig meget mere end de andre metoder, saa at man, naar man kun er vant til disse, overraskes ved den rigdom av detaljer i aksecylindrens regeneration, som CAJALS metode viser, og det er derfor »de andre metoder« og ikke sølvimpregnationen, som er skikket til at fremkalde misforstaaelser.

Det er selvsagt, at den ikke maa anvendes, medmindre tekniken er tilfredsstillende, og PERRONCITOS kritik av MODENAS og BALLANCES og STEWARTS præparater er vistnok fuldt berettiget, uten at den avsvækker bevismakten av PERRONCITOS eget materiale.

Et vellykket resultat avhænger av smaa detaljer i fremgangsmaaten, og man gjør vel i at følge CAJALS forskrifter i ett og alt.

1. Fiksation i 50 cc. alkohol absol. + 6 draaper ammoniak i 12 timer.
2. Impregnation i en 1,5 % opl. av nitros. argent. i termostat av 35° i 5 døgn.
3. Avskylning i aq. destill.
4. Reduktion i 24 timer i 1 % opl. av acid. pyrogall. med 10 % formol.

Kanin 6. 3 mndr. gl. Øvre ende av den avskaarne H. n. isch. 1 døgn efter overskjæringen. (Fig. 9.)

Aksecylindrenes perifere ender er kolbeformig opsvulmet, og en del av dem er varikøse og kornet degenerert 3—5 mm. op fra arret. Degenerationen passerer en eller flere Ranvierske indsnøringer og stanser uavhengig av disse. Nogen faa aksecylindere er degenerert langt op gjennem den centrale stump — over 1 cm.

I enkelte aksecylindre er der ovenfor det degenererte, opsvulmede parti en sterkt fremtrædende fibrillær struktur. Her sees enkelte steder en fin sidegren at springe ut, eller aksecylindren ender i et tæt netverk av sterkt farvede fibriller. Et par av sidegrenene er forsynet med en liten sortfarvet *knop*, eller de ender i en lukket *ring*.

Perifert for overskjæringsstedet (d. v. s. de gamle aksecylindres ender) sees ingen saadanne fænomener.

Kanin 6. 3 mndr. gl. 2 døgn efter overskjæringen av V. n. isch. Centrale stump.

Aksecylindrene er degenerert i deres mest perifere del omtrent som 24 timer efter overskjæringen. Der er nu begyndt fragmentation av myelinskeden i den mest perifere del. Omkring enkelte av de degenererte og opsvulmede aksecylindre slynger der sig i steile og uregelmæssige slyngninger tynde, sorte nervefibriller. (Fig. 10.)

I den mest perifere del sees en aksecylinder som en enkelt, tyk fiber, der ender i en knop, og like ved denne en anden, som har delt sig T-formig i to, og hver av disse ender likeledes i en knop.

Ute i arret er der ingen nydannede fibre.

Kanin 7. 3 mndr. gl. N. isch. avskaaret. Centrale stump. 3 dage efter overskjæringen. (Fig. 11—12.)

Omkring den perifere ende av den opsvulmede, rosenkransagtige aksecylinder slynger sig flere steder tynde, mørke fibre, hvis utspringssted, litt længer oppe fra samme aksecylinder, kan sees et par steder. Enkelte av de mindst forandrede aksecylindre fortsætter sig ned blandt bindevævs-cellerne i arret med en avsmalnende, spids, tynd fiber, der dels ender som saadan, dels gaar over i en sterkt farvet, rund eller oval knop. Fra saadanne aksecylindre utspringer tynde sidegrene, som enten ender spidst ute blandt bindevævscellerne i arret, eller de ender i en mørkfarvet, stor knop.

Kanin 7. 3 mndr. gl. N. isch. overskaaret. Centrale stump. 4 dage efter overskjæringen.

En flerhet av aksecylindrene er i de mest perifere, mere og mindre degenererte avsnit dels ledsaget av, dels omslynget av tynde, sorte fibre inde i den Schwannske skede. I de tilfælder, hvor de tynde fibre omslynger aksecylindren, er slyngningerne faa og steile. Disse tynde fibre kan følges et godt stykke ut blandt de bindevævsagtige celler i arret.

Enkelte av de tynde aksecylindre er ikke degenerert og fortsætter sig uten avbrytelse avsmalnende til en enkelt tyk eller tynd, sort fibrille ut i arret, med samme retning, eller derfra meget litet avvikende retning, som den hadde i den centrale stump.

De sorte, nydannede fibre ender for det meste i en spids. Enkelte ender i en ring. Et sted sees et helt nøste av saadanne fibre, som alle ender i ringe.

Enkelte av aksecylindrene splitter sig op og ender i en »pensel«.

Kanin 4. 4 mndr. gl. N. isch. avklemt med en pincet. Undersøkt 4 dage senere.

I det centrale stykke: Aksecylindrene er like ved avklemningen brede, kolbeformige, homogene, fingranulerte, men kun i et ganske kort stykke. Den opadstigende degeneration er ganske begrenset og langt kortere end ved hel overskjæring. Aksecylindrene har her ikke det oprevne eller rosenkranslignende utseende som ved avskjæring.

Ovenfor den kolbeformige fortykkelse ender de ofte som en pensel, eller fibrillerne danner et net. Ovenfor dette avgaar der i flere aksecylindre sidegrene, som følger aksecylindren nedover inde i den Schwannske

skede. De ender enten i en ganske liten opsvulmning eller i en tydelig *ring*, eller de ender spidst.

Perifert for avklemningen er alle myelinfibre degenerert; men her sees endnu mange fibre, som ikke er degenerert.

Ingen av de nydannede fibre i den centrale del har endnu passert avklemningsstedet.

Kanin 8. $3\frac{1}{2}$ mndr. gl. N. isch. overskaaret. Centrale stump. *7 dage* efter overskjæringen.

De fleste aksecylindre er degenerert (opsvulmet, rosenkranslignende) noksaå langt opover, et par mm. fra overskjæringsstedet. Nærmest dette er marvskederne henfaldt. Fra et nivåa litt ovenfor det sted, hvor aksecylinderdegenerationen stanser, indeholder de enkelte Schwannske skeder, tiltagende i antal nedover, tynde, mørke, nydannede nervefibriller. Deres utspring fra aksecylindren kan sees hist og her, men for det meste dukker de op med avskaarne (skraasnit) øvre ender. De følger aksecylindren nedover, forlater den Schwannske skede ved overskjæringsstedet — som tydelig sees — og trænger dernæst ut blandt de prolifererende, ovale, bindevævsagtige celler perifert for overskjæringsstedet, hvor de forløper enkeltvis eller et par sammen med hovedretning paralelt den centrale stump.

Flere av de litet forandrede aksecylindre fortsætter sig direkte som en enkelt, tynd fiber ut i arvævet. En del av aksecylindrene ender i en oval knop, og fra denne skyter der da ut i arret en tynd nervefibrille. Disse ender for det meste i en spids.

Inde i et par Schwannske skeder sees ned mot overskjæringsstedet, at de nydannede, tynde fibre har snodd sig omkring den degenererte aksecylinder i talrike, flate spiraler. (PERRONCITOS fænomen.)

Kanin 1. $3\frac{1}{2}$ mndr. gl. V. n. isch. avklemmt med pincet. Uttat *8 dage* efter avklemningen.

Obs.: Præp. nr. 2 fra høire.

Centralt for avklemningen:

Der sees kun en og anden rosenkranslignende aksecylinder. Enkelte av dem er opsvulmet. Et litet stykke (1—2 mm.) ovenfor avklemningen er der talrike nydannede, tynde fibre, hvis avgang fra de gamle aksecylindre er tydelig. Flere av de unge fibriller ender ovenfor avklemningen i en *ring*. Andre ender i en liten knop. Andre følger aksecylindren nedover, passerer avklemningsstedet og gaar *uten avbrytelse over i den perifere del*. I denne er de fleste aksecylindre henfaldt til uregelmæssige mørke brokker liggende inde i myelinovoider, hvis konturer saavidt skimtes. Man ser, hvorledes de unge nydannede aksecylindre her løper inde i de Schwannske skeder, følger langs utsiden av myelinovoiderne, falder

ind mot centrum, hvor ovoiderne har fjernet sig fra hinanden, saa her paa disse steder sees en tyk bundt av nevrofibriller, som atter spredes ut paa overflaten av den nedenforliggende ellipsoid. Mange av disse fibriller ender i en knop. De findes endnu 3—4 mm. nedenfor avklemningsstedet.

Kanin 1. 3 $\frac{1}{2}$ mndr. gl. H. n. isch. avklemtes, ligertes stramt, gennemklippedes *centralt* for ligaturen; av centrale segment fjernedes 3 cm. Perifere segment (uttat efter 8 dage):

Der sees en saagodtsom komplet — i de fleste præparater en fuldstændig — degeneration av nervefibrene. Den gamle aksecylindrer er forsvundet, og resten av den sees som avlange pølseformige eller uregelmæssige, mørke, kornede brokker inde i myelinellisoider, hvis konturer saavidt kan skimtes.

Av nydannede nervefibre sees ikke spor.

Kanin 8. 3 $\frac{1}{2}$ mndr. gl. H. n. isch. kupert. Centrale stump 11 dage efter overskjæringen. (Fig. 14.)

Det rosenkranslignende utseende, som aksecylindrer paa et tidligere stadium viste i sin mest perifere del, er nu for en stor del svundet. Det sees kun i enkelte aksecylindre og gaar ikke langt op. Flere aksecylindre har et jevnt, næsten cylindrisk eller kun ganske litt takket utseende i det nærmest overskjæringsstedet liggende avsnit. En del av disse litet forandrede aksecylindre ender i en stor granulert eller finretikulert pæreformet knop, som enten ligger i aksecylindrerens forlængelse, eller dennes mest perifere del har forandret retning, saa den nu ligger i en bøining tvers paa nervens retning, eller den har endog vendt *helt* rundt (180°), saa knoppen peker tilbage ind mot centrum.

De Schwannske skeder indeholder i det nærmest arret liggende avsnit talrike, tynde, parallelle fibre, som ligger sammen med den gamle aksecylindrer. I enkelte Schwannske skeder er de tynde fibre slynget korketrækkerformig rundt den gamle aksecylindrer i flate spiraler, og disse ender gjerne i en liten knop.

Enkelte av de litet forandrede aksecylindre fortsætter sig nu forbi overskjæringsstedet ut iblandt de prolifererende bindevævsagtige celler i arret som en enkelt tynd eller tynd rund (cylindrisk) og jevn fiber. Saadanne fibre gennemkrydser arret i bundter eller enkeltvis — de fleste med retning som i den centrale stump, men enkelte bøier sig i buer ind mot centrum av denne, eller de vender endog tilbake til den centrale stump og vokser ind i denne. Mange av fibre i arret ender i en pæreformet knop.

Foruten disse fibre sees ogsaa talrike fibre, der er endnu tyndere, og som danner den direkte fortsættelse av de unge fibriller, der er vokset

ut-fra aksecylindren oppe i den centrale stump, centralt for dens degenererte avsnit. Ogsaa en del av disse ender i en liten knop.

Kanin 5. 4 mndr. gl. N. isch. avklemt med en pincet. Uttat efter 14 dage.

Avklemningsstedet er ikke meget fremtrædende, men det markeres ved en let avbøining av aksecylindrene. Omkring dette sted er der opad og nedad betydelig cellerigdom (av lange Schwannske celler, bindevævs-celler) i en ca. 1 mm. bred zone tvers over nerven. Ovenfor avklemningen sees ingen myelinellipsoider, nedenfor sees talrike ellipsoiders konturer.

Kun ganske faa aksecylindre viser opsvulmning, rosenkransform eller henfald paa avklemningsstedet. De fleste aksecylindre fortsætter sig ubrutt gjennom avklemningsstedet ned gjennom den degenererte perifere stump, hvor enkelte av dem ender i en stor pæreformet knop. Av de gamle degenererte aksecylindre sees i den perifere del kun hist og her store, sorte, uregelmæssige brokker inde i myelinovoiderne.

I andre avsnit av nerven sees paa avklemningsstedet bundter av tynde fibriller, der utspringer fra de gamle aksecylindre ovenfor avklemningen, passerer denne og vokser som brede bundter ned i det perifere stykke, liggende inde i de gamle Schwannske skeder, passerer utenom myelinovoiderne, ender dels i spidser, dels i smaa knopper, av hvilke de fleste peker mot periferien, kun nogen faa har vendt sig i en sløife ind mot centrum.

Enkelte av de tynde fibriller danner slyngninger, steile spiraler, men kun paa et par steder danner de virkelige Perroncitoske korketrækkere.

I snit fra et stykke mere perifert har resterne av de gamle, degenererte aksecylindre tat farven sterkere. De fleste Schwannske skeder indeholder talrike nevrofibriller, der danner parallele baand, men hver gang de kommer til en myelinellipsoid, spreder de sig ut over dennes overflate og samles igjen til et baand ved ellipsoidens perifere pol.

Kanin 8. N. isch. kupert. Centrale stump utrevet. *Perifere stump* undersøkt efter 14 dage.

Der sees ingen nydannede fibre. Myelinet henfaldt i ovoider, som indeholder enkelte brokker av de gamle aksecylindre.

Kanin 82. 4 mndr. gl. V. n. isch. avskaaret. Centrale stump forsøket i en muskel paa laaret. Undersøkt efter 30 dage.

Centrale stump med vedhængende muskulatur.

Ingjen rosenkransformer. De fleste aksecylindre ender i en pæreformet opsvulmning, som enten er granulert eller viser et net av tynde nevrofibriller. En hel del av disse og særlig de mindste har — efter en tilbakebøining — retning mot centrum. Mange av dem er omgitt av talrike,

parallele, tynde fibriller, som passerer ut i arret; enkelte steder danner de uttalte Perroncitoske korketrækkere.

De nydannede tynde nevrofibriller trænger ind i muskulaturen og løper her i bredere og smalere bundter i det interstitielle væv mellem muskelfibrene. Enkelte av nevrofibrillerne ender i en liten knop.

Perifere stump:

Ganske sparsomme, sorte brokker tilbake av den degenererte, gamle aksecylinder. Ingen nydannede nervefibre.

Kanin 83. 4 mndr. gl. V. n. isch. avklemmt med pincet. Uttat efter 30 dage. Like nedenfor avklemningen.

Der sees sparsomme, brokkede rester av de gamle aksecylindre. Der sees talrike nye aksecylindre, hvorav de fleste er tykke, cylindriske eller litt bugtede, men i sit forløp av samme ensartede tykkelse. Der sees kun faa bundter av tynde parallele nevrofibriller.

Kanin 2. 4 mndr. gl. H. n. isch. avklemmt (pincet). Uttat efter 40 dage. 4 cm. nedenfor avklemningen.

Længdesnit:

Der sees brokkede rester av den gamle aksecylinder, samt en del (sparsomme) myelinellipsoider.

Tversnit:

Talrike nydannede fibre inde i de Schwannske skeder.

Kanin 1. N. isch. avklemmt. Uttat efter 50 dage.

Masser av tykke cylindriske aksecylindre.

De undersøkelser, jeg har gjort over regeneration av nerver efter overskjæring, har ikke bragt for dagen noget nyt, og jeg har intet at tilføie til CAJALS og PERRONCITOS resultater. Disse forskeres undersøkelser er saa uttømmende, og deres materiale saa overbevisende, at spørsmålet om regeneration av perifere nerver derigjennem maa ansees løst. Det var heller ikke bare haabet om yderligere at kunne belyse problemet, der bragte mig til at gjøre mine forsøk. Disse nødvendiggjordes ved behovet for en god metode til anatomisk studium av regenerationsfænomenerne, og efterat jeg til dette øiemed hadde bestemt mig for anvendelse av solv-impregnationsmetoden, maatte jeg for at kunne studere nerveregenerationen under fri transplantation paa forhaand kjende de histologiske billeder, som solvimpregnationen gir ved regeneration efter overskjæring.

Jeg skal nu *summere resultaterne* av mine eksperimenter, som ovenfor er referert i detalj.

24 timer efter overskjæringen er den perifere ende av den centrale stump noget opsvulmet. De gjennemskaarne ender av aksecylindrene

er ogsaa opsvulmede, kolbeformige i $\frac{1}{2}$ optil 1 mm.'s længde opover. I enkelte aksecylindre findes, ovenfor dette avsnit, at den fibrillære struktur er forsvundet, og isteden sees varikøse opsvulmninger eller fuldstændig kornet henfald; dette strækker sig i enkelte fibre flere mm., ja endog over 1 cm. opover; degenerationen stanser uafhængig af de Ranvierske indsnøringer og synes ganske uregelmæssig og ulovmæssig i utstrækning. Men denne traumatiske degeneration er mindre uttalt og strækker sig kortere op gennem det centrale segment ved avklemning end ved overskjæring. (K. 4.)

Efter 24 timer er der antydning til regenerationsfænomener fra den centrale stump. PERRONCITO har fundet saadanne allerede 3 og 6 timer efter overskjæringen, *hvad jeg ikke har kunnet bekræfte ved mine forsøk.* I de aksecylindre, hvori den traumatiske degeneration kun strækker sig brøkdeler af 1 mm. opover, sees like ovenfor denne 1 døgn efter overskjæringen smaa sidegrene at springe ut; disse ender enten i en spids eller i en fin pensel eller i en liten knop; et sted ender den i en ring; disse nydannede sidegrene ligger indenfor den Schwannske skede.

Efter 2 døgn er disse sidegrene tiltat i antal og i længde, idet de har vokset ut mot periferien indenfor den Schwannske skede. Enkelte av dem deler sig T-formig, og de ender nu enten i en spids eller i en sortfarvet knop.

Efter 3 døgn er disse fibre kommet helt ut til bindevævet omkring stumpen, og de T-formige spaltninger er endnu hyppigere. Fra en del av de gamle aksecylindres ender skyter der sig ut mot arvævet en sortfarvet, enten solid eller fibrillær, varikøs forlængelse. Den ender i en oval knop, der av CAJAL tydes som en »vekstkølle«.

Indtil 4de dag er imidlertid disse regenerationsfænomener sparsomme og findes kun hist og her i mine præparater; PERRONCITO og CAJAL har observært dem i rikeligere mængde.

Hos mine 3 mndr. gamle kaniner kommer der ikke fart i nydannelsen av fibriller før omkring 4de—5te døgn; i præparater fra 4de døgn sees, hvorledes nydannede fibriller slynger sig i steile spiraler omkring de periferе avsnit av de gamle aksecylindre i den centrale stump. Og 7 dage efter overskjæringen sees blandt bindevævscellerne i det intermediære ar en masse nydannede fibriller, som danner den direkte fortsættelse av fibrillerne i den centrale stump, baade av dem der utspringer som sidegrene fra den gamle aksecylinder ovenfor dennes degenererte avsnit og løper nedover inde i den Schwannske skede, og av andre fibriller, som utvilsomt danner den direkte fortsættelse av de gamle aksecylindre, som allerede har forvundet sin degenerationstilstand og ved terminal forlængelse vokser ut i arvævet og her gjerne deler sig i mange

grene. De fleste av disse ender i en sortfarvet, pæreformet knop (vekstkølle).

En del av disse nydannede fibriller danner en sloife enten ute i arret, eller endnu før de er kommet saa langt — og vender tilbake med retning ind mot centrum, og deres endekølle findes da et stykke oppe i den centrale stump sammen med andre nydannede fibriller, som har retning mot periferien.

De av PERRONCITO paaviste tidlige regenerationsfænomener fra aksecylindrene i den centrale stump tillægges av PERRONCITO og CAJAL med rette en stor betydning. Vi vet, at de Schwannske cellers prolifération først begynder omkring 6te dag. Og man kan derfor slutte, at *disse regenerationsfænomener foregaar direkte fra aksecylindren selv uten indvirkning og helt uavhengig av de Schwannske celler, og fænomenet motbeviser derfor den av polygenisterne hævdede opfatning av aksecylindrenes regeneration.*

De fibriller, der vokser ut fra aksecylindrene i det centrale segment av en nerve, der er *avklemt med en pincet*, har ikke passert avklemningsstedet 4 dage efter avklemningen. 8 dage efter avklemningen findes det perifere segment tèt gjennemsat av de utvoksede fibriller. De fortsætter sig ubrutt og kontinuerlig fra den centrale stump gjennom avklemningsstedet og findes et godt stykke — d. v. s. flere mm. nede i det perifere segment, hvor de ligger inde i de gamle Schwannske skeder sammen med myelinovoider og oftest utenpaa disse, mens der inde i ovoiderne sees sorte eller mørkfarvede, granulerte rester av den gamle degenererte aksecylinder.

Disse fra den centrale stump utvoksede fibre, som altsaa findes i det perifere segment paa 8de dag, d. v. s. længe før de Büngnerske protoplasma-baand har dannet sig, utgjør et andet uomtvistelig bevis for det uholdbare i kjede- eller diskontinuitetsteorien.

7 dage efter overskjæringen findes i den centrale stump en eiendommelig anordning av de utvoksede nevrofibriller i kompliserte fletverk, som av CAJAL efter opdageren er kaldt *Perroncitos fænomen*.

Allerede den 4de dag efter overskjæringen iagttages, at de nydannede nervetraade vokser ut mot periferien i steile slyngninger inde i den Schwannske skede omkring den gamle aksecylinders perifere ende. I sin enkleste form representerer nu Perroncitos fænomen en central aksecylinder, der er omviklet av en enkelt, nydannet nevrofibril i en flat spiral. Men oftest deltar flere nevrofibriller i dannelsen av spiralen, og skruens akse kan dannes av mere end 1 nervefiber. Enkelte steder ligger vindingerne saa tèt filtret ind paa hinanden, at spiralen foran-

dres til et nøste, hvor de enkelte fibrillers forløp kun kan skjelnes stykkevis.

De fibriller, som deltar i dannelsen av Perroncito-nøstet, ender gjerne i en oval vekstknop, og dennes retning er da dels paa tvers av nerven d. v. s. i spiralens retning, eller den kan være kommet gjennom denne og har retning mot periferien eller — den har gjort helt om og er paa vei tilbake fra periferien.

Til forklaring av dette fænomen minder PERRONCITO om, at tilbøielighet til spiraldannelse ikke er sjelden indenfor nervesystemet, og nævner i denne forbindelse det Vater-Paciniske legeme. Han antar, at fænomenet er et utslag av den under nerveregenerationen ret almindelige tendens til dannelse av strukturer, som ellers kun findes i nervecentrer og endeapparater.

LUGARO forklarer Perroncito-fænomenet ved antagelsen av kemotaktisk desorientering av de voksende fibriller. CAJAL derimot antar, at en utvoksende fiber tvinges til at slynge sig i spiraler paa stedet, naar mekaniske hindringer staar iveien for dens fortsatte vekst ut mot periferien.

Mine præparater bekræfter denne anskuelse, idet Perroncito-nøsterne findes netop paa steder, hvor der er synlige hindringer for fibrillernes længdevækst i form av bindevævsdrag, blodkoagler, leukocyter eller en langvarig kompression av de Schwannske skeder. (De forekommer i langt større antal efter overskjæring end efter avklemning.)

At mekaniske hindringer for længdevæksten øker antallet av Perroncito-nøster, har jeg set ogsaa i mine præparater fra nervetransplantationerne, hvad jeg senere kommer tilbake til.

Allerede flere gange har jeg nævnt, at de unge voksende neurofibriller ender i en *knop*. Disse knopper er runde eller pæreformige, oftest homogene, sorte, undertiden fibrillære eller finkornede, enten ganske smaa, saavidt synlige som en liten opsvulmning av fibrillens ende, eller noget større — optil $7-8\ \mu$ i tversnit. Av og til finder man, at knoppen, som synes at være terminal, fra sin anden ende utsender en fin neurofibril, som saa ender i en knop eller i en spids. (Fig. 12.) Disse knopper har CAJAL git navnet *vekstkøller*. De findes i størst antal, hvor der er hindringer for fibrillernes utvoksning i længden, og repræsenterer sandsynligvis et fænomen i fibrillernes vekstmekanisme.

Denne anskuelse bekræftes ved mine forsøk med dyrkning av nervefibre in vitro, hvorved jeg direkte har kunnet iagttå nervefibrene, mens de vokser ved amøboide bevægelser i en terminal knop, som efter fiksat

og sølvimpregnation er rund eller pæreformet. Dette vil senere bli gjenstand for nærmere omtale.

11 dage efter overskjæringen har aksecylindrene i den centrale stump for en del forvundet den traumatiske degeneration i sin perifere del. Fra flere av dem skyter der sig direkte forlængelser ut i arvævet, og saagodt-som alle er omgitt av tette bundter av nydannede fibriller, der er utsprunget længer oppe. Ute i arvævet er der et fletverk av nydannede fibriller, der løper enkeltvis eller i bundter med hovedretning mot periferien. Der sees talrike Perroncito-korketrækkere.

14 dage efter *avklemning* findes der et godt stykke ute i det perifere avsnit tette bundter av nydannede fibriller, som ubrutt passerer gjennom avklemningsstedet og ligger inde i de Schwannske skeder, men passerer utenpaa myelinovoiderne.

30 dage efter overskjæring viser den centrale ende — forsænket i en muskel paa laaret — ingen tegn paa traumatisk degeneration. En del aksecylindre ender i en pæreformet opsvulmning. Fra stumpen trænger masser av nydannede fibriller ind i musklens interstitielle væv.

30, 40 og 50 dage efter avklemning sees i det perifere avsnit rester av den gamle aksecylinder, mens det forøvrig er tæt gjennomvokset av nydannede fibriller, som i tversnit findes inde i de Schwannske skeder.

I det perifere segment findes derimot ingen nydannede fibriller i tilfælder, hvor der lægges hindringer iveien for, at saadanne kan vokse ind fra det centrale.

Saaledes ingen nydannede fibre i det perifere segment 8 dage efter overskjæring med anlæggelse av en permanent stram ligatur om centrale ende av dette. (K. 1.)

Ingen fibriller i det perifere segment hos K. 8 14 dage efter overskjæring med utrivning av det centrale segment. Ingen fibriller i det perifere segment hos K. 82 30 dage efter overskjæring med forsænkning av det centrale segment i en muskel.

Konklusioner:

24 timer efter overskjæring av en perifer nerve findes i den centrale stump regenerationsfænomener i form av utvoksende sidegrene fra aksecylindrene ovenfor det avsnit, der undergaar traumatisk degeneration.

Disse nydannede fibriller har efter 7 dage vokset ut i det unge granulationsvæv, der omgir den centrale stump og gjennomkrydser dette enkeltvis eller i bundter. 8 dage efter *avklemning* har de unge nydannede fibriller passert avklemningsstedet og er vokset 3—4 mm.

ut i det perifere segment. 14 dage efter avklemning findes de langt ute i dette.

I det perifere segment findes ingen nydannede nevrofibriller, hvis der lægges hindringer iveien for deres utvoksning fra det centrale segment.

Skjønt mine forsøk ikke er mange, gir de dog et billede av regenerationsprocesserne — og et billede som paa alle punkter stemmer med utvoksningslæren og ikke paa noget punkt støtter diskontinuitetsteorien.

Kap. 2. Regeneration av nervefibre in vitro.

En organisme er død i det øieblik, den ophører at eksistere som individ. Men organismens væv og enkelte celler fortsætter at leve endnu i et begrænset tidsrum, hvis længde avhænger dels av ydre faktorer (temperatur, fugtighedsgrad) og dels av vævenes differentiationsgrad, saaledes at tiden mellem individets død og vævenes død er længere, jo mindre differentiert vævet er. I dette tidsrum foregaar cellernes stofskifte overmaade langsomt, indtil de autolytiske spaltninger begynder, som før eller senere resulterer i protoplasmaets død. Disse celler og væv befinder sig i denne periode i en tilstand av latent liv. Cirkulation og respiration er ophævet, og deres stofskifte er, om ikke helt suspendert, saa i ethvert fald sterkt nedsat. Men de kadaverøse forandringer er endnu ikke indtraadt, eller de er i ethvert fald saa smaa, at de kan avbrytes i sin udvikling, om vævet igjen bringes under gunstige livsvilkaar. Begrepet latent liv skyldes CLAUDE BERNARD. Men fænomenets forekomst paavistes for ca. 200 aar siden av LEEUWENHOEK, som i indtørket støv fra gamle takrender fandt smaa dyr, der kan tørke fuldstændig ind, og dog ved at befugtes med almindelig regnvand igjen vaagner til nyt liv.

Denne form av liv har senere været studert av PAUL BERT, som med held transplanterte en rottehale tilbake til sin eier, efterat den i flere døgn hadde været konserveret hermetisk ved $+ 12^{\circ}$. Og da den franske kirurg OLLIER, hvis eksperimenter den dag idag er mønstergyldige, paaviste, at kaninperiost, der har været opbevaret paa is i 24 timer ved $+ 2^{\circ}$, gir anledning til bendannelse, naar det transplanteres tilbake til dyret, var dette likeledes en demonstration av latent liv hos disse perioststykker.

Jeg kan ikke gaa i detalj ved gjennomgaaelsen av det arbeide, som er gjort paa dette gebet i de forløpne 60—70 aar siden OLLIER og PAUL BERT, men jeg vil nævne de undersøkelser, som er utført med konservering av Thiersch'ske hudlapper utenfor organismen.

WENTSCHER opbevarte Thiersch'ske hudlapper i fysiologiske saltvandsopløsninger av konstant lav temperatur gjennom mange dage og fandt, at transplantation lykkedes i flere tilfælder saavel homoplastisk som

autoplastisk. LJUNGGREN opbevarte sine hudlapper i serum og hadde ogsaa gode resultater, mens ENDERLENS erfaringer med konservering av Thiersch'ske hudlapper ikke var særlig opmuntrende. Muligheten av at holde blodkar overlevende in vitro har faat stor interesse, efterat karsuturen blev utviklet til en praktisk utførbar operation, og CARREL har selv paa-vist, at en kartransplantation kan utføres med godt funktionelt resultat, selv efterat karsegmentet paa is har været konservert gjennom uker og maanedes. Dette vil si, at intimacellernes integritet ikke lider under denne konservering, og at koagulation derfor ikke indtræder efter transplantation.

Imidlertid er al slags fri transplantation, selv om den foregaar direkte uten nogen konservering, basert paa, at det meste av alt dyrisk væv taa-ler en temporær inanition, d. v. s. en avbrytelse av cirkulationen. Tole-rancen er forskjellig for de forskjellige organer og er mindre, jo høiere organisert vævet er. Men at selv menneskehjertet er ganske seiglivet, viser KOULIABKOS opsigtsvækkende eksperiment, hvorunder det lykkedes ham ved artifi-ciel cirkulation at faa hjertet til at begynde at slaa, 20 timer efterat barnet var dødt.

Det er derfor ikke overraskende, at celler, som i visse henseender allerede inden organismen nyder en mere fri og uavhengig tilværelse, som f. eks. de hvite blodlegemer og spermatozoer, kan leve in vitro utenfor organismen gjennom meget lang tid. Allerede RANVIER fandt, at koldblodige dyrs leukocyter kunde opbevares paa is i uker og viste amøboide bevægelser, naar de saa opvarmedes litt. JOLLY har kunnet konservere froskeleukocyter i et helt aar, uten at de mistet evnen til amø-boide bevægelser. FLEIG har vist, at menneskets spermatozoer er ilive efter 5—6 dages ophold paa is, og at de endog taa-ler en avkjøling til -18°C , uten at dette har dødelige følger for dem, og VOLPINO har holdt tumorceller levende i serum i flere dage utenfor organismen ved legems-temperatur.

Disse undersøkelser, saa interessante de er, hadde dog ikke rukket længer end til at konstatere muligheten av en overleven av celler in vitro. Proliferation av celler utenfor organismen hadde ingen set, saa-længe man anvendte serum eller Ringers væske som konserveringsmid-del. Multiplikation av celler utenfor organismen, d. v. s. virkelige kulturer av væv in vitro, blev først mulig, efterat man fandt paa at anvende lymfe som medium.

Metodens far er den med nervesystemets embryologi beskæftigede amerikaner ROSS HARRISON. Han paaviste for 8 aar siden, at der fra smaastykker av medullarrøret av 2 dage gamle froskeembryoner vokste ut

lange, tynde traade, naar disse smaastykker lagdes i koagulerende froskelymfe, og han tydet disse traade, uten at farve præparaterne, som aksecylindre.

HARRISONS vellykkede forsøk med kultur av koldblodige dyrs nervesystem var indtil 1910 neppe paaagtet utenfor embryologernes snævrere kreds. Da blev CARREL opmerksom paa det og saa, hvilke rike muligheter dette gav for studiet av cellers og organers manifeste liv utenfor organismen. Han sendte derfor sin elev BURROWS til HARRISON for at studere hans undersøkelsesmaate.

BURROWS erstattet HARRISONS lymfe med blodplasma, og CARREL og BURROWS utviklet det Harrisonske princip til en metode for kultur av varmblodige dyrs væv i sin almindelighet og aapnet derved et vidt felt for studiet av cellemorfologi og cellefysiologi.

I 1910 lykkedes det CARREL og BURROWS at dyrke forskjellige væv av voksne pattedyr in vitro. En saadan kultur bestaar av plasmatisk medium, hvori er implantert smaa stykker av levende væv; fra disse foregaar en aktiv vekst av celler ut i plasmaet omkring det oprindelige stykke. Bindevævsceller og epitelceller vandrer ut i plasmaet i stort antal og undergaar her delinger, hvori karyokinetiske figurer er hyppige. Det varer dog kortere eller længere tid efter implantationen, inden denne celleemigration fra vævstykket begynnder. Fra stykker av milt og benmarv kan den sees allerede efter 1 time, mens andre væv fra voksne dyr har en længere latens-tid, der varierer fra 1 op til 3—4 døgn. Forøvrig er temperaturen av stor betydning, og ett og samme væv har ved 39° en kortere latensperiode end ved 38°. Cellerne lever, vokser og formerer sig i plasmaet i en periode, der varierer mellem vide grænser fra 5—6 dage til 18—20 dage eller mere; men disse celler kan ved anlæggelse av subkulturer i nyt plasma danne grundstokken for nye generationer.

Den tekniske side ved dyrkning av væv in vitro er ganske enkel i sit princip. Men skal der opnaaes sikre og indbyrdes overensstemmende resultater, der kan anvendes til komparativt biologisk studium, kræves der et vel utstyret laboratorium, god hjælp og konsekvent gjennomførelse av visse tekniske detaljer.

Først og fremst er en nøiagtig aseptik en betingelse for vellykkede præparater, da bakteriell infektion selvsagt kompromitterer vævenes liv. Og kulturernes bør anlægges i et varmt, fugtigt operationsrum med samme omhu som en delikat kirurgisk operation, da vævene, og særlig gjælder dette nervevæv, let dræpes ved indtørring, avkjøling eller haardhændt behandling.

Dyrene opereres i æternarkose. Plasma skaffer man sig ved at samle

op blod fra en av dyrets karotider efter en metode, der først er angit av DELEZENNE. Blodet strømmer gjennom en glaskanyle, der forut er steriliseret i olje, ned i parafinerte, isavkjølte glas. Disse centrifugeres kraftig i 4—5 minutter under isavkjøling, hvorved plasmaet skiller sig fra blodlegemerne.

Paa denne maate kan plasma holdes flytende noksaa længe. Hvis blodet paa sin vei fra arterien til den parafinerte tube ikke er tilblandet vævssaft, kan plasma av kaniner, katter og hunde holdes flytende paa is i timer og hønseplasma endog i uker. Marsvinplasma koagulerer derimot raskt trods al forsigtighet.

De vævsstykker, som skal dyrkes, maa være i god kondition, og bedst tages de direkte fra et levende dyr. Fra dette bringes stykket over i Ringers væske av legemstemperatur og dissekeres i et urglas med kataraktkniv og en naal til stykker av størrelse som et knappenaalshode, og føres med naalespidsen over paa et stort dækglas, hvor der allerede er anbragt en draape flytende plasma.

Bragt i forbindelse med væv og glasplaten koagulerer nu plasma-draapen næsten straks. Dækglasset vendes rundt, sættes paa et uthulet objektglas, der forsegles med parafin, og det hele gaar i en termostat av 38° — 39° C.

Til iagttagelse av de voksende kulturer anvendes et mikroskop, der staar i en termostat av samme temperatur; hit kan de uten fare for livet flyttes naarsomhelst og observeres, saalænge man ønsker.

Efter CARRELS og BURROWS' første eksperimenter med dyrkning av væv in vitro har deres metode været anvendt av flere undersøkere i forskjellige øiemed (LAMBERT og HANES, LEWIS og LEWIS, RUTH, BRAUS, INGEBRIGTSEN, HADDA, OPPEL, LOEB og FLEISCHER, WHIPPEL og McWHORTER, CHAMPY, WALTON og EBELING), og vævskultur-metoden har allerede git resultater, som er av betydelig interesse i den almindelige cellebiologi. Men den har ogsaa været gjenstand for kritik, og kritikken har særlig været vaaken i Frankrige. Her paastod JOLLY allerede i 1910, at hvad CARREL hadde opnaadd, ikke var kultur av væv, men kun nekrobiose og overleven av nogen faa celler.

Senere har CHAMPY, som selv har arbeidet med metoden, og hvis dom derfor er av større interesse, diskutert, hvorvidt man ved CARRELS og BURROWS' fremgangsmaate virkelig kan dyrke væv. Det er saaledes efter CHAMPY uberettiget at si, at der dannes nyretubuli i kultur av nyrevæv. Og CHAMPY fæster isteden opmerksomheten paa den dedifferentiation, som finder sted blandt de i plasmaet voksende celler, idet de mister sine opriindelige karakterer og antar et indifferent utseende. Som resultat av sine

sidste undersøkelser av 1914 meddeler imidlertid CHAMPY noget andet. Han har nemlig fundet, at naar man dyrker vævsstykker, som er sammensat av epitel og bindevæv — og det gjør man jo ufrivillig ved dyrkning av alt epitelialt væv — saa observerer man ingen dedifferentiering, men epitelet danner med bindevævet saa at si et elementært organ.

Det av CHAMPY diskuterte spørsmåal har jeg selv allerede før ham gjort til gjenstand for undersøkelser og skal derom bemerke følgende:

At skjelne mellem celleemigration og cellemultiplikation i en kultur kan være vanskelig, da saagodtsom alle celler viser amøboide bevægelser i plasma; ja dette gjælder endog de høit differentierte celler fra cornea. Direkte iagttagelse av delinger og mitoser beviser naturligvis celleformering; men deri har CHAMPY ret, at man ikke kan tale om dyrkning av væv, medmindre der i plasmaet virkelig dannes nyt væv av og omkring det oprindelige stykke. Et saadant væv av indifferent eller bindevævsagtig natur nydannes som regel ved anlæggelse av plasmakulturer fra de fleste organer hos voksne dyr. Jeg fandt det saaledes i kulturer av milt, benmarv, hypofyse, gl. thyreoidea og peritoneum fra voksne katter, kaniner og marsvin. I de fleste kulturer kommer der ikke mere ut av det end dette bindevæv, hvis matriks er det i organet forekommende bindevæv. Men i et litet antal kulturer ser man noget andet. Fra gl. thyreoidea nydannes saaledes solide sammenhengende masser av celler, der har epitelnatur, og disse ordner sig i brede kolonner, der antyder begrænsning av alveollignende hulrum. Dette er saa karakteristisk for det i plasma voksende thyreoidea-epitel, at man ikke nøler med at gjenkjende det fra kultur til kultur.

Og for kulturer av hypofysens forreste lap er Eiffeltaarn-lignende kolonner av tætliggende, epitellignende celler, som vokser ut i plasmaet, saa karakteristiske, at man ogsaa her er fuldt berettiget til at tale om kultur av specifikke celler, d. v. s. dyrkning av væv.

I kultur av nyrevæv har CARREL observert vekst epitelcellekolonner, der ligner nyretubuli.

I kulturer, hvor saadanne for organet karakteristiske celleproliferationer forekommer, har jeg ikke set nogen dedifferentiation av disse celler i 1ste generation. Men jeg har ikke anlagt subkulturer. Og det er meget rimelig, at den av CHAMPY omtalte dedifferentiation vilde indtræffe, hvis disse epitelceller fik vokse i nogen generationer.

Heller ikke kan jeg bekræfte CHAMPYS iagttagelse av det i kulturerne voksende bindevævs indflydelse paa epitelet. I mine kulturer har det stik motsatte forhold været tilstede. I de kulturer, som viste rikelig vekst av bindevæv, kom der ingen eller sparsom epitelproliferation, og de

specifikke celler vokset kun ut i kulturer med ubetydelig eller ingen bindevævsnydannelse. Hvilke faktorer der bestemmer, om det ene eller andet væv skal vokse, kjender vi jo ikke, og vi kan herom kun gjøre os den nærliggende forestilling, at de kulturer, der viser vekst av specifikke celler, sandsynligvis anlagdes og levet under de gunstigste vilkaar, hvori mange smaa detaljer spiller ind. Men av mine undersøkelser fremgaar tydelig, at der er et motsætningsforhold mellem vekst av specifikke celler og bindevævsceller i plasma, saa at vekst av bindevæv saa langt fra at begunstige epitelproliferation snarere hindrer den. Det samme har jeg fundet ved dyrkning av nervevæv, hvad jeg senere kommer tilbake til; i kulturer med rikelig bindevævsproliferation er der ingen eller sparsom vekst av nerver og glia-væv.

CARRELS og BURROWS' metode for dyrkning av væv har nu været prøvet saa vidt, at man vet, hvad den kan yde, og den har overvundet det første stadium av reservert mottagelse. Dette skyldes ikke mindst CARRELS opdagelse, at embryonale bindevævsceller kan holdes ilive in vitro og der multipliceres i det uendelige.

CARREL fandt først, at cellernes fortsatte liv i subkulturer var avhengig av tilstedeværende vævsekstrakt i det plasmatiske medium. Den 17de januar 1912 implantertes et litet stykke av et kyllinghjerte i plasma tilsat med litt vævsekstrakt. Fra stykket vokset ut talrike bindevævsceller. Hver 2den eller 3dje dag blev et litet stykke plasma indeholdende bindevævsceller resecert ut av kulturen, vasket i Ringers væske og overført til nyt plasma. I juni 1913 meddelte saa CARREL, at denne stamme bindevævsceller hadde levet i 18 maaneder in vitro og gjennomgaat mer end 190 passager. De 18 maaneder hadde ikke indvirket paa dette bindevævs vitalitet, det var ikke ældet, for dets proliferationsenergi var mindst like stor, om ikke større, end ved uttagelsen fra embryo ved 1ste gangs implantation, og den mængde væv, som var producet fra det lille stykke i de 18 maaneder, var meget stor. Disse forsøk viser til evidens, at metoden muliggjør virkelig *dyrkning* og *nydannelse* av *levende væv* utenfor organismen, og der kan ingen indvendinger reises mot CARRELS uttrykk: »cellules vivent et se multiplient indéfiniment dans leur milieu de culture comme des microbes,» — hvis teoretiske mulighet han har bevist ved praktiske forsøk.

Siden HARRISONS grundlæggende eksperimenter i 1907—10 har BURROWS, LEWIS og LEWIS, MARINESCO og MINEA og INGEBRIGTSEN arbeidet med dyrkning av nervevæv utenfor organismen. HARRISON viste ved en lang række eksperimenter, at embryonalt froskevæv gjennomgaar en normal ut-

vikling i løpet av et langt tidsrum, efterat det er transplantert til koagulerbar lymfe. Fra det isolerte centralnervesystem av et froskeembryo transplantert til koagulerbar lymfe paa et trin av utviklingen, da det periferes nervesystem endnu ikke er anlagt, vokser der lange nervefibre ut i plasmaet. Disse fibre vokser gjennom fibrinnetverket ved sine egne selvstændige amøboide bevægelser i den frie ende, der er litt fortykket og forsynet med fine pseudopodier. Den længste fiber blev 1,15 mm. i løpet av 53 timer. HARRISON slutter herav, at da nevroblasterne er istand til at danne primitive nervefibre i et fremmed og uorganisert medium, er det derved bevist, at de er de eneste elementer, der er av betydning ved anlæg og dannelse av nerver, og han indtar paa dette grundlag sin plads som forkjæmper for utvoksningsteorien. Motstandere av denne (HENSEN, HELD, SCHAEPP) har kritisert HARRISONS arbeide. HELD indrømmer dog, at de av HARRISON observerte fibre virkelig er nervefibre, og likeledes at hans eksperimenter illustrerer den elementære betydning av de His'ske nevroblaster for de derfra utvoksende dele av nervevævetts specifikke substans. — HARRISON har i sit arbeide av 1910 besvaret de fremkomne indvendinger og har imøtegaat kritiken med overbevisende argumenter. Han fremhæver dog det ønskelige i at kunne farve nervefibrene med specifikke farver.

Det lykkedes BURROWS, som i 1911 dyrket nervefibre fra medullarrøret av unge kyllingembryoner i hønseplasma og farvet neurofibrillerne med reducert sølvnitrat. LEWIS og LEWIS har dyrket sympatiske nervefibre fra kyllingembryoners tarmer i forskjellige saltopløsninger. De frie ender av de utvoksende traade viste amøboide bevægelser, mens de krøp langs undersiden av dækglasset i den hængende draape. Fikserte og farvede præparater (Heidenhains jernhæmatoxylin) viste neurofibriller.

MARINESCO og MINEA har beskæftiget sig med dyrkning av spinalganglier fra unge katter og kaniner i plasma. De observerte vekst av nervefibre, som farvedes med sølvnitrat. De nydannede fibre beskrives dels som forlængelser av gangliecellerne, dels som pericellulære netværk og plexus.

Mine forsøk med dyrkning av nervefibre in vitro paabegyndtes i New York 1912.

Jeg begynte med at dyrke stykker av medullarrøret av 2—3 dage gamle kyllingembryoner i koagulert hønseplasma, og i nogen faa kulturer (5 av 102) fandtes, at der efter 10—24 timer vokste ut tynde traade med en opsvulmet fri ende, som ved amøboide bevægelser bevæget sig gjennom plasmaet og efterhaanden forøket traadens længde. Desuten forekom der i alle kulturer en rik prolifération av embryonalt bindevæv, og

dette var muligens grunden til, at de tynde traade ikke kunde vokse ut; som allerede nævnt foran hindrer nemlig bindevævsproliferation utvikling av det mere differentierte væv. Jeg begyndte derfor med at dyrke stykker av centralnervesystemet fra kyllingembryoner fra et senere utviklingstrin og fandt, at der fra samtlige stykker av hjernebarken av 6—7 dage gamle kyllingembryoner vokset ut tynde protoplasmatiske traade.

Kulturerne anlagdes paa vanlig maate som beskrevet foran og dyrkedes i termostat av 39°. Jeg skal nu beskrive de vekstfænomener, der findes i kultur av hjernebarken fra 6—7 dage gamle kyllingembryoner.

Efter 10—18—24 timer sees et antal ganske tynde, slanke, lysbrytende traade vokse ut fra hjernestykket. Disse traade bestaar av hyalint utseende protoplasma uten granulation eller anden synlig struktur. De er av ensartet tykkelse — fra $\frac{1}{2}$ op til 1μ . I hele sin utstrækning er de bøiet og let slynget i forskjellige retninger. Efter 24 timer er de fleste av dem vokset til en længde av 250—300 μ og enkelte endog til 400 μ . (Fig. 15.) Flere av disse tynde traade ender i en liten opsvulmning, der oftest er av regulær ovoid form og maaler $2-2\frac{1}{2}\mu$ i tversnit. Enkelte av traadene ender i en spids og nogen faa i en liten uregelmæssig klump, der er forsynet med fine pseudopodier, som viser amøboide bevægelser; ved hjælp av disse kryper traaden frem gjennom fibrinnettet og tiltar i længde.

Av disse traade kan der i hver kultur være nogen ganske faa, eller de kan gro saa tæt, at de danner et fuldstændig fletverk omkring hjernestykket. Nogen faa av dem har forgrenet sig allerede efter 24 timer.

Efter 48 timer er disse fibre øket i længde og tykkelse. (Fig. 16.) En del av traadene er nu op til 1 mm. lange og en av dem 1,1 mm. Nogen av de tykkeste viser tydelig fibrillær stripning i det mest centrale avsnit (nærmest hjernestykket), og længer ute er de forsynet med smaa varikøse opsvulmninger. Disse er av forskjellig form og størrelse. De fleste er ganske smaa og noget uregelmæssige, men andre er ovoide og ligner meget den terminale opsvulmning; men intetsteds sees, hverken i disse protoplasmaansamlinger eller i forløpet av traaden forøvrig fra begyndelsen til enden, antydning til noget, der ligner en cellekjerne; protoplasmaansamlingens mængde blir aldrig saa stor som de mindste cellekerner. Alle dannes av hyalint, glasklart, lysbrytende protoplasma. Forgreninger av de tykkeste fibre er i dette stadium ret hyppige, og enkelte av fibrene danner anastomoser indbyrdes. Disse anastomoser kommer istand paa den maate, at 2 fibre, der under sin vekst nærmer sig til hinanden, til slut smelter sammen til 1 fiber.

Efterat dette er skedd, fortsætter fiberen at vokse i længden, og det er herunder ikke mulig at se nogen længdespaltning, der kan antyde, at den indeholder 2 traade. Den er tilsynelatende solid og hel, men kan rigtignok senere i sit forløp, som de andre fibre, deles op i 2 eller flere grene.

Naar kulturen er blit 2 døgn gammel, begynder ogsaa andre vekstfænomener at gjøre sig gjældende. Langs randen av hjernestykket findes nu celler av embryonal bindevævsagtig natur med amøboide bevægelser, dels isolerte dels liggende sammen i bundter. De er protoplasmarike, sterkt granulerte og indeholder en stor, klar kjerne. For det meste er de avlange eller ovale og sender gjerne ut 1 eller 2 lange, avsmalnende, granulerte utløpere.

Paa den 3dje dag tiltar de lysbrytende, kjerneløse, tynde protoplasma-fibre yderligere i længde, og den længste blir 1,25 mm. Den 4de dag er der liten forskjel; fibrene faar fra nu av tildels et granulert utseende, og deres lysbrytende evne avtar, saa de blir utydelige. Fra den 5te og endnu mere paa den 6te dag iagttages den eiendommelighet, at traaden er blit kortere. Dette gaar for sig paa den maate, at de mest terminale avsnit opløses og svinder bort, efterat protoplasmaet har gjennomgaat et stadium av sterk granulering. De nærmest gangliecellen (hjernestykket) liggende avsnit holder sig længst, men efter den 7de dag er der heller ikke av disse noget tilbake.

Jeg dyrket nu stykker av hjernebarken fra kyllingembryoner av forskjellig alder. De netop beskrevne fibre vokset ut i et stort antal av kulturene; og som det sees av omstaaende tabel (s. 34), gav 6—10 dage gamle kyllingembryoner det største antal vellykkede kulturer, nemlig 100 $\frac{0}{10}$. Forøvrig viser tabellen ingen bestemt relation mellem embryonets alder og mere eller mindre rik vekst av traade, uten netop hvad foran allerede er nævnt, at de yngste embryoners centralnervesystem ikke gav saa rik vekst av traade som embryoner fra et senere utviklingstrin, d. v. s. fra 6te og 7de dag.

Vekst av de protoplasmatiske traade fra hjernebarken av kyllingembryoner fra et senere utviklingstrin viste i det store og hele de samme karakteristika som netop beskrevet for kulturer fra 6—7 dage gamle embryoner. Der var heller ikke nogen paatagelig forskjel i den hurtighet, hvormed traadene vokset ut. I en av kulturene fandtes et billede, som i enkelte henseender avvek fra det vanlige. Kulturen var fra hjernebarken av et 18 dage gammelt hønseembryo. (Fig. 17.) Den 3dje dag var der vokset ut et stort antal tyndere eller tykkere protoplasmatraade, som forgrente sig og anastomoserte indbyrdes, saa der dannedes et netverk. Disse traade

var i sit forløp her og der utstyrt med protoplasmaopsvulmninger, der var større end nogen av de tidligere iagttagne. Det var homogene, lysbrytende kuler med en tverdiameter op til $4-5\mu$, som laa i traadens forløp, saa at denne gikk ind i kulens ene pol og ut den anden. Undertiden var de litt avlange, ellipsoide, med en form, som sterkt mindet om smaa bipolare gangliaceller. Men da de var ganske homogene uten kjerne eller granulationer, er jeg sikker paa, at det ikke var celler. Jeg betrakter dem som protoplasmaansamlinger analoge med den terminale opsvulmning, og likesom denne danner de utgangspunktet for nye fibre.

Kulturer av hjerne fra kyllingembryoner av forskjellig alder.

Embryonets alder.	Antal av anvendte embryoner.	Antal av kulturer.	Antal kulturer i hvilke protoplasmafibre var tilstede.	Procent av kulturer med vekst av protoplasmafibre
2 dage	4	19	2	10,5
3 "	10	83	3	3,6
6-10 "	5	32	32	100,0
11-15 "	6	65	49	75,3
16-21 "	8	53	37	69,8
		252	123	

Efter at ha fundet disse vekstfænomener fra hjernebark av kyllingembryoner begyndte jeg at dyrke dele av centralnervesystemet fra unge pattedyr. Kaniner, katter, hundehvalper og marsvin blev prøvet, idet der fra disse dyr kultivertes stykker fra cortex cerebelli og spinalganglier. Nogen faa kulturer anlagdes ogsaa fra cortex cerebri og rygmarven.

Tekniken for dyrkning av nervevæv fra pattedyr er den vanlige. Men operationen maa foregaa i et hurtigere tempo. For kultur av cortex cerebelli gjælder det, at 12-15 sekunder er den længste tid, som tør forløpe, fra hjernestykket er uttat av dyret, til det er anbragt i plasma og sat i termostat, mens spinalganglierne er mere robuste og taaler en litt længere inanitionsperiode, uten at deres nerveceller skades saa meget, at kulturforsøket mislykkes; dog gjælder det ogsaa for disse om sekunder.

Fra spinalganglier av unge kaniner og 6 uker gamle katter vokste der ut i plasmaet lange protoplasmatraade i en del av kulturerne. (Fig. 18.)

Men bedst resultat havde jeg i kulturer av spinalganglier av 2—8 dage gamle marsvin, som av bekvemmelighetshensyn dyrkedes i plasma fra marsvinungens mor.

Utvikling av nervefibre i saadanne kulturer er langsommere end den, man observerer i kultur av embryonalt nervevæv. Først efter 2 døgn ser man ganske tynde og jevne lysbrytende protoplasmatraade, der er forsynt med en liten opsvulmning i spidsen, vokse ut i plasmaet fra spinalgangliet. I begyndelsen er de rette, men snart begynder de under sin vekst at slynge og bugte sig fremover i smukke buelinjer.

Efter 24 timer (d. v. s. 3 døgn efter kulturens anlæggelse) er de allerede fra 150—170 μ lange og har nu gjerne avsendt en eller 2 smaa sidegrene. Fibrillerne er absolut cylindriske og jevne med samme diameter i hele sit forløp helt ut til den terminale opsvulmning. I løpet av de følgende 2—3 døgn tiltar de yderligere i længde, men beholder sin tykkelse uforandret.

Nu er der imidlertid fra 3dje døgn kommet en rik vekst av bindevæv fra spinalgangliet. Mange av disse bindevævsceller har lange protoplasmautløpere, og de kan ogsaa smelte sammen til lange cellebaand. Man vil da spørre: Er der noget, som skiller nervefiberen fra de bindevævsagtige protoplasmautløpere? Ja, forskjellen er saa fundamental og iøinefaldende, at den med lethed konstateres av en iagttager, som ser dette billede i mikroskopet for første gang. Bindevævscellernes utløpere naar for det første ikke nervefiberens længde; dog er dette et mindre væsentlig træk. Vigtigere er det, at bindevævscellernes utløpere er 2—3 gange tykkere end nervefiberen; de er ujevne, grove, granulerte og altid avsmalnende ut mot spidsen, mens nervetraadens diameter er ens, jevn cylindrisk. Desuten ser man i en bindevævscelles utløper altid et eller andet sted i dens forløp en kjerne — der i levende præparat viser sig som en blank, lysbrytende, oval blære, omgitt av det granulerte protoplasma, mens nervefiberen har sin gangliecelle liggende i spinalgangliestykket — enten like i randen ut mot plasmaet, saa den kan sees uten farvning, eller den ligger et litet stykke indenfor randen og kan da enten ikke sees, eller man kan skjelne den efter fiksation og farvning.

Foruten de ganske jevne og cylindriske fibriller, der utgjør det overveiende antal, har jeg i enkelte kulturer av spinalganglier fundet fibrillerne utstyrt med smaa uregelmæssig dannede ovale eller runde varikositeter, der sitter paa fibrillen med større eller mindre mellemrum. Fibrillen har mellem disse protoplasma-varikositeter det samme jevne, cylindriske utseende, og man er ikke i tvil om, at den trods disse varikositeter er av samme oprindelse og natur som de ganske jevne fibriller.

Naar fibrillerne er 3—4 dage gamle, stanser deres vekst. I løpet av denne tid har mange av dem naadd en længde paa 5—6 μ maalt i ret linje fra spinalgangliets rand ut til traadens endepunkt; men i virkeligheten er fibrillerne paa grund av sine mange bøininger adskillig længere. — Fra 3dje og 4de dag sees smaa granulationer i fibrillernes indre. For at være sikker paa, at disse hyaline traade, der vokser ut fra spinalganglier, virkelig er nervefibre, og for at studere deres utgangspunkt i detalj var det nødvendig at farve dem. Efter mange forsøk fandt jeg, at Helds pyridin-metode var den eneste brukbare til fiksation av kulturerne, og Cajals sølv-impregnation til farvning av de unge fibriller.

1. Fiksation i 50% pyridin-opløsning i 6 timer.
2. Fiksation i konc. pyridin i 12 timer.
3. Skylles i aq. destill., saa at pyridinet borttages.
4. Behandling med 90% alkohol i 24 timer.
5. Impregnation i 1,5% sol. nitrat. argent. i termostat i 5 døgn.
6. Reduktion i 1% opl. av acid. pyrogall. med 10% formol.
7. Deshydrering, xylol. Canadabalsam.

Pyridinet danner intet præcipitat i plasmaet — og med sølv farves fibrene sorte eller mørkt brune og er lette at studere mot den lyst rød-brunlige farve, som plasmaet antar. For at være helt sikker paa, at jeg fik farvet akkurat de traade, der i den levende kultur var opfattet som nervefibriller, og for at skaffe mig et objektivt bevis for dette, gik jeg frem paa følgende maate. Fra den levende, 4 dage gamle, kultur tegnet jeg nervefibrillerne ved hjælp av tegneokular og objektiv nr. 6. Kulturen blev derpaa fiksert og sølvimpregnert. Efter farvning blev den paany reproducert ved samme tegneokular og objektiv nr. 6. Og det viste sig nu, at fiberen i de 2 tegninger dækket hinanden i hele sit forløp. Nogen feiltagelse er derfor utelukket.

De fleste av spinalgangliekulturerne blev fiksert og farvet efter 4—5 dages ophold i termostat, d. v. s. naar fibrillerne var 2—3 dage gamle, for at være sikker paa, at degenerative forandringer ikke var indtraadt.

I vellykkede præparater ser man, hvorledes fibrillerne i plasmaet har vokset ut som en direkte fortsættelse av fibre i spinalgangliets netværk. Eller de vokser ut fra konglomerater av ganglieceller, der ligger i kanten av stykket. De allerfleste fibre viser sig efter sølvimpregnation som jevne, cylindriske, mer eller mindre bugtede, sorte, ikke granulerte traade av jevn tykkelse. Enkelte forgrener sig en eller flere gange. De fleste ender i en spids, andre i en liten opsvulmning, der enten er trekantet eller ovoid.

I et av præparaterne (fig. 19) ender de fleste av dem i en oval opsvulmning, og disse fibriller er med visse mellemrum temmelig rikelig besat med spolfornede eller runde varikositeter. De varikøse opsvulmninger har efter sølvimpregnation en ganske svagt granulert struktur, og centrum er litt mørkere farvet end periferien. Fibrillerne i dette billede minder i sin helhet, som i detaljer, paa faldende om regenerationsfænomenerne fra aksecylindrene i den centrale stump av en overskaaret nerve. (Fig. 19—22.)

Ingen av nevrofibrillerne anastomoserer indbyrdes.

Mens vekstfænomenerne fra spinalganglier er relativt enkle, og billederne nok saa lette at tyde, da her kun vokser ut bindevæv og nervefibre, gir kulturer av cortex cerebelli med det prolifererende gliavæv mere kompliserte strukturer. Siden min første publikation om vekst av nervefibre fra cortex cerebelli har jeg studert saadanne kulturer nøiere, og i den fremstilling, jeg nu skal gi, kan jeg supplere min første meddelelse av 1913 og paa enkelte punkter modificere den opfatning, jeg da kom til.

Den rikeste vekst av fibre observertes fra cortex cerebelli fra ganske unge hunde (4—5 uker gamle). I alle de 10 kulturer, som anlagdes fra cerebellum av saadanne hunde, kom der livlig proliferation. Fibrene begynte at vokse allerede efter 24 timer i termostat. Saagodtsom alle hadde en stor oval endeopsvulmning, som ved fine pseudopodier krøp i spidsen under traadens vekst, hvorunder den snodde sig frem gjennom plasmaet. (Fig. 25—27.) Traadene var rikelig utstyrt med varikositeter, og mange av dem hadde forgrent sig og anastomosert med nabofibre allerede efter 48 timer. Efter 2 og 3 dage er fibrene tiltat i tykkelse, og enkelte av dem viser en fin, fibrillær struktur. Varikositeterne derimot er ganske homogene og har en diameter op til 4—5 μ . Efter 5 dage i termostat var den længste av fibrene 0,9 mm. Fra nu av viste de tegn paa degenerative forandringer i form av fine granulationer, der først optraadte i varikositeterne og senere ogsaa mellem disse. Fibrenes rande blev utydelige og likesom anspist, og efter 7—8 dage var de helt forsvundet.

Fra cortex cerebelli av 2—6 dage gamle marsvin og unge katter vokste der ogsaa fibre ut i plasmaet i en del kulturer. En del av dem dannet anastomoser, andre ikke. Bedre end nogen beskrivelse fremgaar deres utseende av vedføjede illustrationer. (Fig. 23—24.)

Hvad slags fibre er nu dette? At det skulde være bindevæv, er utelukket. Voksende bindevæv ser ikke saaledes ut. Først paa den 3dje dag — naar fibrene allerede har naadd en betydelig længde — kommer der i enkelte kulturer en ganske sparsom emigration av bindevævsceller langs randen av hjernestykket — en enkelt celle hist og her.

Er det da nervefibre eller glia-protoplasma eller begge dele? I min første meddelelse om disse kulturer tydet jeg dem uten at ha farvet præparaterne som nervefibre. Senere undersøkelser av farvede præparater har vist, at kun en del av fibrene er nervefibre, mens det overveiende antal er *gliasyncytium*.

I sølvimpregnerte kulturer av cerebellum findes følgende billede:

Hjernestykkets netverk av sortfarvede nervefibre sees tydelig i dets perifere tynde dele, der grænser ut til det omgivende plasma. (Fig. 23.) Og i enkelte præparater sees de nye i plasmaet utvoksede fibre at danne den direkte, ubrutte forlængelse og utvoksning fra en av hjernestykkets fibre. Dette anser jeg som bevis for den nytvokste fibers nervøse oprindelse; denne nervefiber er vokset ut av hjernestykket gjennom plasmaet ved amøboide bevægelser i en terminal opsvulmning. I enkelte sølvfarvede præparater sees denne terminale opsvulmning meget godt; den har gjerne en litt lysere brun farve end fiberen forøvrig og har rund eller ovoid form med en diameter paa et par μ .

Denne endeknop findes ikke i alle sølvfarvede præparater; undertiden ender fiberen i en spids, og i ett præparat ender fiberen vistnok i en liten knop, men den dannes sandsynligvis ved en minimal slyngning av traadens ytterste ende. I sit forløp er disse fibre enten jevnt cylindriske, eller de er forsynt med smaa varikositeter. (Fig. 24.) Ingen av dem anastomoserer indbyrdes. I et av præparaterne er det ikke mulig at se fiberens forbindelse med hjernestykket ved overgangen i plasma — sandsynligvis fordi den her er dækket og omgitt av rikelig prolifererende protoplasma av anden natur — der, som jeg haaber at kunne vise, er glia-syncytium. (Fig. 25.)

I sølvfarvede præparater har dette et utseende, som sterkt avviker fra de netop beskrevne nervefibre. Forskjellen træder tydelig frem paa vedføjede tegning, som bedre end ord viser syncytiets struktur. (Fig. 25.) Disse traade, som ogsaa var vokset ut i plasmaet ved amøboide bevægelser i en terminal protoplasmaknop og dernæst blev fiksert og farvet, før der var indtraadt degenerative forandringer — viser efter sølvimpregnation et netverk av anastomoserende, tykke, grove, sterkt kornede traade; de enkelte korn er sorte, av litt varierende størrelse og hænger ikke sammen indbyrdes, saa fiberen, trods det, at den i levende live ikke var degenerert, efter sølvbehandling viser et utseende, der minder om henfaldne nervefibre.

At dette netverk av kornede, anastomoserende protoplasmatraade dog ikke er nervefibre, fremgaar av den fundamentale forskjel mellem deres struktur og de fibre, som vi efter det foregaaende *vet* er nervefibre. Dette netverk er heller ikke bindevæv, og per exclusionem kommer man til, at det er gliavæv. Nogen 4de mulighed gives nemlig ikke.

Denne opfatning av de anastomoserende fibres natur støttes ved et præparat, som er reproducert i vedføjede tegning. (Fig. 26.) — Denne er utført paa grundlag av 3 fotografier av en 3 dage gammel sølvfarvet kultur av et stykke cerebellum fra en katunge. De 3 fotografier er tat med 3 forskjellige indstillinger langs forløpet av de anastomoserende protoplasma-fibre, der er vokset ut i plasmaet fra en stor celle i cortex, og helt ut til deres ytterste forgreninger og endepunkt i plasmaet. Tegningen repræsenterer en kombination av de 3 fotografier og gjengir detaljer i præparatet, som ikke er kommet frem i fotografierne. Den store sølvimpregnerte celle er efter al sandsynlighet, ja, jeg tør vel si med den grad av visshet, hvormed man overhodet tør gjøre histologiske identifikationer — en nevro-gliacelle, og fotografierne demonstrerer, hvorledes der fra denne er vokset ut i plasmaet tykke protoplasmatraade, der anastomoserer indbyrdes og med andre nabofibre og danner et syncytium av gliavæv.

Dette netverks struktur faar man bedst indtryk av i hæmatoxylinfarvede præparater, hvori syncytiet fremtræder uten det kornede nedslag, som sølvimpregnationen foraarsaker. (Fig. 27.)

Mine undersøkelser av farvede kulturer har vist, at der fra stykker av cortex cerebelli av ganske unge pattedyr vokser ut nervefibre og gliavæv. Nervefibrene er faa, oftest isolerte, som regel jevne, cylindriske, sorte, tynde, undertiden varikøse fibre, der vokser ved amøboide bevægelser i en terminal protoplasmaansamling. De danner aldrig anastomoser indbyrdes.

Nevroglia derimot danner et rikelig netverk av tykke indbyrdes anastomoserende traade, der ogsaa vokser ved amøboide bevægelser i en terminal protoplasmaklump.

Den prægnante forskjel mellem de 2 slags væv, som sees i sølvimpregnerte præparater, har det ikke været mulig at konstatere i de levende kulturer. Fibrene er her saavidt like, at de ikke lar sig differentiere fra hinanden. De vokser paa samme maate. Rigtignok er gliafibrene som regel tykkere end nervefibrene, men den eneste væsentlige forskjel, man i levende præparat har at holde sig til, er, at nervefibrene ikke anastomoserer indbyrdes, mens gliavævet danner rikelige anastomoser.

Dette er dog ikke noget tilstrækkelig kjendetegn; det er derfor ikke avgjort, hvad slags fibre det var, som vokset ut i plasmaet fra cortex cerebri av kylling-embryoner. Jeg har ogsaa stillet dette in suspenso, og siden præparaterne ikke blev sølvimpregnert, nøiet mig med betegnelsen protoplasmafibre. Det er sandsynlig, at der blandt disse fandtes baade nervetraade og gliasyncytium.

Mine forsøk med dyrkning av spinalganglier fra unge pattedyr har vist, at der fra periferien av de transplanterte spinalganglier vokser nervefibre ut i plasmaet, og at deres vekst foregaar ved amøboide bevægelser

i en terminal protoplasmaansamling. Fibrene naar i løpet av 2—3 døgn en længde av mere end 600 μ . Efter sølvimpregnation viser de utvokste fibriller i flere tilfælder en struktur og anordning, der paafaldende ligner regenerationsfænomenerne fra aksecylindrene i den centrale stump av en overskaaret nerve. Vi finder her igjen baade vekstkøller — (CAJALS »Cône d'accroissement«) — og varikositeterne, og ved mine dyrkningsforsøk har jeg direkte kunnet observere de amøboide bevægelser i vekstkolberne, der av CAJAL allerede for længe siden forutsattes som det fundamentale princip i unge nervefibres vekst. CAJAL opdaget i 1890 vekstkolberne i enden av embryonale nervefibre, og i 1899 uttaler han sig angaaende deres funktion saaledes: »Vekstkolben maa betragtes som en kølle eller sprængkile, utstyrt med overmaade fin følsomhet, med hurtige amøboide bevægelser og med en impulsiv kraft, der tillater den at presse sig frem og overvinde hindringer, den støter paa, og klemme sig frem i trange cellulære interstitier, indtil den naar sit bestemmelsessted.« Denne skarpsindige opfatning av vekstkolberne, som CAJAL kun støttet paa histologiske iagttagelser, bekræftedes helt ut ved HARRISONS, BURROWS', LEWIS' og LEWIS' eksperimenter for de embryonale nervers vedkommende, og mine forsøk med dyrkning av spinalganglier fra unge pattedyr viser, at denne opfatning av vekstkolberne ikke bare gjælder dem, man finder hos embryo, men vekstkolber som et regenerationsfænomen i nervesystemet i sin almindelighet. MARINESCOS og MINEAS eksperimenter med dyrkning av spinalganglier fra kaniner i plasma resulterte ogsaa i utvoksning av fibre, der i spidsen var forsynet med vekstkolber.

Denne regeneration av nervefibre fra spinalganglieceller er ikke noget enestaaende fænomen. Allerede i 1907 offentliggjorde NAGEOTTE endel overmaade interessante undersøkelser over transplantation av spinalganglier til det subkutane væv paa øret hos kaniner. Ved at undersøke ganglierne nogen tid efter transplantationen (fra 1 optil flere dage) fandt NAGEOTTE, at de fleste av gangliecellerne og særlig de centralt beliggende var døde, mens en del av de perifere hadde overlevet transplantationen, og denne hadde fremkaldt dannelsen av nye protoplasmafibre, der paa flere steder var vokset ut fra gangliecellen, saa at den fra at være unipolar var blit multipolar og hadde antat en komplicert og ofte eventyrlig form.

Disse nydannede fibre har tilbøielighet til under sin vekst at kredse omkring den celle, hvorfra de er utsprunget, og de er i spidsen forsynt med typiske vekstkolber. — Lignende transplantationsforsøk er utført av MARINESCO og MINEA, hvis resultater stemmer overens med NAGEOTTES; disse er ogsaa bekræftet av CAJAL.

Heller ikke de regenerationsfænomener fra cortex cerebelli, som jeg har fundet ved dyrkning i plasma, er uten sidestykke. Rigtignok er der

ikke av andre gjort lignende observationer i plasma. Men CAJAL har fundet regenerationsfænomener fra den centrale ende av gjennemskaarne aksecylindre i hjernebarken hos unge pattedyr.

Hjernebarken incidertes med en skalpel, og dyret dræptes og undersøktes 8 dage senere. Fra de opsvulmede centrale ender (endekuler) av de overskaarne aksecylindre fandtes da, at der avgik 2—3 smaa, fine, divergerende grene, som CAJAL opfatter som regenerationsbestræbelser.

Konklusioner:

Man vil nu spørre: Er det mulig av disse eksperimenter med regeneration av nervefibre utenfor organismen at trække slutninger til nerve-regeneration indenfor den levende pattedyrorganisme?

Inden visse grænser kan man sikkert gjøre det. Vi kan slutte av disse eksperimenter med regeneration av nervefibre fra spinalganglier i plasma, at regenerationsfænomenerne fra aksecylindrene, slik som vi kjender dem fra den levende organisme, og som morfologisk og tinktorielt paa en prik ligner de eksperimentelle nervefibre, er aksecylinder-fænomener *sui generis*, som i ethvert fald *kan* foregaa uten assistance eller mellemkomst av akcesso-riske celler eller væv.

Man observerer nøkne nervefibre, som — befridd for de i organismen tilstedeværende dækkende skeder — vokser ut i plasmaet, kun avhængig av sin gangliacelles proliferationsenergi og det omgivende, døde, men ernærende medium.

Der er efter dette ingen grund til at tvile paa, at regeneration av perifere nerver indenfor organismen foregaar paa samme maate, ved utvoksning fra den centrale stump av den overskaarne nerve, som ved amøboide bevægelser i en vekstkolbe finder vei ut mot periferien.

Har nu disse kulturforsøk vist, hvilke faktorer der bestemmer fibrenes retning?

Den idé, at retningen for vekst og bevægelser indenfor nervesystemet dirigeres av kemotaktiske kræfter, skyldes CAJAL, som i 1892 fremsatte denne hypotese i sit arbeide om retinas histogenese. Senere har den efter FORSMANNS sindrige eksperimenter faat en mere generel applikation paa regenerationer inden nervesystemet i sin almindelighet og er av FORSMANN under navnet nevrotropisme opstillet som forklaring paa de unge utvoksende aksecylindres vekstretning fra den centrale stump av en overskaaret nerve ind i den perifere, som skulde tiltrække dem ved kemotaktiske paa-virkninger. Nu mener MARINESCO og MINEA under sine forsøk med dyrkning av spinalganglier i plasma at ha observert, at *les fibres de nouvelle formation affectent une prédilection pour s'attacher aux corps cellu-*

lares« (conjunctifs?) »et suivre leurs prolongements«. Denne tilbøielighet hos nervefibrene, som ifølge disse forfattere skulde tyde paa en »gjensidig homotropisme«, har andre undersøkere ikke konstatert.

HARRISON forsøkte at influere paa nervefibrenes vekst i plasmaet ved at anbringe smaa stykker av embryonal ektoderm og muskelplater i lymfen tæt op til de fra medullarrøret utvoksende nervefibre. Men der kom ingen av de forventede tegn paa positiv kemotaxis. BURROWS' forsøk i samme retning gav ogsaa negativt resultat.

Heller ikke i mine eksperimenter er der forekommet fænomener, som kunde tydes som nevrotropisme. Tvertimot har jeg, som allerede anført foran, fundet en viss antagonisme mellem vekst av bindevæv og nervefibre.

De regenerationsfænomener fra gliavæv, som fremkom ved dyrkning av cortex cerebelli, skal jeg ikke gjøre til gjenstand for videre kommentarer. Det er mulig, at vævskulturmetoden vil kunne bidra til at kaste lys over gliavævet meget studerte, men endnu ret dunkle anatomi og fysiologi; men undersøkelser i denne retning ligger utenfor dette arbeides begrænsning.

Visse ting av morfologisk interesse ved dette gliasyncytium vil jeg vende tilbake til i næste kapitel.

Kap. 3. Vekstfænomener fra segmenter av perifere nerver ved dyrkning i plasma.

NAGEOTTE har vist, at der i stykker av perifere nerver uttat av det levende pattedyr indtræder de første stadier av den Wallerske degeneration, naar stykkerne anbringes i visse saltopløsninger av legemstemperatur. Processen foregaar som i det perifere segment av en overskaaret nerve indenfor organismen, og fænomenerne er de samme, men de forløper raskere in vitro. Det nødvendige medium er en isotonisk klornatrium-opløsning, som vel at merke desuten maa indeholde en liten mængde salt av et av de bivalente metaller; Ringers eller Lockes væske egner sig udmerket til dette bruk.

NAGEOTTE fandt, at 24 timers ophold i termostat av 37^0 i isotonisk klornatrium-opløsning lot nerverne intakte. Men disse nervefibre var ikke døde. For hvis man efter nogen dage anbringer dem i Lockes væske, som indeholder kalciumklorid, degenererer de paa samme maate, som om de direkte var kommet i denne opløsning.

Jeg har gjentat disse NAGEOTTES forsøk og fundet akkurat det samme. (Fig. 3.) Jeg har likeledes fundet en typisk Wallersk degeneration i nervefibre, som i 24 timer hadde ligget i termostat (37^0 C.) i homologt og heterologt serum, og degenerationens forløp var i disse tilfælder saavel som i Ringers væske meget hurtigere end indenfor den levende organisme.

Byggende paa disse kjendsgjæringer skulde man vente, at en Wallersk degeneration vilde indtræde ogsaa i nervefibre, der efter uttagelsen av organismen anbragtes i *plasma* i termostat av legemstemperatur. Men til min overraskelse fandt jeg, at saa ikke skedde. Forsøkene utførtes paa følgende maate:

Fra en levende kanin uttoges av n. ischiadicus $1\frac{1}{2}$ cm. lange stykker. Nervefibrene dissociertes med naale i Ringers væske. Derpaa blev de straks bragt over i en draape flytende plasma fra dyret selv paa et dækglas. Dette vendtes rundt, anbragtes paa et uthulet objektglas, forsegledes med parafin og indsattes i termostat av 38^0 C. Præparaterne undersøktes

nu fra dag til dag under et opvarmet mikroskop, og ingen forandring bemærkedes i disse fibre — ikke engang efter 10—12 dages forløp. I fikserte og farvede præparater havde fibrene det samme utseende paa den 6te, 7de og 8de dag som paa den 1ste dag.

Jeg forsøkte nu, om degenerationen kunde frembringes ved tilsætning av kalciumklorid til plasmaet, men resultaterne blev de samme. 1 draape av 1 % opløsning av kalciumklorid tilsattes til 5—7 og 8 draaper plasma, og fra hver af disse blandinger tilberedtes med nervefibre en række præparater, som indsattes i termostat.

Som kontrolforsøk tilsattes 1 draape av en 1 % opl. av kalciumklorid til 5—7 og 8 draaper serum og til 5—7, og 8 draaper Ringers væske, og nervefibre anbragtes i termostat i disse forskjellige opløsninger.

I nervefibrene fra kalcium + plasmapræparaterne kom der fremdeles ingen degeneration, mens nervefibrene fra kalcium + serum- og kalcium + Ringers væsketuberne viste den vanlige Wallerske degeneration efter 24 timer.

Nu er det som omtalt i forrige kapitel alt kjendt, at stykker av bindevæv, kjertelorganer, epitel etc., naar de dyrkes i plasma ved legemstemperatur, danner utgangspunktet for celleproliferationer i plasmaet, hvorved der dannes væv, hvis celler undertiden har specifikke karakterer, men som oftest er av indifferent, bindevævsagtig natur. Det var derfor at vente, at der i de netop refererte eksperimenter skulde komme celleproliferationer i plasmaet fra disse nervefibres Schwannske celler eller bindevævs-celler eller fra begge. Men intet av dette fandt sted.

80 kulturer av nervefibre i plasma (fra kaniner) undersøktes fra dag til dag, under deres ophold i termostat av 38°, og ikke i et eneste av disse præparater var der antydning til celleproliferation. De fleste observertes i 14—16 dage; men nervefibre, som i 1 og 2 døgn hadde ligget i plasma i termostat uten at vise forandringer, degenererte paa vanlig vis, naar de derefter anbragtes i Ringers væske av legemstemperatur i 24 timer.

Nu gjentoges disse forsøk med nervefibre, hvori de første antydninger til Wallersk degeneration allerede var indtraadt før implantationen i plasma, paa følgende maate: N. ischiadicus kupertes aseptisk, saaret lukkedes, og efter 24 timer uttoges et stykke av det perifere segment, dissociertes med naale, og nervefibrene implantertes i plasma. 10 kulturer præparertes, og heller ikke fra disse kom der spor av vekst.

En anden forsøksrække paa 32 kulturer præparertes (paa vanlig maate d. v. s. i hængende plasmadraaper i uthulte objektglas) fra det perifere segment av den overskaarne n. isch. 2 dage efter overskjæring. Der ind-

traadte heller ikke her nogen forandring av nervefibrene og ingen vekst indtil den 16de dag i termostat.

12 kulturer tillavedes fra det perifere afsnit av den gennemskaarne n. isch. 4 dage efter overskjæring. Der kom ingen vekst.

Men i en serie paa 36 kulturer av nervefibre fra den perifere del av den gennemskaarne n. isch. 5 dage efter overskjæringen konstateres noget andet. I 30 av disse 36 kulturer indtraadte ingen forandringer, men i 6 kulturer av denne serie fandtes vekst av ensartet og karakteristisk udseende.

Efter 3 og 4 dages ophold i termostat vokste der ud av de overskaarne ender av nervefibrene tynde, lysbrytende protoplasmatraade, der indeholdt ganske fine granulationer. I begyndelsen har de en konisk eller i ethvert fald mot enden avsmalnende form og ender i en spids, hvori sees amøboide bevægelser, ved hjælp av hvilke traaden bevæger sig frem i plasmaet, tilar i længde og efterhaanden faar en mere eller mindre cylindrisk form med en diameter, der er noget mindre end den nervefiber, hvorfra de er vokset ud. De forgrener sig, og fra den 5te dag faar de nye karakteristika, som imidlertid bedst studeres efter fiksatión og farvning.

En del av kulturene blev hærdet i formalin (2%), derpaa farvet i tynd hæmatoxylin. En anden del blev fiksert efter Helds pyridinmetode og derpaa impregneret med reduceret sølvnitrat (efter CAJAL).

Hæmatoxylinfarvede præparater.

Det oprindelige nervesegment er 3—8 mm. langt og op til 1 mm. tykt. I dets 2 ender er de enkelte nervefibre synlige, tydelig adskilt fra hinanden og viser det vanlige billede av Wallersk degeneration fra dette aktuelle stadium (d. v. s. 5te dag). Inde i de Schwannske skeder sees følgende enkeltheder: Myelinellipsoider, der indeholder aksecylinderfragmenter, og i mellemrummet mellem 2 ellipsoider sees en kromatinrik Schwannsk kjerne, der er faldt ind mot fiberens centrum og er omgít av et Schwannsk celleprotoplasma.

Fra den ved uttagningen overskaarne ende av de enkelte nervefibre vokser protoplasmatraade ud i plasmaet som en direkte og ubrutt fortsættelse av det indenfor den Schwannske skede tilstedeværende protoplasma. (Fig. 28.) Dette er tilstrækkelig til at identificere de nydannede protoplasmatraade som utvoksning av det Schwannske protoplasma. I mange av de fibre, som paa denne maate danner udgangspunkt for utvoksende protoplasma, har det snit, som resekerter nervefibrene ud av deres kontinuitet i organismen, passert klods indtil en Schwannsk kjerne, og en saadan oval kjerne

av karakteristisk utseende markerer da enden av den oprindelige nervefiber i kulturen og begyndelsen av den nyutvoksede protoplasmatraad.

I en del nervefibre findes ikke nogen Schwannske kjerner i deres endepunkt; men i disse tilfælder sees den nogen μ længer inde i fiberen.

De nyutvokste protoplasmatraade, som danner den direkte fortsættelse av det perinukleære Schwannske protoplasma, viser, naar de er kommet ut i plasmaet, et ganske svakt granulert utseende. De har en mot enden (spidsen) avsmalnende form og ved sin basis en diameter av ca. 5—8 μ d. v. s. litt mindre end de nervefibre, de er vokset ut av. De forgrener sig i træliggende forgreninger, som er meget tyndere end hovedstammen, og disse ender i en spids eller i en liten rund eller oval eller kantet opsvulmning. I en del av de nyutvokste fibre sees med visse mellemrum en vel begrænset, mørk, kromatinrik kjerne.

Disse kjerner er ovale eller spolformige med sin længste diameter i traadens retning, mens deres korteste diameter som sagt er litt større end traadens tverrdiameter, hvilket resulterer i en tilsvarende varikøs opsvulmning av traaden paa dette sted.

Inde i enkelte traade ligger der 3—4 kjerner i rad og række, den ene efter den anden. Et saadant billede av cellerækker indleiret i en kolonne granulert protoplasma uten nogen begrænsende membran minder meget om indholdet i de Schwannske skeder i en degenererende nerve indenfor organismen 14—15 dage efter overskjæring. Og for at fuldstændiggjøre denne likhet finder man i en del traade inkludert smaa konglomerater av myelin-(fett-)kugler av forskjellig størrelse, varierende fra bittesmaa korn op til størrelsen av en cellekjerne eller litt større, altsammen indleiret i varikøse opsvulmninger av traaden og som oftest sammen med en oval Schwannsk kjerne.

I enkelte præparater anastomoserer disse protoplasmatraade med hinanden indbyrdes og danner saaledes et netformet syncytium.

Efter 6 dages ophold i termostat har traadene tiltat i længde, saa de nu maaler op mot 600 μ . (Fig. 29.)

Sølvimpregnerte præparater. (Fig. 30—31.)

De oprindelige nervefibresegmenter er mørkt brunfarvede og det omgivende plasma lyst gult eller rødlig brunt. De utvokste protoplasmatraade er ganske litet mørkere brune end plasmaet og kan let skjernes mot denne bakgrund. Uten at foregripe noget m. h. t. tydningen av disse præparater vil jeg allerede nu fremhæve, at de nyutvokste protoplasmatraade ikke i et eneste tilfælde har antat den sorte eller mørkt brune farve, som er karak-

teristisk for sølvimpregnerte nervefibre — de være utviklet i eller utenfor organismen.

De sølvimpregnerte præparater viser morfologisk det samme billede som hæmatoxylinpræparaterne.

De nye protoplasmatraade er vokset ut fra de tversavskaarne ender av nervefibrene, hvori ofte sees en Schwannsk kjerne omgit av protoplasma; hvis kjernen ikke ligger ute i fiberens ende, sees den litt længer inde, eller den findes ute i den nyutvokste protoplasmafiber nogen μ fra dens utspringssted.

De nye fibre er av forskjellig tykkelse og maaler ved sin basis ved indtrædelsen i plasmaet fra 2—3 optil 7—8 μ . Herfra avtar de jevnt i tykkelse utover, og under sin vekst i plasmaet gjør de svake bøininger i forskjellige retninger, skjønt hovedretningen som regel ialfald i begyndelsen av dens vekst er den samme som den oprindelige nervefibers længderetning.

Protoplasmatraadene er for det meste av noget ujevn tykkelse, forsynt som de er med større og mindre opsvulmninger. De store varikositeter indeslutter 1 og undertiden 2 ovale kjerner av samme utseende som de Schwannske kjerner, og de smaa dannes ved ansamlinger av granulert protoplasma. En del av de tykkeste fibre deler sig i 2 eller 3 grene, som avgaar fra hovedstammen i spidse vinkler, idet der gjerne paa delingsstedet efterlates en liten opsvulmning av protoplasma. De fineste grene er forsynt med ganske smaa varikositeter, og de ender enten i en spids eller i en liten granulert knop.

I en serie paa 20 kulturer, tillavet av fibre fra den perifere del av en overskaaren n. isch. 6 dage efter overskjæring, fandtes vekst — som ovenfor beskrevet — i 5 av kulturerne. I de andre 15 var der ingen vekst.

Nu præparertes kulturer fra de perifere segmenter av overskaarne n. n. ischiadici i forskjellige og stadig mere fremskredne stadier av Wallersk degeneration, d. v. s. 8, 10, 13, 15 og 19 dage efter gjennomskjæring. Resultaterne av disse eksperimenter er anført i omstaaende tabel (s. 48).

Kulturer av det perifere segment av en gjennemskaaret nerve i forskjellige stadier av Wallersk degeneration.

Stadierne av W. d. d. v. s. antal dage for- løpet efter gennem- skjæring.	Samlet antal av kulturer.	Antal kulturer i hvilke der kom vekst.	Procent av positive kulturer.
1, 2 og 4 dage	54	0	0 0/0
5 —	36	6	16,6 0/0
6 —	20	5	25 0/0
8 —	20	6	30 0/0
10 —	20	8	40 0/0
13 —	24	11	45,8 0/0
15 —	21	16	76 0/0
19 —	17	14	82,3 0/0

Denne tabel viser følgende:

Plasmakulturer av segmenter av normale, perifere nerver gir ingen vekst.

Plasmakulturer av fibre fra det perifere segment av overskaarne nerver gir ingen vekst i de første 4 døgn efter overskjæringen.

I 16,6 0/0 av de kulturer, som anlagdes fra det perifere segment 5 døgn efter overskjæringen, kom der en prolifération av protoplasmafibre, og i disse serier av kulturer, tillavet av fibre, der befinder sig i et endnu mere fremskredet stadium av Wallersk degeneration, kommer der en stadig rikere vekst av protoplasmafibre, saaledes at der er et direkte proportionalt forhold mellem nervefibrenes degenerationsstadium talt i dage efter overskjæringen og procenttallet av positive kulturer i hver serie.

Foruten disse lange protoplasmatraade, som ikke er bindevæv, og som ikke er nervefibre, og som efter sit utseende og sit utspring og sammenheng med det Schwannske protoplasma maa ansees som direkte utvokninger av dette, findes i mange kulturer emigration og vekst av vanlige bindevævsceller, som ikke frembyder nogen interesse.

I kulturer, præparerte av nervefibre i et mere fremskredet stadium av Wallersk degeneration fra den 15de dag f. eks., viser de i plasmaet utvokste Schwannske protoplasmafibre nogen mindre avvikelser fra den foregaaende beskrivelse, der gjælder kulturer fra fibre i et tidligere stadium.

I disse kulturer fra fibre i senere stadier er veksten rikeligere og fibrene vokser raskere. De fleste fibre er ute i plasmaet indbyrdes para-

lelle; de er rikelig forsynt med ovale kjerner og er i det hele tyndere end fibrene fra tidligere stadier. (Fig. 32—35.)

Rundt mange av de ovale kjerner sees smaa konglomerater av myelinkuler og fettkorn, som er slæpt med ut i plasmaet under fiberens vekst. Disse fibre, dannet fra nerver i mere fremskreden degeneration, er ikke saa tilbøielige til at forgrene sig og anastomosere indbyrdes; anastomoserne blir stadig sjeldnere, jo længere fremskreden den Wallerske degeneration var, før kulturen anlagdes.

I sølvimpregnerte præparater fra disse stadier er fibrene farvet lyst brune, og ingen av dem har antat den mørke eller helt sorte farve, som er karakteristisk for nervefibre (aksecylindre). Der er derfor ingen grund til at opfatte dem som saadanne.

Diskussion:

Den Wallerske degeneration av de perifere nerver betyder i de første stadier aksecylinderens og myelinskedens avdøen.

Fra RANVIERS arbeider vet vi, at den hurtighet, hvormed processen foregaar, er avhengig av forskjellige omstændigheter; saaledes forløper den hurtigere hos unge dyr end hos gamle, hurtigere ogsaa hos kraftige og friske dyr end hos syke, og langt hurtigere hos varmblodige end hos koldblodige dyr. Hos pattedyr varierer dens progression i hurtighet fra den ene art til den anden inden visse grænser, idet den f. eks. saaledes foregaar hurtigere hos kaniner end hos hunde.

Men i hvert givet tilfælde følger — uanset hurtigheten — det ene stadium av degeneration ganske lovmæssig paa det andet, og det hele har et ganske typisk forløp, som helt og holdent avviker fra den skjæbne, som rammer en nerve i et kadaver.

De kadaverøse forandringer, som foregaar i en nerve ved vanlig stuetemperatur, er studert av RANVIER. De er litet karakteristiske og frembyder ikke stor interesse.

MÖNCKEBERG og BETHE undersøkte de kadaverøse forandringer, som forekommer i nerverne, naar kadaveret straks efter døden anbringes i termostat av 37°. De fandt, at der under disse omstændigheter indtraadte en degeneration av nerverne, som ikke lot sig adskille fra de første stadier av den Wallerske degeneration, og at degenerationen ikke viste nogen progression efter de første 24 timer.

MÖNCKEBERG og BETHE konkluderte av sine forsøk, at den Wallerske degeneration er en proces, der kun kan foregaa i den levende organisme eller i den overlevende nerve, idet de gaar ut fra, at vævenes død ikke falder sammen med organismens død, og at nerverne i den tid, de over-

lever organismen, degenererer. MÖNCKEBERG og BETHE forsøkte forgjæves at fremkalde en Wallersk degeneration i nerver utenfor organismen i artificielt medium, idet de hertil anvendte isotonisk klornatriumopløsning.

MERZBACHER slutter sig til den av MÖNCKEBERG og BETHE uttalte betragtning og tilføier som sin opfatning, at naar Wallersk degeneration forekommer i en nerve, betyder det, at den er ilive.

Jeg har undersøkt de kadaverøse forandringer i nerver. N. ischiadicus kupertes, saaret lukkedes aseptisk, dyret dræptes, indvoldene uttoges, og dyret anbragtes i termostat. Den perifere del av den gjennemskaarne nerve undersøktes efter 12—24 og 48 timer efter dissociation i friskt præparat. Efter 24 timer fandtes i kadavere av 3 kaniner og 1 kat en ganske sparsom dannelse av myelinovoider, men desuten forandringer av nekrotisk natur. Nervefibrene er graalige, svulne, vanskelig dissocierbare; marvskedernes grænser indad er utydelige eller helt forvaskede, og hele fiberen har et støvet, finkornet utseende. Dannelsen av myelinellipsoider viser ingen progression efter 12 timer, mens derimot de nekrotiske forandringer er stadig fremadskridende. Naar en nerve efter at ha ligget i dyrekadaveret i termostat av 37° herfra bringes over i Ringers væske, følges dette *ikke* av ovoidformation.

Dette fra normale nerver avvikende forhold overfor Ringers væske — hvori en frisk nerve altid degenererer — viser, at den Wallerske degeneration er en proces, som *ikke kan foregaa i døde nerver*.

Det lykkedes NAGEOTTE for første gang at faa frem initialstadiet av den Wallerske degeneration i overlevende nerver in vitro, og hans arbeider paa dette felt har vist, at segmentationen av aksecylindren og myelinskeden er uavhengig av, og ikke som RANVIER trodde, et resultat av de Schwannske cellers funktioner. NAGEOTTES opfatning av de myelinklædte aksecylinders segmentation er, at myelinskeden, der er opbygget av levende protoplasma rikt paa mitokondrier, fordøier aksecylindren, efterat den er fragmentert og inkludert i myelinovoiderne, som dør noget senere, efterat de har fuldført dette arbeide.

NAGEOTTES opfatning av ovoidernes rolle er adoptert av CAJAL. Og denne autodigestion av den myelinlædte aksecylinder har nu NAGEOTTE observert in vitro i Lockes opløsning av legemstemperatur.

I klornatriumopløsning foregaar derimot ikke nogen ovoidformation; det er nødvendig, at denne opløsning tilsættes en liten mængde salt av et av de bivalente metaller. NAGEOTTE har saaledes vist, at denne autodigestion av myelinskeden er en fysikalsk kemisk proces, der forsaavidt angaar det omgivende mediums saltgehalt er underkastet de samme love som levende organer og organismer, nemlig loven om den antagonistiske salt-

virkning. Som bekjendt opdagedes den antagonistiske saltvirkning av Ringer, som fandt en antagonisme mellem K og Ca i deres virkning paa hjertet og paa grundlag av disse undersøkelser sammensatte sin fysiologiske væske, hvori NaCl, KCl og CaCl_2 findes i noget nær samme indbyrdes relation som i serum. JACQUES LOEB paaviste dernæst ved forsøk paa egg, embryoner og fiske, at den antagonistiske saltvirkning er et utbredt biologisk fænomen, og at en samtidig tilstedeværelse av et monovalent og et bivalent metal er nødvendig for opretholdelsen av livet — i ethvert fald i et meget stort antal tilfælder.

Segmentationen av marvskeden følger ogsaa andre biologiske love; den foregaar saaledes ikke i nerver, der opbevares ved 0° , og heller ikke ved 45° .

Nu har jeg fundet, at den Wallerske degeneration ikke forekommer i nervefibre, der opbevares i legemstemperatur indleiret i plasma. La mig tilføie, at nervefibrene herunder er komplet isolert og hver enkelt av dem fuldstændig og paa alle kanter omgit av koagulert plasma.

Betyder nu dette, at de er døde? Vist ikke.

Ti for det første utvikles der i disse nervefibre, naar de efter 1 og 2 døgns ophold i plasma overføres til Ringers væske, en typisk Wallersk degeneration, ganske som naar de efter en passage gennem isotonisk klor-natriumopløsning føres over i Ringers væske, og de avviker heri fra kada-verets døde nerver.

Og for det andet er det ved mange forsøk, utført av CARREL, BURROWS og mig selv, bragt paa det rene, at plasma mere end alle andre medier begunstiger cellers og vævs overleven, efterat de er skilt fra organismen, og at det er det eneste medium, hvori celler fra voksne dyr kan proliferere.

Og for det tredje vet vi av mine ovenfor refererte forsøk med dyrkning av det Schwannske protoplasma, at dette kan vokse utenfor organismen i plasma, hvis nervefibren ved implantationen hadde naadd et visst stadium (5te dag) av den Wallerske degeneration, og selv om dette Schwannske protoplasma paa de tidligere stadier ikke gir anledning til proliferationsfænomener efter implantationen i plasma, maa man anta, at det ogsaa da er i live, men rigtignok uten manifeste fænomener av liv.

Disse nervefibre i plasma er altsaa ikke døde. Og dog degenererer de ikke. Det for degenerationen nødvendige forhold mellem 1-værdige og 2-værdige metallers salte er tilstede i plasma saavelsom i serum, og at degenerationens utebliven ikke skyldes mangel paa kalcium, viser mine forsøk med tilsætning av kalcium i overskud, hvilket heller ikke resulterte

i nogen degeneration. Finder vi da i plasmaets konsistens eller struktur nogen forklaring paa dette?

Det flytende plasma indeholder krystalloider i opløsning og kolloider i suspension. Koagulationen sammenlignedes allerede av RANVIER med en krystallisationsproces, og i sin skildring av fibrinnettet fremhæver EBERTH og SCHIMMELBUSCH, at dette egentlig ikke bestaar av traade, men av svakt lysbrytende naale, der kan sammenlignes med margarinsyrekrystaller. Ved ultramikroskopisk undersøkelse av fibrinnettet har STÜBEL paavist dannelsen av krystalnaale under koagulationen, og jeg har, uten at kjende STÜBELS undersøkelse og før hans arbeide blev offentliggjort, ved fotografering av fibrinnetverket, under anvendelse av ultramikroskopiske metoder, paavist det samme; disse undersøkelser har jeg endnu ikke publicert. (Fig. 36—37.)

Mellemrummene mellem plasmaets krystalnaale er optisk tomme. Det er rimelig at anta, at krystalnaalene er fibrin, og at mellemrummene indeholder serum, hvis krystalloider er dissocierte og dialyserbare og derfor disponible for de i plasmaet levende celler; ja vi har et bevis for, at krystalloiderne er disponible, deri, at celler og væv kan leve og formere sig i plasmaet; uten disponible krystalloider kan dette overhodet ikke ske. Vi maa derfor gaa ut fra, at de i koagulert plasma tilstedeværende salte ogsaa er disponible for nervefiberen og dens myelinskede. Og dog degenererer den ikke i plasma.

Ved sine mikroskopiske undersøkelser av den Wallerske degeneration har NAGEOTTE fundet, at overflatespændingen spiller en betydelig rolle som et fysikalsk aarsaksmoment i utviklingen av hele denne proces, uten at han nærmere præciserer hvorledes.

Jeg tør ikke uttale nogen mening om betydningen av dette moment for degenerationens utebliven i plasma; det er mulig, at videnskapen om kolloidernes fysikalske kemi, som endnu er i sin vorden, vil kunne belyse spørsmålet.

Med vor nuværende viden om cellens fysiologi er det vanskelig at danne sig nogen præcis forestilling om, hvad der betinger ophævelsen av den Wallerske degeneration i plasma. Den Wallerske degeneration er en følge av nervefiberens adskillelse fra nevrons kjerneholdige del. Saavidt man vet, kan dele av dyriske cellers protoplasma ikke bestaa uden kjerne-substans, i ethvert fald er tilstedeværende kjernesubstans nødvendig for regeneration og forplantning. NUSSBAUM har vist, at naar man gjennomskjærer et infusorium, saaledes at det ene stykke indeholder kjerne, mens det andet er uten kjerne, da kan kun det kjerneholdige regenerere, d. v. s. ved nydannelse av de tapte dele igjen bli et fuldstændig infusorium, som kan formere sig. Det andet, kjerneløse stykke kan ikke regenerere, kan

ikke formere sig, og dets liv og selvopholdelse er indskrænket til et ganske kort tidsrum.

Den fra gangliecellen adskilte del av en nervefiber er et analogon til den kjerneløse del av infusionsdyret; begge er viet undergang. Riktig nok halter sammenligningen deri, at nervefibren er utstyret med det Schwannske syncytium, hvortil ingen paralel findes hos infusoriet; men dette syncytium kan dog ikke avvende den skjæbne, som er nervefibren beskaaret, hverken i organismen eller i Ringers væske eller i serum. Men anbringes nervefibren i plasma av legemstemperatur, undgaar den myelinklædte aksecylinder de strukturelle forandringer, der ellers er en følge av autodigestion. Om det Schwannske syncytium herunder spiller nogen rolle, vet vi ikke.

Den klassiske opfatning av nervefiberens ernæring i organismen var, at dette skedde gjennom de Ranvierske indsnøringer, hvor den paa et overmaade begrænset sted ikke var dækket av myelinskeden; denne opfatning grunder sig paa »Ranviers kors«, der som bekjendt opstaar paa dette sted, naar nervefibren behandles med sølvnitrat; aksecylindren blir da sortfarvet i et litet stykke paa begge sider av indsnøringen og danner korsets lange gren, mens den korte tvergren dannes ved sortfärvning av den »bikoniske opsvulmning«. — I motsætning til denne opfatning hævder NAGEOTTE, at Ranviers kors er et artefakt, og oppstiller som en rimeligere antagelse, at nervefibren — likesom alle nervøse elementer — ernæres ved de den adjungerte celler som mellemlid d. v. s. gjennom det Schwannske syncytium.

Der er endnu for mange huller i vor viden til, at jeg skulde forsøke paa at oppstille nogen hypotese til forklaring av den uteblivende segmentation av myelinfibren i plasma, og jeg vil nøie mig med at konstatere dette faktum, idet jeg tyder det derhen, at plasma paa en eller anden maate virker hemmende paa de autolytiske prosesser. Det er mulig, at det i første række er paa denne maate, plasma blir det udmerkede medium for dyrkning av celler og væv. Vekst og proliferation av celler og væv forutsætter endvidere tilstedeværelsen av disponibelt surstoff i plasmaet; dernæst kommer som et viktig moment fibrinnettet, der tjener de voksende celler som støtte eller et slags skelet; CARREL og BURROWS fandt, at de i serum voksende embryonale celler klynger sig til og vokser langs med bomuldstraade, som anbringes i serum; HARRISON har fundet en lignende positiv stereotropisme hos nervefibre in vitro.

Idet jeg dermed vender tilbake til betraktninger av de celleproliferationer, som jeg har paavist fra de tvertavskaarne ender av nervefibren ut i plasmaet, vil jeg minde om, at der ikke kom nogen vekst, medmindre

de første stadier av myelinsegmentation allerede var utviklet før implantationen i plasma. Fra nervefibre, der transplantertes til plasma inden de 4 første døgn efter overskjæring, kom der ingen vekst, mens der i 16,6 % av de kulturer, som anlagdes 5te døgn efter overskjæring, kom en proliferation av det Schwannske protoplasma, og i serier fra senere stadier en tiltagende procent av positive kulturer. Nu vet vi, at der i det perifere avsnit av en gjennemskaaret nerve hos kaniner in vivo sees en hyperplasi av det Schwannske protoplasma den 4de dag efter overskjæring; den 5te og 6te dag sees i kjernen økende kromatinrigdom, og fra 6te dag begynner cellerne at multipliceres. Dette stadium av hyperplasi og økende kromatinrigdom maa altsaa de Schwannske celler ha naadd, forat de skal kunne vokse videre i plasma.

Da de Schwannske celler i nerver — transplanterte til plasma — ikke kan proliferere, før myelinsegmentationen har naadd et visst stadium, kan vi herav slutte, at det er denne aksecylinderens og myelinskedens segmentation, som direkte utløser de Schwannske cellers proliferation.

Man kan ikke tvile paa, at det fra nervefibrener avskaarne ender utvokste protoplasma virkelig er det prolifererende Schwannske syncytium; det fremgaar tydelig av vedfœiede illustration. (Fig. 28 og 29.)

Viser nu dette, at et saadant forgrenet og anastomoserende protoplasmanet vokser ut fra den centrale ende av den tvers avskaarne nerves perifere avsnit ogsaa indenfor organismen? idet det muligens spiller en rolle under regeneration? Det er mulig, at dette er saa. At bindevæv vokser ut i arret fra begge ender av den avskaarne nerve, er vel kjendt. CAJAL har vist, at ialfald en del av de fra den centrale stump utvoksende nervefibre er ledsaget av Schwannske kjerner, og han er her i overensstemmelse med ZIEGLER.

Proliferation av det Schwannske protoplasma ut i arret fra den *centrale* ende av det perifere avsnit av en overskaaret nerve er iagttat av v. BÜNGNER. v. BÜNGNER uttaler et sted (paa pag. 370) under sin skildring av forandringerne i det intermediære ar følgende: »Die Kerne der Schwannschen Scheiden werden schon in der ersten Woche ins Zwischengewebe hineingedrängt; mit ihnen ergiesst sich in dasselbe von beiden Wundflächen her in Proliferation begriffenes Protoplasma.« Og STROEBE, som undersøkte degenerations- og regenerationsprocesserne efter avklemning av nerven, fandt utvoksning av det Schwannske celleprotoplasma fra baade det centrale og perifere avsnit ut i de ved avklemningen komprimerte Schwannske skeder. STROEBE sier herom (pag. 208): »da von beiden Nervenstümpfen her die gewucherten Neurilemzellen aus den alten Schwannschen

Scheiden heraus in die Kompressionsstelle vordringen«. MARINESCO mener ogsaa at ha iagttat utvoksning av Schwannske celler i arret.

Dette er, hvad jeg herom har fundet anført i litteraturen. Selv har jeg ikke set utvoksning av det Schwannske protoplasma fra det perifere avsnit av nerven in vivo. Men det utelukker ikke, at det har været der. Dette protoplasma farves svakt, og idet fibrene under bøininger og slyngninger vokser ut i arvævet, kan det være vanskelig at danne sig et begrep om deres egentlige struktur og oprindelse, som i plasma fremtræder langt klarere og her lettere lar sig utdifferentierte; i organismen kan det Schwannske protoplasma forveksles med det unge bindevæv paa overskjæringsstedet.

v. BÜNGNERS og STROEBES iagttagelser synes hos disse forskere ikke at ha efterlatt nogen tvil om protoplasmaets natur, og jeg tar det for givet, at en saadan utvoksning ogsaa forekommer i organismen. Hermed stemmer resultatene av mine kulturforsøk.

I plasma er denne utvoksning meget energisk, og i løpet av 4—6 dage maaler protoplasmatraaden over $\frac{1}{2}$ mm.

Som nævnt i forrige kapitel har CAJAL fremsat den hypotese, at vekst og bevægelser indenfor nervesystemet dirigeres av kemotaktiske kræfter. FORMANN viste ved eksperimenter, at kolloidiumtuber fylde med oppløst nervesubstans virker positivt kemotaktisk paa de fra den centrale stump av en overskaaren nerve utvoksende nervefibre, som styrter sig ind i disse tuber, mens de ikke ænser dem, om de istedenfor nervesubstans er fylde med detritus av milt, lever og andre organer. Den specifikke tiltrækning, som oppløst nervesubstans ifølge disse eksperimenter skulde utøve paa voksende nervefibre, kalder FORMANN nevrotropisme.

CAJAL har modificert FORMANNs hypotese saaledes, at han tillægger — ikke de gamle tubers detritus — men protoplasmastrengene i den perifere stump, produktionen av de substanser, der virker tillokkende paa de unge fra den centrale stump utvoksende nervefibre, og anfører gode grunde herfor.

Hermed være det, som det vil. CAJALS kemotaktiske teori, for de fra den centrale ende utvoksende fibres orientering ind mot den perifere stump av den overskaarne nerve, forklarer smukt de fleste av de fænomener, vi herunder møter. Det er en hypotese, som har megen sandsynlighet for sig, selv om det ikke er eksperimentelt bevist, at de Schwannske cellers protoplasma virker positivt kemotaktisk paa de utvoksende nervefibre. Vi vet, at disse kan vokse ut, enten saadan paavirkning fra de Schwannske celler er tilstede eller ei. Kommet over til den centrale ende av den perifere stump vokser nervefibrene uten nølen ind i denne, idet baade proto-

plasmastrengene og interstitierne gjennomvokses. Et skrumpende bindevævsagtig arvæv hindrer dem i at trænge ind i den perifere stump. Men derimot vil de fra denne i de første uker efter overskjæringen utvoksende Schwannske protoplasmastrengene (v. Büngners baand) danne en *mekanisk* veiledning for de fra den centrale stump kommende nervefibre.

CAJAL har paavist, at det Schwannske protoplasma følger nervefibrene ut i arret fra den centrale stump. Jeg har hos det Schwannske protoplasma paavist en selvstændig vekst- og bevægelses-energi, hvis fundamentale princip er amøboide bevægelser gjennom plasmaet.

Det er derfor sandsynlig, at det Schwannske protoplasma aktivt vokser ut fra den centrale stump sammen med de unge nervefibre og ikke passivt slæpes med av disse. Det er videre saa, at det Schwannske protoplasma i organismen likesom i plasma vokser ut i arret fra den perifere stumps centrale ende. Her danner det en buket av protoplasmastrengene, som vokser de fra den centrale stump kommende nervefibre imøte. Nu vet vi av HARRISONS forsøk, at nervefibre er i besiddelse av positiv stereotropisme d. v. s. har en tilbøielighet til at smygge sig langs faste legemer, og de følger derfor villig den retning ind mot det perifere segments hilus, som de fra denne kommende protoplasmastrengene angir.

Jeg ønsker nu at fæste oppmerksomheten ved den ting, at der i de talrike kulturforsøk, jeg har gjort med stykker av perifere nerver, ikke i et eneste tilfælde dannedes noget, der lignet en nervefiber. Der har for mig intet overraskende været heri. Men idet man erindrer, at nervefibre vokser ut i plasma fra stykker av spinalganglier og cerebellum, der indeholder ganglieceller, danner det nys nævnte yderligere et argument til fordel for utvoksnings teorien i motsætning til læren om den autogene regeneration.

Fra et morfologisk standpunkt er der ved det fra nervefibrene utvokste Schwannske protoplasma en del træk av en viss interesse. Det Schwannske protoplasma, der vokser ut av perifere nervers avskaarne ender i de første stadier av den Wallerske degeneration, har en tilbøielighet til at danne et *netverk*, — en tilbøielighet som ikke er saa uttalt i senere stadier av degenerationen; protoplasmastrengene danner da lange rækker av parallele cellebaand, som paaafaldende ligner v. Büngners baand. v. BÜNGNER og efter ham BETHE og andre ansaar disse lange baand av sammenhengende Schwannske celler, hvori paavistes et ytre fingranulert lag og et indre stripet lag, som de første tegn paa en utdifferentiation av nye aksecylindre i den perifere stump.

At dette var en misopfatning, var paavist av CAJAL og NAGEOTTE. Mine fotografier og tegninger av det i plasma utvokste Schwannske syn-

cytium og cellebaand har visse morfologiske træk tilfælles med nervefibre — en likhet som selv i plasma, hvor disse protoplasmastrenge ligger frit og ganske isolert, kunde muliggjøre en forveksling med saadanne. Men likheten er kun en rent ytre. Protoplasmaets indhold av kjerner og dets forhold under sølvimpregnation viser, at det ikke er nervefibre.

Mere bemerkelsesværdig er imidlertid den ytre likhet, som findes mellem det i plasma utvokste Schwannske syncytium — særlig fra fibre i tidlig stadium av degeneration — og det fra cerebellum utvokste gliasyncytium. Mellem disse billeder er der betydelige overensstemmelser, hvilket ikke kan undre, naar man tar i betragtning, at gliavæv og Schwannsk syncytium er homologe dannelser.

Konklusioner:

1. Den Wallerske degeneration, som findes i perifere nerver utenfor organismen, naar de opbevares i Ringers væske eller serum av legemstemperatur, forekommer ikke i plasma under ellers like omstændigheter.
 2. Plasma antages at forebygge utviklingen av autolytiske processer.
 3. Fra normale perifere nerver dyrket i plasma kommer ingen vekst. Det samme gjælder perifere nerver, der efter overskjæring er degenerert indenfor organismen i optil 4 døgn.
 4. Fra perifere nerver, der indenfor organismen efter overskjæring er degenerert i 5 døgn, kommer en vekst av det Schwannske protoplasma (samt av bindevæv). I kulturer av nerver i mere fremskreden Wallersk degeneration kommer der en stadig tiltagende vekst av det Schwannske syncytium. Det fremgaar, at støtet til denne prolifera-tion gives av den myelinklædte aksecylinders segmentation.
 5. Der observertes aldrig dannelse av nervefibre.
 6. Utvoksningen av det Schwannske protoplasma fra degenererte nerver kan i betragtning av nervefibre-nes positive stereotropisme danne grundlaget for en anatomisk forklaring paa voksende nervefibre-nes orientering mot hilus av den perifere stubs centrale ende.
 7. Mellem det i plasma voksende Schwannske syncytium og gliasyncytium er der morfologisk likhet.
-

Kap. 4. Fri transplantation av perifere nerver.

Som omtalt i indledningen til dette arbeide forstaaes ved begrepet fri transplantation et nervesegments fuldstændige løsning fra sin sammenhæng med omgivelserne, og en derpaa følgende implantation til en levende organisme — enten tilbake til eiermanden (autoplastik) eller til et andet individ av samme art (homoplastik) eller til et individ av en anden art (heteroplastik).

Hvilken skjæbne rammer der et saaledes transplanterert stykke?

Naar man gaar til en saadan undersøkelse, maa man som utgangspunkt og til sammenligning hele tiden ha den Wallerske degeneration for øie, da den er den normale følge av enhver nerveoverskjæring, og de specielle forandringer, som transplantationen frembringer, maa bedømmes i forhold til den Wallerske degeneration.

Jeg skal i dette avsnit helt forbigaa omtalen av de forsøk paa fri transplantation, der er gjort paa mennesker i kurativt øiemed for at dække nervedefekter. Og av det eksperimentelle arbeide, som er utført paa dette felt, skal jeg kun omtale de resultater, man har vundet ved histologisk undersøkelse av de transplanterte stykker, idet man herunder har søkt at bringe paa det rene, om der i transplantatet indtræder og forløper en vanlig og typisk Wallersk degeneration, og — hvis ikke — hvilke avvikelser fra denne proces man da har iagttat i transplantatet.

RANVIER gjorde i 1878 transplantationsforsøk med nerver, og fandt, at der i auto- og homoplastiske transplantater indtraadte en Wallersk degeneration, mens heteroplastiske segmenter nekrotiserete.

HUBER gjorde væsentlig heteroplastisk transplanterte nervesegmenter til gjenstand for histologisk undersøkelse og konkluderte av sine eksperimenter, at den degenerations-proces, som herunder indtraadte i disse stykker, i væsentlige træk stemte overens med den Wallerske degeneration, dog saaledes at den forløp hurtigere i transplanterte nerver end i det perifere segment av en overskaaret nerve.

BALLANCE og STEWART fandt likeledes, at degenerationen foregaar i transplantatet akkurat som i det perifere segment av en overskaaret nerve. Transplantatet er et stykke dødt væv, sier disse forfattere, og blir likesom

et koagel gradvis absorbert og substituert av levende væv; regeneration kommer senere, men er ikke et resultat av transplantatets egne celler.

Saavidt jeg kan forstaa, uttrykker denne konklusion 2 indbyrdes motstridende opfatninger, av hvilke den ene, hvis den holder stik, utelukker den anden. Hvis degenerationen i transplantatet foregaar akkurat som i det perifere avsnit av en overskaaret nerve, da er nemlig transplantatet ikke dødt. Ti det perifere avsnit av en overskaaret nerve er ikke dødt. Den myelinklædte aksecylinder degenererer og dør — det er sandt, men de Schwannske celler dør slet ikke, og deres prolifera^{ti}on viser, at denne del av nervefiberen netop nu er i live.

Hverken HUBER eller BALLANCE og STEWART skjelnet mellem auto-, homo- og heteroplastik. Dette blev først gjort av MERZBACHER. MERZBACHER fandt i 1905, at kun auto- og homoplastisk transplanterte nerve-seg^{men}ter degenererte paa vanlig vis, mens der i heteroplastisk overførte stykker indtraadte forskjellige regressive forandringer, der resulterte i nekrose. Auto- og homoplastisk transplanterte nerveseg^{men}ter overlever transplantationen, og i disse finder man en Wallersk degeneration, som kun kan foregaa i overlevende nerver; heteroplastisk overførte nervestykker dør og kan ikke degenerere, men nekrotiserer, og i disse finder man kun en ubetydelig, om overhodet nogen, ovoidformation. MERZBACHERS resultater blev bekræftet ved SEGALES eksperimenter.

VERGA gjorde i 1910 en række undersøkelser herover, idet han dækket defekter i nerver med homo- og heteroplastiske materialer. Han fandt, at de implanterte seg^{men}ter altid indhelte og altid degenererer, og at der fra et anatomisk standpunkt ikke var nogen forskjel mellem det homoplastisk og heteroplastisk transplanterte stykke.

I GOLGIS laboratorium optoges spørgsmaalet i 1911 av MACCABRUNI, som gjorde homo- og heteroplastiske nervetransplantationer. Hans resultater stemmer overens med HUBERS og VERGAS fund, idet han paaviste en typisk Wallersk degeneration i begge serier. I centrum av tykke nervestykker fandt MACCABRUNI en del nekrotiske fibre, mens derimot tynde seg^{men}ter degenererte komplet uten dette nekrotiske centrum, og forholdt sig som den perifere del av en overskaaren nerve. Degenerationsprocessen har et langsommere forløp end i det perifere seg^{men}t av en overskaaret nerve. Fra 8de til 14de dag efter transplantationen fandt han prolifera^{ti}on av celler med karyokinetiske delingsfigurer inde i de enkelte nervefibre. Angaaende de prolifererende cellers natur og genese tør MACCABRUNI ikke uttale sig med sikkerhet, idet hans præparater ikke viser, om de er Schwannske celler eller bindevævsceller.

Foruten de ovennævnte forfattere har GLUCK, KILVINGTON og DUROUX arbeidet eksperimentelt med fri transplantation av nerver. Alle 3 beretter om opmuntrende resultater set fra funktionelt standpunkt. Men hverken KILVINGTON eller DUROUX har gjort histologiske undersøkelser; og de tydingen av sit materiale og de konklusjoner, som GLUCK herav trækker angaaende regenerationsprocesserne, er ikke overbevisende. GLUCKS forsøk viser ikke, at transplanterte nervesegmenter er andet end dødt materiale, og KÖLLIKER bemerker i den anledning, at nervesegmentet derfor, hvis det anvendes til dækning av defekter i nerver, maa antages at hindre regenerationen, istedenfor at lette den. KÖLLIKER anbefaler katguttraade eller tuber til dækning av nervedefekter, idet han antar, at dette materiale bedre end nervesegmenter vil tjene formaålet.

JOHNSON, ASSAKY og FORSMANN har ogsaa gjort transplantationsforsøk. Deres histologiske undersøkelser har været rettet paa mulige regenerationsfænomener mere end paa studiet av degenerationsprocesserne, og jeg skal derfor komme tilbake til deres arbeider i næste kapitel.

I problemet fri transplantation av nerver er spørsmålet om de Schwannske cellers eventuelle overleven og multiplikation av kapital betydning. En undersøkelse av dette og paavisning av en eventuel multiplikation av de Schwannske celler er det eneste kriterium, vi har for det transplanterte stykkes overleven, og løsningen av dette spørsmål vil være bestemmende for vor kirurgiske fremgangsmåte i tilfælde av defekter i perifere nerver. Hvis transplanterte nervesegmenter dør og nekrotiserer, da er de ikke mere skikket til at dække defekter i perifere nerver end traade av katgut eller bomuld, om de ikke er daarligere. Men hvis det paa den anden side lar sig paavise, at nervestykker overlever transplantationen, da er det med en gang sandsynlig, at de ikke forholder sig som dødt materiale, og at de derfor maa foretrækkes for alt andet til dækning av defekter i perifere nerver.

Jeg har gjort en del undersøkelser for at bringe dette paa det rene, da jeg i betragtning av de foran refererte forskeres litet overensstemmende resultater har ment, at det sidste ord i denne sak endnu ikke var sagt, og da opmerksomheten efter min mening ved en saadan undersøkelse maatte rettes paa de Schwannske celler som det centrale punkt, hvad tidligere undersøkere ikke har tat fornødent hensyn til.

Jeg har eksperimentert med n. ischiadicus paa kaniner. Fra denne nerve blev uttat smaa stykker, fra $1\frac{1}{2}$ —2—3 cm., og implantert igjen enten tilbake til samme dyr (autoplastik) eller til en anden kanin (homoplastik) eller til et marsvin (heteroplastik). Ved transplantationen blev nervesegmenterne dels transplanteret til det subkutane væv, dels til muskelinterstitier

og da gjerne til skeden for n. ischiadicus, hvor det fæstedes ved suturer i øvre og nedre ende. Den lokalitet, som blev valgt, har ikke vist nogen indflydelse paa transplantatets skjæbne i de første 2—3 uker efter transplantationen, som det under disse undersøkelser dreier sig om. Kun forsaavidt var der nogen forskjel, som der i et par tilfælder av subkutan implantation kom suppuration, hvilket ikke hændte i de tilfælde, hvor segmentet transplantertes intermuskulært.

Inficerte tilfælder tælles naturligvis ikke med, og de resultater, som i det følgende meddeles, er vundet ved undersøkelse av de nervesegmenter, der blev transplanteret til muskelinterstitier paa laaret. Materialet er saaledes ensartet.

I hver av de 3 undersøkte serier har jeg operert flere dyr og har uttat de transplanterte segmenter til histologisk undersøkelse med forskjellige mellemrum efter transplantationen — fra 4—8—12 optil 19 og 20 dage efter transplantationen.

Efter uttagelsen behandledes nervestykkerne efter den foran under kapitlet om den Wallerske degeneration omtalte NAGEOTTES metode: fiksatoren i Dominicis væske, dissociation med naale, farvning med jernhæmatoxylin. En del præparater blev desuten skaaret og behandlet med osmiumsyre.

Jeg ønsker at præcisere nødvendigheten av at undersøke dissociationspræparater. Kun i saadanne er man sikker paa, at en bestemt cellekjerne tilhører en bestemt nervefiber, og kun i saadanne præparater kan man tælle kjernerne i hver enkelt fiber.

Jeg skal nu summere mine resultater og gjennomgaa hver av de tre parallele forsøksrækker for sig, idet jeg begynder med de

Autoplastiske transplantationer. (Fig. 39—44.)

I denne række finder man ved undersøkelse av transplantaterne 4 og 6 dage efter transplantationen et billede, som ikke skiller sig meget fra den vanlige Wallerske degeneration. De Schwannske cellekjerne er faldt ind mot fiberens centrum mellem 2 myelinovoider; de er kromatinrike og omgit av rikelig protoplasma. I enkelte fibre ligger 2 eller 3 ved siden av hinanden, hvilket tyder paa, at en multiplikation allerede er begyndt. Inde i og mellem myelinovoiderne, som er begyndt at dannes, sees indvandrede mononukleære celler av en type helt forskjellig fra de Schwannske celler; de viser fagocytære egenskaper, idet de efterhaanden optar fettkorn i sit protoplasma og repræsenterer de samme celler, som NAGEOTTE har beskrevet under den Wallerske degeneration som »corps granuleux«. De er sandsynligvis lymfocytter.

Det eneste, som paa dette stadium adskiller det autoplastiske nerve-segment fra det perifere avsnit av en overskaaret nerve, er, at ovoidformationerne i det sidstnævnte er mere fremskredne. Undersøkes nu fremover, finder man dette som et stadig tilbagevendende træk. Efter 7—8 døgn finder vi en degenerationsproces av et forløp og utseende som en noget forsinket Wallersk degeneration. Et transplantat fra 8de døgn er i samme degenerations-stadium som det perifere segment av en overskaaret nerve fra 5te eller 6te døgn, men saa er der enkelte fibre, hvori ingen ovoider er dannet, og som ser ut som normale nervefibre. — Saadanne finder man, som det fremgaar av Marchi-behandlede snitpræparater, særlig i segmenternes centrale dele, og disse fibre blir sandsynligvis senere nekrotiske uten at gjennemgaa myelinsegmentation. Dette gjælder de centrale fibre i baade auto- og homoplastiske transplantater og bekræfter saaledes MACCABRUNIS fund.

I 12te døgn finder vi et billede som av Wallersk degeneration i 8de—9de døgn. Der er nu dannet talrike ovoider, der sees mange fettkorn-celler, og de Schwannske cellekjerner er nu saa talrike, at man derav sikkert kan slutte, at der har foregaat en multiplikation av disse.

I 16—19 døgn finder man talrike Schwannske cellekjerner i rad og række inde i de Schwannske skeder; inde blandt ovoiderne sees mange fettkorn-celler, og den eneste forskjøl fra den Wallerske degeneration i 16de døgn er, at fett-(myelin-)resorptionen i transplantatet ikke er saa langt kommet som i det perifere segment av en overskaaren nerve efter samme tidsrum.

Jeg skal dernæst beskrive resultaterne av mine

Homoplastiske transplantationer. (Fig. 45—47.)

Præparater fra 4de og 5te døgn ligner i næsten et og alt billedet av nervefibre i den Wallerske degeneration fra 4de og 5te døgn. De Schwannske cellekjerner er faldt ind mot centrum av fiberen og er rundagtige og kromatinrike. Ovoider er begyndt at dannes, og der sees nogen ganske faa indvandrede celler.

I et av præparaterne fra 4de døgn findes en celle, der viser forhold av særlig interesse. Vi ser her inde i en nervefiber 3 ovale Schwannske cellekjerner, den ene tæt efter den anden, og like ved siden av disse en mørkfarvet protoplasmamasse med en kjernedelingsfigur. Denne mitose danner beviset for, at der virkelig foregaar en prolifera-tion av de Schwannske celler i homoplastisk transplanterte nerver. Allerede det forø-kede antal og de tætliggende stavformede Schwannske kjer-ner i isolerte nervefibre

viser, at noget saadant har foregaat, og mitosen gir os et billede av processen selv grepet in flagranti. At dette er en Schwannsk celle, fremgaar derav, at der utenom mitosen sees en tydelig brem av protoplasma, noget som ikke findes i de indvandrede celler under kjernedelingen. Desuten findes ikke indvandrede celler noget sted i hele præparatet forøvrig.

En slik mitose har jeg ikke fundet i de autoplastisk transplanterte nerver. Men kjernedelingsfigurer sees heller ikke hyppig i de Schwannske kjerner under deres proliferaion ved den vanlige Wallerske degeneration. Og da en mitose i de Schwannske kjerner er fundet i et homoplastisk overført nervesegment, er der ingen grund til at tvile paa, at man ogsaa vil kunne paavise saadanne i autoplastisk transplanterte nerver, for efter alt hvad vi vet om transplantation, er disse git gunstigere vilkaar for fortsat liv og proliferaion end de homoplastiske.

I de første 10—12 dage efter transplantationen forløper degenerationsprocessen i de homoplastiske transplantater væsentlig som i de autoplastiske, det vil si efter forbillede av den vanlige Wallerske degeneration, kun noget langsommere. Der dannes ovoider, de Schwannske cellekjerner prolifererer og danner rækker av kjerner, og der optræder indvandrede fettkornceller inde i fibre. Fra autoplastiske segmenter avviker homoplastikerne deri, at de enkelte nervefibre er klistret sammen og efter uttagelsen er meget vanskelige at dissociere i enkeltfibriller.

Fra 10de og 12te dag er antallet av disse fettkornceller betydelig større end i autoplastisk overførte segmenter, og det øker stadig fremover og utgjør fra 16de—18de dag et fremtrædende træk i det hele billede.

Denne forskjel mellem autoplastiske og homoplastiske transplantater tror jeg bør tillægges adskillig betydning. Det er mulig, at disse talrike indvandrede celler i de homoplastiske transplantater, hvor de optræder som fagocytter, og som mest ligner lymfocytter, spiller en rolle i *vævsimmuniteten*, og de kan muligens komme til at gi os en forklaring paa den like til den allersidste tid saa dunkle forskjel mellem autoplastisk og homoplastisk overførte organers skjæbne i sin almindelighet. Denne forskjel er sikkert paavist f. eks. for nyrernes vedkommende. CARREL har vist, at reimplantation av nyrer hos hunde er en operation, hvis sukses kun avhænger av kirurgisk teknik. Derimot har hverken CARREL eller nogen anden selv med den mest vellykkede teknik kunnet transplantere nyrer fra et dyr til et andet av samme art med blivende godt resultat. Under de forsøk, jeg har gjort herpaa, fandtes i ett tilfælde ved homoplastisk nyretransplantation, som katten overlevet i 24 dage, en svær nefrit med *lymfocytinfiltration*.

En saadan lymfocytinfiltration — kun endnu mere uttalt end i homoplastisk transplanterte nerver — har jeg ogsaa fundet i de heteroplastiske nervetransplantater, og skal under omtalen av disse betragte dette fænomen lidt nøiere. Jeg skal her tilføie, at de Schwannske cellekerner i de homoplastiske transplantater fra 17de og 18de dag er bleke og svakt farvede og sandsynligvis i en nekrobiotisk tilstand. Det er mulig, at de talrige lymfocytters tilstedeværelse maa gjøres ansvarlig for dette.

I heteroplastisk transplanterte

nervesegmenter er der dannet myelinovoider efter 4—5 dage. (Fig. 48.) Men dermed ophører likheten mellem heteroplastiske og auto- og homoplastiske transplantater, og med nerver i Wallersk degeneration. Der kommer ingen proliferation av de Schwannske kjerner, som isteden er svakt farvet eller helt borte.

Efter 9—10 dage findes i alle præparater en sterk sortfarvning av fibrenes strukturløse indhold, som er i henfald, og hvor myelin, kjerner og protoplasma ikke kan skjernes. Fra 12te dag er alle undersøkte nervesegmenter sterkt rundcelleinfiltrert.

Præparater, der er farvet med jernhæmatoxylin efter fiksatoren i Dominicis væske, viser efter 8—9 dage en utydelig struktur, og fibrenes indhold bestaar for det meste av uregelmæssige forrevne sort- eller blaafarvede brokker, fragmenter av myelin og protoplasma, og hele fiberen har et nekrotisk utseende. Rundcelleinfiltrationen tiltar fremover, og fra 16de—19de døgn er segmentet ved uttagelsen gulfarvet, slapt, komplet nekrotisk og pusinfiltrert, eller det er omgitt av en kapsel av granulationsvæv og bindevæv.

Man har længe visst, at heteroplastisk transplantation av væv ikke lykkes. Dette gjælder væv saavel fra den normale organisme som svulst-væv. EHRLICH og BASHFORD, som begge konstaterte dette for svulsternes vedkommende, har til forklaring fremsat hver sin teori.

EHRLICH antar, at hver dyreart i sin vævssaft har et specifikt næringsstof X, som er nødvendig for vævets liv og vekst, og at vævets avdøen, naar det føres over paa en anden dyreart, er en hungersdød (athrepsie).

BASHFORD forklarer det heteroplastisk transplanterte vævs død ved antagelsen av en aktiv immunitet, som utvikles hos den nye vert mot det fremmede proteid.

JAMES B. MURPHY har ved eksperimentelle arbeider irettelagt en del kjendsgjerninger, som er av betydelig interesse for spørsmålet. MURPHY fandt, at hønseembryoner til forskjel fra voksne høns mangler beskyttelsesmidler mot heteroplastisk implantert svulst-væv, og at den beskyttelses-

mekanisme, som voksne høns besidder, men som embryo mangler, utvikles i kyllingen i kort tid like før den forlater egget. En rottetumor implantert i kyllingen i den mottagelige periode vokser uten spor av reaktion fra kyllingen, mens 'den i den refraktære periode fremkalder en reaktion, som histologisk ytrer sig ved en tæt infiltration av *lymfocytter omkring rottetumor*.

Ved en række eksperimenter, som jeg ikke her kan komme ind paa, viste MURPHY, at milt og i noget mindre grad benmarv fra voksne høns implantert paa honseembryoner gjør disse refraktære overfor heterolog tumor, og at et saadant refraktært embryo forsvaret sig paa samme maate mot det heterologe væv som voksne høns, i ethvert fald at dømme efter det histologiske billede — nemlig ved en *infiltration av smaa lymfocytter*.

Jeg tror, at disse MURPHYS undersøkelser har adskillig betydning. Det er rimelig, i ethvert fald indtil videre undersøkelser viser noget andet, at opfatte mekanismen for uimottagelighet for heteroplastisk transplanterte nerver og andet normalt væv paa samme maate som mekanismen for immunitet i videste forstand mot heterologt svulstvæv. I begge tilfælder er reaktionen histologisk den samme, nemlig en infiltration av lymfocytter og nekrose av det heterologe væv, og det er rimelig, at mekanismen i begge tilfælder er den samme.

Nu er spørsmålet om vævsimmunitet imidlertid ikke uttømt med denne lymfocytinfiltration alene. Ti vi vet, at der i serum ofte forekommer præformerte stoffe, der virker cytolytisk paa heterologt væv; og de i serum præformerte cytolytiske stoffe kan direkte fremkalde cellenekrose i det heterologe væv uten mellemkomst av lymfocytter.

Men i serum forekommer *ikke* stoffe, der virker cytolytisk paa *homologt* væv. Vistnok er der i *menneskeserum* paavist præformerte iso-hæmolysiner, d. v. s. serum fra et individ hæmolyserer de røde blodlegemer fra visse andre individer, og de naturlige hæmolysiner virker cytolytisk ikke bare paa erythrocyter, men i nogen grad ogsaa paa andre celler og hemmer deres vekst, naar de dyrkes in vitro; dette har jeg paavist ved dyrkning av kyllinghjerter i agar + serum fra katte, hunde og kaniner.

Men hos *dyr* er der ikke fundet præformerte iso-hæmolysiner eller iso-cytolysiner, der kan forklare forskjellen mellem de blivende resultater av autotransplantationer og homotransplantationer — en forskjell som er sikkert konstatert ikke bare for nyrernes vedkommende, men som ogsaa gjælder transplantationer av hud, ben, glandula thyreoidea og andre organer.

Vi kjender ikke og kan ikke definere den biologiske forskjell, som er tilstede mellem to individer av samme art, og som maa gjøres ansvarlig for homoplastisk transplanterte organers successive svind og ødelæggelse.

Vi kan tænke os, at der hos »verten« udvikles immunlegemer mot det nye homologe væv, men noget saadant har aldrig været paavist.

Agglutination av de røde blodlegemer hos et dyr ved serum fra et andet dyr av samme art er den eneste serologiske reaktion, som kan gjøres mellem serum og celler inden samme dyreart. Jeg har i et tidligere utkommet arbeide undersøkt, hvorvidt tilstedeværende normale iso-agglutininere spiller nogen rolle for den skjæbne, der rammer karsegmenter, naar de overføres fra et dyr til et andet av samme art. Forsøkene utførtes paa katte (hvor der ikke findes iso-hæmolysiner) og viste, at iso-agglutininene ingen betydning har for saavidt. Man har ingen serologisk eller biologisk indikator for de forskjelligheter mellem enkelte dyr inden samme art, der konstituerer individets egenart eller den fysiologiske individualitet.

Vender vi nu tilbake til de homoplastisk transplanterte nervesegmenter, saa har jeg konstatert den forskjel fra de autoplastiske, at der i homoplastikerne kommer en betydelig rundcelleinfiltration — særlig efter 10de og 12te døgn. I autoplastiker er de indvandrede cellers antal ikke stort; det er omtrent som i de tilsvarende stadier av den Wallerske degeneration.

De indvandrede celler er fagocytter, tillokke av en positiv kemotropisme fra avdøende dele av nervefiberen; dette gjælder baade det periferre avsnit av en overskaaret nerve og transplanterte nervesegmenter. Og det forøkede antal rundceller i homoplastiker kan tydes paa en av 2 maater.

Enten optar de i sig kun dødt cellemateriale, og deres forøkede antal betyder da formodentlig, at det homoplastiske transplantat avdør raskere og fuldstændigere end det autoplastiske.

Eller de spiller muligens samme rolle her som lymfocytterne i MURPHYS transplantationsforsøk; vi husker, at uten tilstedeværende lymfocytter kan heterolog tumor vokse hos hønseembryo, og lymfocytterne maa her tilskrives en aktiv destruktiv rolle.

Hvilken av disse to antagelser er den rigtige, viser mine forsøk ikke. De viser en forskjel mellem autoplastiker og homoplastiker, hvis væsentlige histologiske træk er en lymfocytinfiltration i homoplastikerne.

Resumé.

I autoplastisk transplanterte nerver foregaar en degenerationsproces, som ligner den vanlige Wallerske degeneration, men skrider frem noget langsommere end denne. De Schwannske celler overlever transplantationen og prolifererer i de nye omgivelser.

I homoplastisk transplanterte nervesegmenter har jeg fundet en lignende degenerationsproces; kun foregaar myelinsegmentationen og fettresorptionen endnu noget langsommere. De Schwannske cellekjerner pro-

lifererer, overlever følgelig transplantationen i nogen (en begrænset) tid. Efter 12—14 dage sees en rikelig og tiltagende lymfocytinfiltration i og mellem nervefibrene, og fra den 16de—18de dag er de Schwannske cellekjerner bleke og nekrobiotiske.

I heteroplastiske transplantater segmenteres myelinskeden i de første 4—5 dage. Men der er ingen proliferaion av de Schwannske cellekjerner, og de karakteristiske træk av den Wallerske degeneration gjenfindes ikke. Efter 12—14 dage er segmentet nekrotisk.

Konklusioner:

Da heteroplastiske nervesegmenter nekrotiserer, er de uskikkede til at dække defekter i perifere nerver, og mine resultater forklarer de mislykkede forsøk paa heteroplastisk nervetransplantation hos mennesker.

Hvis vi ønsker at dække en nervedefekt ved implantation, maa vi bruke homoplastisk eller endnu bedre autoplastisk materiale. Da der i disse transplantater indtræder og forløper en Wallersk degeneration i de første 2—3 uker, skulde dækning av defekter med saadant materiale gi utsigt til gode resultater, for i denne periode ligner transplantaterne det perifere avsnit av en overskaaret nerve og maa saaledes antages at kunne regenerere paa samme maate som dette. Man maa derfor anta, at de bedre end noget andet materiale vil kunne tjene det formaal at dække defekter i perifere nerver.

Kap. 5. Dækning av defekter i perifere nerver ved fri transplantation.

Det staar nu tilbage at undersøke, om et nervesegment, der implanteres i en nervedefekt mellem den centrale og den perifere stump, kan regenerere, og om den rolle, det herunder spiller, er saa betydelig, at en dækning av nervedefekter ved implantation av nervestykker kan faa nogen praktisk kirurgisk betydning.

De første forsøk paa en fri transplantation av nerver ind i en nervedefekt gjordes av PHILIPPEAUX og VULPIAN i 1870; disse forskere transplanterte et 2 cm. langt segment av n. lingualis ind i en likestor defekt i n. hypoglossus paa samme hund. 5 av 7 forsøk mislykkedes. Men i et tilfælde fandtes tegn paa regeneration. Ved elektrisk undersøkelse 71 dage efter implantationen kom der rykning i den tilsvarende del av tungen, og ved histologisk undersøkelse av det transplanterte stykke fandtes i dets centrale dele nydannede nervefibre.

I 1880 transplanterte GLUCK 3—4 cm. lange segmenter av n. ischiadicus ind i likestore defekter i n. ischiadicus paa høns og fandt, at kontrol-dyr efter 8—10 uker var komplet paralytiske i angjældende nervegebet, mens de dyr, som hadde faat defekten dækket ved heteroplastisk transplantation, hvad motilitet angik befandt sig i samme tilstand, som om der var gjort primær nervesutur. GLUCK refererer resultaterne av sine histologiske undersøkelser; intet av transplantaterne er undersøkt senere end 21 dage efter transplantationen.

Senere (i 1895) har GLUCK ført disse forsøk videre. Han gjorde da en autoplastik, idet der hos en hund resecertes 6 cm. av n. ischiadicus, stykket vendtes derpaa helt rundt og implantertes i defekten. Reseksjonen fulgtes av lammelse. Derefter bedredes funktionen langsomt, og 12 uker efter operationen var der komplet motilitet, sensibilitet og elektrisk irritabilitet. Den mikroskopiske undersøkelse av transplantatet viste et stort antal normale (»intakte«) nervebunder. Av dette bemerkelsesverdige resultat trækker nu GLUCK en del vidtgaaende slutninger angaaende regenerationsmekanismen, som neppe er holdbare.

JOHNSON (1882) transplanterte et stykke av n. ischiadicus fra en kanin over i en likestor defekt i n. ischiadicus paa en høne. Ved undersøkelsen 23 dage senere fandt han ingen regeneration av det transplanterte stykke.

Av ASSAKYS (1886) 5 transplantationsforsøk kan man kun ta 2 i betragtning; de andre 3 forløp ikke aseptisk. I de 2 aseptiske forsøk blev et 3 cm. langt stykke av n. ischiadicus fra høns implantert i en likestor defekt i n. ischiadicus hos kaniner, der dræptes 35 respektive 68 dage efter operationen. Ved undersøkelsen fandtes ingen nye nervefibre i transplantaterne.

HUBER (1895) gjorde spørsmålet om kirurgisk dækning av nerve-defekter til gjenstand for indgaaende undersøkelser. I 14 forsøk fjernet han op til 8 cm. av n. ulnaris eller n. medianus paa hunde og indsatte isteden stykker av n. ischiadicus fra katter. I de tilfælder, som overlevet transplantationen 37 dage eller mere, fandt HUBER, at nye fibre var vokset ind i transplantatet og tildels hadde vokset gjennom det. Og han konkluderer av sine forsøk, at implantation av et nervesegment er alle andre metoder (tubulærsutur, sutur à distance, lapdannelse, anastomosering med nabonerver) overlegen, hvor det gjælder at dække en defekt i en perifer nerve, naar defekten er saa stor, at en direkte forening av de 2 ender ikke er mulig.

FORSMANNS transplantationsforsøk (1900) er av stor interesse. FORSMANN implanterte nervestykker i relativt smaa defekter (7 mm.) i kaniners n. ischiadicus. Transplantatet blev forenet med nerven ved fiksationstraade og omgitt av smaa kollodiumtuber. FORSMANN kom til følgende resultater. Transplantation av et nervesegment fra en kanin til en anden ind i en nerve-defekt gir en langt fuldstændigere regeneration av den perifere ende, end om de 2 nerveender var blitt forbundet med hinanden ved en traad. Transplanteres istedenfor kaninnerve et stykke av en duenerve (altsaa heteroplastik), faar man ikke bedre resultat, end om der var sat ind en traad, og ved anvendelsen av andet heteroplastisk materiale (marsvin og froskenerver) uteblir enhver regeneration av den perifere stump. Ifølge FORSMANNS eksperimenter er der altsaa ikke alene forskjell mellem et homoplastisk og et heteroplastisk nervesegment, men mellem disse sidstnævnte er der forskjelligheter fra art til art.

I 1901 publicerte BALLANCE og STEWART sine undersøkelser om periferes nervers kirurgi. De gjorde nogen faa (autoplastiske) nervetransplantationer. 4 uker efter transplantationen fandt de ingen nydannede nervefibre i det transplanterte segment, men 5 uker efter og senere fandtes — væsentlig i transplantatets kortikale avsnit — en del nydannede fibre

Transplantatet forholder sig herunder passivt, sier disse forfattere, og gjen-nemvokses av Schwannske celler, hvorfra nye nervefibre utdifferentieres.

MÜNZER og FISCHER søkte (1906) ved eksperimenter at bringe paa det rene, hvor stor defekt i en perifer nerve kan utfyldes ved spontan re-generation uten nogensomhelst kirurgisk dækning av det manglende avsnit. For at finde dette eksciderte de 1 cm. av n. ischiadicus paa smaa hundehvalper — ialt 11 stykker. For at hindre retraktion av nerveenderne fiksertes disse til omgivende muskulatur ved en traad. Ved senere undersøkelser fandtes i 4 av de 11 eksperimenter komplet motorisk og sensibel paralyse, i 4 til-fælder komplet regeneration og i 3 tilfælder en maatelig nervefunktion.

MARINESCO (1907) finder som resultat av mange undersøkelser, at auto- og homoplastiske nervetransplantationer lykkes, og taler om degeneration av de heteroplastiske.

De mest betydningsfulde eksperimentelle undersøkelser over fri trans-plantation av nerver er gjort av BASIL KILVINGTON (1908). KILVINGTON transplanterte paa hunde og anvendte elektrisk undersøkelse for at kon-statere resultatene. Histologisk undersøkelse av de transplanterte stykker mangler, men hans funktionsprøver er saavidt fuldstændige, og resultatene av forsøkene er indbyrdes saavidt overensstemmende, at de maa tillægges den største vegt.

KILVINGTON gjorde 7 *autoplastiske* transplantationer, hvori lengden av det implanterte stykke varierte mellem $\frac{3}{4}$ tomme og 2 tommer. Den elek-triske undersøkelse utførtes 103—130 dage efter implantationen. I 2 av de 7 tilfælder kom der rykning i tilsvarende gebet ved elektrisk irritation av nerven ovenfor transplantatet med det samme minimum av strømstyrke, som skulde til for at irritere den intakte nerve. I de resterende 5 tilfælder var ledningen ikke fuldt saa god, men næsten likesaa god, d. v. s. der krævedes litt sterkere strøm for at faa rykning. Det er uten betydning for resultatet, om det implanterte nervestykke er fra en anden nerve, eller om man implanterer det samme stykke, som uttages. Heller ikke gjør det nogen forskjell, om segmentet implanteres med sin centrale ende mot peri-ferien eller mot centrum. Makroskopisk-anatomisk hadde transplantatet nogenlunde samme utseende som en normal nerve, men manglet dennes faste konsistens.

I 5 tilfælder blev n. ischiadicus gjennemskaaret paa 2 steder i en av-stand av 2 tommer uten at løftes ut av sit leie og derpaa straks suturert paa begge steder. (Dette er altsaa ikke egentlig fri transplantation.) — Efter 80—100 dage var der komplet motorisk og sensibel funktion.

Av *homoplastiske* transplantationer gjorde KILVINGTON 4. Omtrent 1 tomme av n. ischiadicus blev implantert paa en anden hund, efterat der

av dennes n. ischiadicus var fjernet like meget. Efter 115 og 134 dage fandtes god rykning for faradisk strøm i 3 tilfælder og saagodtsom ingen rykning i 1 tilfælde. Anatomisk var transplantaterne vel indhelet og vel bevaret; de var adhærente til omgivelserne og manglet den normale nerves skinnende hvite farve.

Saa forsøkte KILVINGTON i 4 tilfælder at dække en defekt i hundens n. ischiadicus ved et stykke av n. ischiadicus fra kanin (*heteroplastik*).

Ved implantation av 1 og 1½ tomme lange nervestykker kom der i 2 tilfælder ingen rykning ved elektrisk undersøkelse 86 og 143 dage senere. — I 2 andre tilfælder var resultatet av elektrisk undersøkelse »fairly satisfactory«.

I sin konklusion anbefaler KILVINGTON anvendelse av autoplastiske implantationer av nervevæv til dækning av nervedefekter.

DUROUX's eksperimentelle undersøkelser over nervetransplantation er fra 1911. Fra n. saphenus paa laaret uttoges 5 cm. og implantertes i en 3 cm. lang defekt i n. peroneus paa samme hund. Der kom straks fænomener av paralysen i n. peroneus, men efter nogen dage bedredes dette, og den 15de dag kunde hunden gaa uten tegn paa paralysen, og Duroux utbryder: »Le résultat fut donc parfait«. Et paralel-forsøk gav efter 15 dage samme udmerkede resultat. 2 andre autoplastiker er efter Duroux's mening ikke iagttaaet længe nok.

Elektrisk og histologisk undersøkelse mangler, og det er uten videre klart, at disse forsøk intet viser angaaende regeneration eller funktion i n. peroneus.

Ogsaa ved sine homo- og heteroplastiske transplantationer har DUROUX nøiet sig med at konstatere dyrets motilitet under gang. Elektrisk og histologisk undersøkelse mangler ogsaa her. Ved homoplastisk transplantation faar Duroux »komplet helbredelse« (d. v. s. normal gang) efter 15, ja i et tilfælde endog efter 6 dage og ved heteroplastisk transplantation likeledes »komplet helbredelse« efter 15 dage.

DUROUX's forsøk kan ikke tillægges nogen videnskabelig betydning. Efter alt hvad vi vet om nerveregeneration, kan vi bestemt utelukke, at retablering av den normale gang hos disse hunde skyldes regeneration og funktion i det transplanterte nervesegment; selv ved direkte og primær nervesutur kommer regeneration og motilitet aldrig istand saa hurtig som efter 15 dage. Men Duroux's eksperimenter er ikke destomindre av interesse, fordi de viser, hvorledes en lamhet hos hunde kan maskeres ved, at nabomuskler vikarierende overtar de lammede musklers funktion. Paa denne maate forklarer jeg den hurtig tilbakevendende gang. I indledningen til dette arbeide har jeg ut fra mine erfaringer om ischiadicuslamhet hos

katter pekt paa dette og advaret mot at bruke dyrets spontane bevægelser under gang alene som en indikator for nervefunktion og regeneration, og Duroux's forsøk viser, at dette var berettiget. Jeg benegter ikke, at dyrets spontane bevægelighet er av interesse for bedømmelsen av nervefunktion, men hvad jeg vil understreke er, at *den alene* ikke er noget fyldestgjørende kriterium for funktion og endnu mindre for stedfunden nerve-regeneration. Dette er tidligere fremhævet av VANLAIR og FALKENHEIM.

For kort at rekapitulere de eksperimentelle resultater har PHILIPPEAUX og VULPIAN, GLUCK, BALLANCE og STEWART ved histologiske undersøkelser fundet regeneration av autoplastiske transplantater, FORSMANN av homoplastiske og enkelte heteroplastiske. HUBER paaviste regeneration av heteroplastisk implanterte segmenter, mens ASSAKY ikke fandt nogen saadan.

Og BASIL KILVINGTONS forsøk gav 100 % vellykkede autoplastiker, 75 % vellykkede homoplastiker og 50 % vellykkede heteroplastiker, — alt paavist ved elektrisk undersøkelse av nervens funktion.

Søker vi nu av de ovenfor refererte resultater, der er vundet ved eksperimentelle undersøkelser, at danne os en forestilling om den betydning, fri transplantation av nerver kan ha i praktisk kirurgi, da vil det indrømmes, at vi vanskelig kan samle dette materiale til noget helt og klart billede, og at vi endnu kun i svake omrids øiner nervetransplantationens virkefelt og begrænsning.

Paa mennesker er implantation av et nervesegment mellem den centrale og perifere stump av en overskaaren nerve ikke ofte utført. I de allerfleste tilfælder av nerveoverskjæring lykkes det at bringe de 2 ender sammen, saa de direkte kan forenes ved sutur, og det er klart, at dette er den ideale metode til retablering av funktionen.

Men i en del tilfælder av defekt i perifere nerver lykkes det ikke at forene de to nerveender. Slikt kan hænde efter fjernelse av svulster, der er utgaat fra nerven selv, eller har grepet over paa denne fra dens nærmeste naboskap; det kan indtræffe ved læsioner med knusning av nerve-substans, ved komplicerte frakturer eller ved skudsaar eller stiksaar med eller uten infektion.

Til at gjenoprette den for ekstremitetens funktion nødvendige nerveledning har man da valget mellem flere metoder, av hvilke den frie transplantation har været litet anvendt. De kliniske erfaringer om frie nerve-transplantation er derfor faa, og resultaterne er litet skikket til at vise metodens værdi.

Av de beretninger om nervetransplantation hos mennesker, som er fremkommet, siden ALBERT første gang utførte denne operation, har en del været mig utilgjengelig i original; for dissers vedkommende har jeg derfor

maattet nøie mig med de noksaa kortfattede referater i Jahresberichte für Chirurgie eller med de samlereferater, som er offentliggjort, av hvilke det første skyldes HUBER (1895). Huber hadde indtil da fundet 13 tilfælder beskrevet. Senere er denne statistik ført videre av PETERSON, hvis kasuistik i 1899 tæller 20 tilfælder, og av SHERREN, som indtil 1906 hadde samlet 30 kasus. Siden 1906 har jeg fundet referert kun 2 tilfælder av nerve-transplantation hos mennesker (STIRLING og DUROUX), hvilket viser, at denne operation har nytt meget liten popularitet.

Dog synes der at skulle komme en forandring heri. De mange nerve-læsioner, som under verdenskrigen kommer til behandling, har bragt metoden frem igjen, og FÖRSTER meddelte paa den ortopædiske kongres i Berlin 8de febr. 1916, at han i 9 tilfælder hadde dækket nervedefekter ved autoplastisk transplantation; resultaterne kunde endnu ikke bedømmes, da for kort tid var forløpet siden operationerne.

De 32 tilfælder av nervetransplantation har jeg samlet i nedenstaaende tabeller, idet jeg har delt dem i 3 grupper: *auto-, homo- og heteroplastiske*.

Autoplastik.

Nr.	Operator. Naar publicert.	Pat. alder og kjø.	Til hvilken nerve er der transplantert.	Indikation.	Defektens størrelse.	Operationsmetode.	Primær eller sekundær operation.	Efterundersøkelse.
1.	Dean, ref. av Sherren 1906.	?	N. radialis.	Fractura humeri. Ruptura n. radialis.	3 tommer.	Implantation av patientens n. radialis fra dens periferie avsnit.	?	5 aar. Alle muskler innerverte av n. radialis bevæges voluntært og reagerer for faradisk strøm paa vanlig vis.
2.	E. Atkinson, 1890. Brit. med. Journal 1890. Vol. 2. Sept. 13.	5 aar gl. gut.	N. ischiadicus.	Ved et uheld blev der under en atypisk hofteledsreseksion fjernet ca. 1 tomme av n. ischiadicus.	1 tomme.	Det resecerede stykke av nerven blev straks implantert i defekten. Katgutsutur.	Primær.	Dagen efter operationen var der komplet anæstesi av benet. 5 dage senere begyndte sensibilitet at vende tilbage til tærne. Gutten følte „the touch of a pin in any part of the limb“. 16 dage efter operationen kunde barnet lokalisere berøring av en blyantsspids.

Homoplastik.

3.	Albert, (1876). Wiener med. Presse 1885, nr. 39 og 41.	40 aar gl. mand.	H. n. medianus paa underarmen.	Operert for æden gang for et reciderende sarkom i n. medianus. Reseksion av nerven.	3 cm.	Implantation av n. tibialis fra et amputert ben. Katgutsutur.	Primær.	Saaret tilhelet. Ingen efterundersøkelse senere.
4.	Albert, (1881). Wiener med. Presse 1885, nr. 39 og 41.	61 aar gl. mand.	H. n. ulnaris ved albuen.	Multiple svulster i flere nerver. (Neurofibromer?) Reseksion av n. ulnaris.	10 cm.	Implantation av 10 cm. fra n. tibialis fra et amputert ben. Katgutsutur.	Primær.	Det implanterte nervesegment nekrotiseres og udstøttes.

5.	MayoRobson, (1888). Brit. med. Journal 1889, vol. 1, pag. 244.	14 aar gl. H. n. medianus ved haandledet.	Tumor n. mediani. Resektion av nerven.	Re- 2 1/2 tom- me.	Implantation av et stykke fra n. tibialis fra et amputert ben. Nerve-segmentet blev baaret fra et operationsrum til et andet i varmt karbolvand. Katgutsutur.	Sekundær d.v.s. 48 timer efter transpl. kunde den svæ-keste berøring i haandens medianusgebet lokaliseres. Der var nogen atrofi af abductor og flexor brevis pollicis, men de var ikke helt lamme.	36 timer efter opr. lokaliseres svæk berøring. 5 uker efter transpl. kunde den svæ-keste berøring i haandens medianusgebet lokaliseres. Der var nogen atrofi af abductor og flexor brevis pollicis, men de var ikke helt lamme.
6.	Ward, 1890. Remarks on nerve grafting. By E. Atkinson. Brit. med. Journal. Sept. 13, 1890, vol. 2, pag. 624.	42 aar gl. N. medianus.	Recidiverende tumor i n. medianus lige ovenfor albueddet. Resektion av nerven.	1 3/4 tom- me.	Implantation av et segment av n. medianus fra en amputert arm.	Primær.	17 mndr. efter transplantationen var thenaratrofi. Abduktion og opposition av tommelen umulig; "the touch of a pin could everywhere be distinctly localised".
7.	Heath, 1893. The Lancet. 1893, vol. 1, pag. 1194.	21 aar gl. N. ulnaris.	Tumor i n. ulnaris. Resektion. Der fulgte motorisk paralyse.	2 1/2 tom- me.	Implantation av et stykke fra n. tibialis fra et amputert ben. Silkesutur.	Sekundær 4 dage efter re-sektionen.	1 aar efter operationen var der ingen ledning i n. ulnaris.
8.	Maydl og Kukul. Chipault: L'état actuel de la chirurgie nerveuse, e. 2, pag. 493.	?	N. ischiadicus. Resektion av n. ischiadicus.	10 cm.	Implantation av n. ischiadicus fra et amputert ben.	Primær.	Recidiv av tumor nødvendiggjorde amputation av ekstremiteten 2 mndr. senere.
9.	Kaufmann. (1880). Revue des sciences médicales. 1884. T. 24, p. 305. Ref. efter Sherren.	?	N. radialis. Resektion av n. ischiadicus.	4 cm.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en hund. Silkesutur.	Sekundær	Der fulgte feber efter operationen. Sidste efterundersøkelse 2 mndr. efter transplantationen.

Heteroplastik.

Heteroplastik. (Forts.).

Nr.	Operator. Naar publicert.	Pat. alder og køn.	Til hvilken nerve er der transplanteret.	Indikation.	Defektens størrelse.	Operationsmetode.	Primær eller sek. operation.	Efterundersøkelse.
10.	Damer Harrison. Clin. Soc. Trans. 1892, vol. 25, p. 106.	13 aar gl. gut.	N. medianus.	11 uker for indreggelsen faldt en glasplate over haandleddet og gjennenskar n. medianus og mange senere Suppuration. — Lammelse av n. medianus. "Glossy skin".	2 tommer.	Implantation av 2 tommer av en katunges n. ischiadicus, Katgutsutur.	Sekundær 11 uker efter læsionen.	Primær heling. 3 dage senere føles knappenaalsstik paa tommelen og 1ste phalanx av 2den og 3dje finger. 8 mndr. efter transpl. kan han oppnå flere tommelfinger, men fleksion er ufuldstændig.
11.	Gersun. Ref. efter Sherren.	?	N. medianus.	Resektion av n. medianus for neurom ovenfor haandleddet.	6 cm.	Implantation av 6 cm. fra n. ischiadicus av en kanin.	Primær.	2 mndr. efter operationen begyndte sensibilitet at vende tilbage. Ingen undersøkelse senere.
12.	F. Lange. Verhandl. d. deutsch. Gesellsch. für Chir. Berlin 1882, vol. 11, p. 55.	?	N. radialis.	Resektion av 4 tommer av n. radialis paa gr. av neurom.	4 tommer.	Implantation av 4 tommer av n. ischiadicus fra en hund.	Primær.	1 aar efter transplantationen var der paralyse av n. radialis.
13.	Vogt. Ref. efter R. Peterson (Journal of med. Sciences).	?	N. radialis.	Skud i overarm. Blivende paralyse av n. radialis.	8—10 cm.	Implantation av et 12 cm. langt segment av n. ischiadicus fra en hund.	Sek. 16 mndr. efter læsionen.	Suppuration. Ingen forandring 2 mndr. efter operationen.
14.	Landerer. 1888. Deutsche Zeitschr. für Chir. 1889, Bd. 28.	18 aar gl. kvinde.	N. radialis paa overarmen.	Phlegmone brachii 1½ aar for transpl. 3/4 aar efter at sygdommen begyndte, blev der fjernet sekvestre fra humerus og ved et uheld et stykke av n. radialis. Komplet radialislammelse.	3½ cm.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en kanin; den indlagdes uten sutur i defekten; bløtdele syddes over.	Sek.	Primær heling. 10 uker senere kunde pat. aktivt løfte haanden over horisontalen.

- | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|--|---|------------------------------|---|
| 15. | Mayo Robson, 1896. Brit. med. Journal 1896, vol. 2, oct. 31. | 29 aar gl. N. ulnaris. mand. N. medianus. | 7 aar før operationen faldt pat. og skar sin h. overarm paa en ljaas. Paralyse av n. medianus og ulnaris. Defekt i ulnaris og medianus. | Defekten i n. medianus var 2 1/3 tomme, i ulnaris 3/4 tomme. | Implantation av n. ischiadicus fra en kanin i ulnarisdefekten. Implantation av en rygmarv fra en kanin i medianusdefekten. Katgutsutur. | Sek. 7 mndr. efter læsionen. | 17 dage efter opr. var sensibilitet vendt tilbage til hele volarflaten av 1ste finger og i phalanx av 2den finger.
2 mndr. efter opr. føltes paræstesi i ulnarisgebetet.
6 aar efter opr. nekke maalar atrofi av h. underarm (11 tommer). Fingrene kan boies, og den eneste svake muskel var abd. pollicis, som var meget svak. Komplet sensibilitet paa underarm og haand. Alle haandens og underarmens muskler undt. abd. p. reagerer for faradisk strøm. |
| 16. | E. Atkinson, 1890. Brit. med. Journal 1890, vol. 2, pag. 624. | 22 aar gl. N. ulnaris. mand. | Dilacerert saar paa underarmen. Paralyse av n. ulnaris. | 2 tommer. | Implantation av n. ischiadicus fra kanin. Nervesegmentet bragtes til operationsrummet i en skaal med varmt karbolvand. | Primær. | 3 mndr. efter transplantationen "sensation complete in all fingers on both aspects with the exception of the last two phalanges of the little finger. Has fairly strong grip. — Can flex all his fingers on the palm except that the little finger stops short of the palm by 1/2 inch." |
| 17. | Mitchell Banks, Ref. fra R. Peterson Am. Journ. of med. sciences. | ? | Resektion av n. ulnaris for neurom. | 4 tommer. | Implantation av n. ischiadicus fra en hund. | Primær. | Følelse siges at være vendt tilbage 36 timer efter transplantationen. |
| 18. | Moullin, 1893. Lancet 1893, June 24. | 28 aar gl. N. radialis. mand. | Fractura humeri uten konsolidation. Operation. | 2 tommer. | Implantation av 2 tommer av n. ischiadicus fra en hund. Katgutsutur. | Sek. | Primær healing.
5 dage efter transpl. var der næsten normal sensibilitet i fingrene.
15 dage senere var sensibiliteten næsten normal. Der kom svar muskelskatrofi og ingen aktiv bevægelighed. |

Heteroplastik. (Forts.).

Nr.	Operator. Naar publicert.	Pat. alder og køn.	Til hvilken nerve er der transplanteret.	Indikation.	Defektens størrelse.	Operationsmetode.	Primær eller sek. operation.	Erterundersøkelse.
19.	Brodley. 1896. Lancet 1896, vol. 1, pag. 1592.	Yngre mand (soldat).	N. radialis.	Fractura humeri. Paralyse av n. radialis. Resektion av et aragtig parti.	5 cm.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en hund. Katgutsutur.	Sek. 2 mndr. efter læsionen.	2 aar og 10 mndr. efter transplantationen var der ingen bedring av paralyse.
20.	White. Ikke pub. Ref. av Peterson 1899.	Kvinde.	N. radialis.	Tumor n. radialis. Resektion. Senere forntes de 2 ender ved en lap fra den ene stump. Ingen bedring. Adskillig senere gjordes transplantation.	?	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en hund.	Sek. længe efter resectionen.	Ingen blivende bedring av paralyse.
21.	Ferguson. Ikke pub. Ref. av Peterson 1899.	28 aar gl. kvinde.	N. medianus.	Neurom paa n. medianus. Resektion. Defekten dækkedes ved katguttraade. 3 mndr. senere var der atrofi av thenar. Ingen bedring av sensibiliteten.	1/3 tomme.	Implantation av n. ischiadicus fra en hund. Silkesutur.	Sek. 3 mndr. efter resectionen.	Bedring i sensibiliteten. 8 dage efter transpl. følelse i tommelen og 2den, 3dje, 4de finger. 4de finger hyperaestetisk. Følelse rundt neglene. 6 uker efter transpl klager over paræstesi i fingrene. Ingen motilitet. 3 mndr. efter transpl. begyndte bedring i motilitet. 2 aar efter transpl. var haanden endnu lam, men brukbar. Sensibilitet er kommet igjen for gjenstande større end traad og hestehaar.

22.	Peterson. 1899. Am. Journ. of med. sciences. 1899, vol. 117, nr. 4, p. 377.	24 aar gl. mand.	N. medianus og n. ulnaris.	"Cirkelsag-læsion av 7 cm. ovenfor håndleddet. Overskaarne sener sutureres. Suppuration. Sek. tilheling av saaret. Følelse ophævet i medianus- og ulnarisgebetet. Der kom ulcerationer paa fingrene og fleksionskontraktur av disse. Atrofi av thenar og antithenar. Degenerationsreaktion i haandens smaa muskler.	3 1/3 cm. i begge nerver.	I begge defekter blev der implanteret et stykke av n. ischiadicus fra en hund. Suture med kangurusener.	Sek. 5 mndr. efter læsionen.	24 timer efter operationen var der følelse i tommelen. Fra 8de til 21de dag tilgængende følgende arealer i haanden. Ulcerationerne forsvandt. 3 mndr. efter opr. kunde han arbejde og sa, at haanden var saa god som nogensinde. Følelse god undtagen toppen av 2den, 3dje og 4de finger. 4 mndr. efter opr. forfros han haanden. 1 aar og 3 mndr. efter transpl. Følelsen i palma komplet. Atrofi av interossei og thenar og antithenar. Ingen abduktion eller adduktion av fingrene
23.	Powers. 1904. Annals of Surgery 1904. November.	18 aar gl. mand.	N. peroneus.	Komplicert fraktur av fibula. Ruptur av n. peroneus.	3 3/4 tommer.	Implantation av n. ischiadicus fra en hund. Katgutsuture.	Sek. opr. 6 uker efter læsionen.	8 aar efter transplantationen lammelse og anæstesi i peroneusgebetet.
24.	Durante. Ref. efter Sherren.	?	N. peroneus.	Sarcoma fibulæ. Resektion av 5 cm. av n. peroneus.	5 cm.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en hund.	Primær.	Amputation av benet paa grund av recidiv. Det transplanterte nerverestykke var forsvundet.
25.	Bowlby. 1902. The Lancet 1902, vol. 2, pag. 199.	Mand. Alder?	N. medianus.	Fibrom. Resektion av 3 tommer av n. medianus nedenfor albuen.	3 tommer.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus og rygmarven fra en kanin.	Sek. nogen mndr. efter læsionen.	Nogen mndr. efter transplantationen havde pat. god følelse i hele medianusgebetet. Ingen tilbageværende motilitet.
26.	Barker. Ref. av Head og Sherren. "Brain" 1905 pag. 316.	26 aar gl. mand.	N. ulnaris.	Geværskud gennem armen, paralyse av n. ulnaris.	5 cm.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en kat.	Sek. 6 mndr. efter læsionen.	7 mndr. efter opr. var følelse for "prik" begyndt at vende tilbage, men ikke for let berøring. Motorisk ingen bedring. Ingen senere undersøkelse.

Heteroplastik. (Forts.).

Nr.	Operator. Naar publicert.	Pat. alder og køn.	Til hvilken nerve er der transplanteret.	Indikation.	Defektens størrelse.	Operationsmetode.	Primær eller sek. operation.	Efterundersøelse.
27.	Kennedy. Ref. efter Sherren.	?	N. medianus N. ulnaris.	Læsion av n. medianus. og ulnaris.	5 tommer.	Implantation av 5 tommer av n. ischiadicus fra en sau.	Sek. 11 mndr. efter læsionen.	4 aar efter operationen var der en viss bedring i haandens sensibilitet, men ikke nok til at betragte kassen som vellykket.
28.	Ballance og Stewart 1902. Travaux de neurologie chir. et orthopédique.	Soldat. Alder?	N. ulnaris.	Geværskud.	2 tommer.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en sau.	Sek. 11 mndr. efter læsionen.	2 mndr. efter transpl. føltes naalestik i ulnarisgebetet. 6 mndr. efter operationen var der ikke længere anæstesi. Ingen bedring i motiliteten.
29.	Ballance og Stewart. Officer. Travaux de neurologie chir. et orthopédique	Officer. Alder?	N. ischiadicus.	Geværskud.	6 tommer.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en okse.	Sek. 9 mndr. efter læsionen.	5 mndr. efter transpl. var der ingen bedring i sensibilitet eller motilitet.
30.	Maydl og Kukulka. Chipault. t. 2, p. 484.	?	N. radialis.	Paralyse av n. radialis.	?	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en hund.	Sek. 8 mndr. efter læsionen.	1 mnd. senere: ingen forandring.
31.	Stirling. 1907. Jahresbericht für Chirurgie 1907.	?	N. medianus.	7 cm. lang defekt i n. medianus. Den dækkedes med katguttråde. Suppuration. 6 uker senere gjordes transplantation.	7 cm.	Implantation av et stykke av n. ischiadicus fra en hund.	Sek. 6 uker efter operationen.	3/4 aar senere var der fuld bevægelighed og næsten komplet sensibilitet.

32. Jaboulay 1911 (ref. av Duroux), Lyon chir. 1912, t. 8, nr. 6.	?	N. medianus. N. ulnaris.	Knivstik i sulcus bicipitalis. Resultatlos suture av n. ulnaris og medianus. 5 mndr. senere tiltagende atrofi av tilsvarende muskler. Der operertes en defekt paa ca. 6 cm., dækning ved traad. — 1 aar efter læsionen var der fremdeles komplet lamhet og anæstesi. Der gjordes da nervetransplantation.	Implantation av 15 cm. av n. ischiadicus fra en hund mellem de 2 ender av medianus og ulnaris.	Sek. 1 aar efter læsionen.	Om aftenen efter opr. fik pat. rykninger i fingrene. 3 dage efter opr. kunde haanden bøies, abduceres og adduceres. 5 dage efter opr. var der sensibilitet i thenar. 1 aar efter opr. er der komplet følsomhet i medianus- og ulnaris-gebetet. Bevægeligheden derimot er ufuldstændig, uen noget fremskridt. Han kan dog skrive.
---	---	-----------------------------	---	--	----------------------------	---

Vi skal nu undersøke denne statistikk for at finde, hvad man kan lære av den. Dette er ikke meget, ti man maa stryke den ene observation efter den anden som værdiløs, og av statistikens 32 numere blir der kun 14 tilbake. Aarsaken til statistikens relativt ringe værdi er nu flere.

For det første er der i de fleste — nemlig i 24 — tilfælder anvendt heteroplastisk materiale, som vi vet er det mindst skikkede. Dernæst er efterundersøkelserne ufuldstændige og i mange tilfælder utført saa tidlig efter operationen, at nervefunksjon ikke kunde være vendt tilbake, og det meddelte resultat kan derfor ikke betraktes som det endelige.

Dernæst er de kasus, hvor man staar overfor spørsmåal om dækning av en nervedefekt, slet ikke hyppige, og det falder ikke ofte i en kirurgs lod at behandle mere end ett saadant tilfælde; kun Maydl og Kukula, Albert, Mayo Robson, Atkinson og Ballance og Stewart har hver gjort 2 nerve-transplantationer; de andre kirurger, der har anvendt metoden, har kun gjort det én gang. Følgelig har den enkelte operatør hat liten personlig erfaring paa dette felt, hvor en fuldstændig undersøkelse og et heldig operativt resultat forutsætter et nøie kjendskap til nervesystemets fysiologi, anatomi og histologi.

Og at de refererte tilfælder, hvad angaar den tekniske fremgangsmaate ved operationen heller ikke er ensartede, fremgaar desuten derav, at den første frie nervetransplantation paa mennesker blev gjort av ALBERT i 1876 og den sidste av JABOULAY i 1911; den forandring og utvikling, som baade den operative teknik og vore funktionsprøver har gjennomgaat i dette tidsrum, er altfor vel kjendt til, at jeg behøver at opholde mig derved.

Vi vet desuten, at den vanlige primære nervesutur ikke uten undtagelse fører til det forønskede resultat. Det hænder altfor ofte — hvor ofte er det umulig at angi — at primær nervesutur utført under de allergunstigste betingelser, der kunde berettigje forventningen om et godt funktionelt resultat, tvertimot kun bringer skuffelse.

Det er mulig, at STOFFELS undersøkelser over nervestammernes indre anatomiske forhold og den opmerksomhet, som man under nervesutur nu er nødt til at vie hensynet til en nøiagtig adaptation, vil føre til mere ensartede og lykkelige resultater av denne operation, og derved fjerne det præg av tilfældighet, som unegtelig har gjort sig gjældende i resultaterne av disse indgrep, og som skyldes indflydelse av faktorer, man ikke har kjendt og ikke har kunnet beherske.

Utfaldet av de nervetransplantationer, der hittil har været utført paa mennesker, har paa samme maate som ved direkte nervesutur i nogen grad været git tilfældigheten ivold, d. v. s. resultaterne har været influert av faktorer, som operatøren ikke kjendte og ikke har forstaat at vurdere. Jeg

vil eksempelvis her kun nævne én saadan faktor: alderen. Vi vet endnu ikke med nogen grad av sikkerhet, om der er nogen aldersgrænse for forekomsten av nerve-regeneration hos mennesker. Vi vet kun, at nerve-regeneration hos baade mennesker og dyr er livligere, jo yngre individet er. Og netop dette moment, der maa tillægges kapital betydning for prognosen av en nervelæsion, har man ofret liten omtanke, og i en del av referaterne av de utførte nervetransplantationer er patientens alder ikke engang nævnt. Det er selvsagt, at et mislykket resultat av en nerveoperation (f. eks. en transplantation) hos gamle mennesker ikke utelukker et godt resultat hos yngre individer og endnu mindre hos barn.

Hvad der dog mest av alt reducerer værdien av dette statistiske materiale, er mangelfulde efterundersøkelser. Her træder generelle angivelser altfor ofte istedenfor præcis status, mens det altfor korte tidsrum, som er forløpet mellem transplantationen og efterundersøkelsen, forvisser os om, at den paastaaede bedring — hvis den virkelig er der — i ethvert fald ikke kan skyldes indgrepet. I mange tilfælder er dog bedringen ikke virkelig, men kun tilsynelatende, og flere av meddelelserne er paa dette punkt aapne for kritik.

Jeg vil her fæste opmerksomheten paa den av mange operatører observerte tidlig tilbakevendende sensibilitet efter transplantationen (Atkinson, Mayo Robson, Mitchell Banks, Damer Harrison, Moullin, Ferguson, Peterson, Duroux). Enkelte iagttok en bedring i sensibiliteten allerede 24—36 timer efter operationen og synes at tilskrive transplantationen æren for dette resultat. En saadan konklusion er neppe tillatt, selv om observationen i og for sig var rigtig. Men dette er man heller ikke sikker paa. Peterson prøvet sensibiliteten 24 timer efter transplantationen »by a pin«. Atkinson ved »the touch of a pin-point«, og Duroux angir slet ikke, hvorledes sensibilitetsprøven utførtes.

Nu har det længe været kjendt, at der efter overskjæring av f. eks. en av haandens nerver paa steder, som derved er gjort ufølsomme for smerte ved naalestik, blir tilbake følsomhet for tryk av en finger eller av et knappenaalshode. Dette bragte Létievant paa idéen om supplert følsomhet (»sensibilité supplée«). Ved en række iagttagelser viste Létievant, at den saakaldte tilbakevendte sensibilitet ikke var andet end en viss persisterende følsomhet i det angjældende enerverte gebet. Efter overskjæring av n. medianus kunde patienten, der var ufølsom for varme og kulde, utvilsomt føle berøring av et knappenaalshode helt ute i fingrene. Og Létievant viste, at den bevægelse av tommelfingeren, som efter medianusoverskjæring kan simulere opposition, skyldes kontraktion av dens adduktor og fleksorer.

RICHETS tilfælde av komplet medianusoverskjæring uten tap av sensibilitet støttet LÉTIÉVANTS teori, og WEIR-MITCHELL har samlet et antal lignende tilfælder, hvoriblandt forekommer et kasus referert av NOTT, der fjernet en stor cyste fra underarmens volarflate og samtidig hermed 5 tommer av n. medianus, uten at de funktioner, der tilskrives denne nerve, nedsattes i den allerringeste grad.

Létiévant og hans samtidige kjendte ikke til eksistensen av centripetale fibre, der løper sammen med motoriske nerver. Saadanne opdagedes først av SHERRINGTON. HEAD og SHERREN dannet paa grundlag herav sin idé om dyp sensibilitet, og disse forskere undersøkte de dype sensible baners funktion hos mennesker. For at komme til en fuldstændig forstaaelse av den efter nerveoverskjæring resterende følelse lot Head som bekjendt den dorsale radialisgren overskjære paa sin egen venstre arm, og de selv-observationer, han herunder gjorde, bragte klarhet, hvor der før var mørke.

Efter fuldstændig overskjæring av alle sensoriske nerver til huden er angjældende gebet fremdeles følsomt for de irritamenter, der — i ethvert fald i tiden forut for Heads forsøk — sedvanlig anvendtes av kirurger som prøve paa berøringssans. Head fandt, at al slags tryk mot huden i den overskaarne nerves gebet — f. eks. med en blyant — kan opfattes og lokaliseres med temmelig stor nøiagtighet. Derimot kunde han indenfor det enerverte parti ikke skjelne tryk av to blyantsspidser, selv om de stod noksaa langt fra hinanden. Det enerverte hudparti var ufølsomt for varme og kulde; smertefornemmelse kunde kun fremkaldes ved sterkt tryk, og smerten har da en eiendommelig, verkende karakter.

Head fandt videre, at denne dype sensibilitet er tilstede snart efter læsionen, og den synes at komme til haanden i nervebaner, der følger dens sener; gjennemskjæring av n. medianus uten læsion av senerne til haanden lar denne beholde sin følelse for al slags tryk uforandret, mens en samtidig overskjæring av senerne ved haandleddet reducerer den dype sensibilitet.

Dette maa man ha for øie ved bedømmelse av sensibilitet efter nerveoverskjæring, og efterat man ved operationer har søkt at retablere nervefunktion. Ved irritation av hudens føleorganer er det vanskelig at undgaa at utøve et visst tryk, og forat trykvirkningen skal bli saa liten som mulig, maa irritamentet være mest mulig specifikt. Hvis et knappenaalsstik ikke fremkalder smerte, er smertefølelsen ophævet; at patienten føler trykket av knappenalsspidsen og endog kan lokalisere den, skyldes dyp sensibilitet og beviser intet om smertefølelse. (HEAD.)

Med kritik maa man motta beskrivelserne ogsaa av den hurtig tilbakevendende motilitet efter nervetransplantation. Ti det er vel kjendt, at

vikarierende kontraktioner i nabomuskler kan simulere funktioner av muskler, hvis innervation er avbrutt. Særlig hyppig er dette iagttaget for n. medianus' og n. ulnaris' vedkommende.

LÉTIÉVANT beretter, hvorledes Lenoir fjernet et dueeggstort neurom i n. medianus i aksillarregionen uten paafølgende forandring av sensibilitet eller motilitet i haanden.

KÜSTER konstaterte, at der efter eksstirpation av et myxogliosarkom i medianus paa underarmens ovre tredjedel var likesaa god aktiv bevægelighet i fingrene, som før nerven reseceres, og dog viste elektrisk undersøkelse, at de av n. medianus innerverte muskler var sat ut av funktion.

PÉRAIRE og MALLY fjernet 8 cm. av n. medianus paa underarmen paa grund av et lipom i nervestammen hos en 23 aar gl. kvinde. Før operationen var der kun faa fænomener fra n. medianus, væsentlig paræstesier, men ingen lammelser. Efter operationen bevarte patienten alle sine fingres bevægelighet og kunde fortsætte med sit arbeide som syerske; ved elektrisk undersøkelse av haandens muskler fandtes kun m. opponens og abductor pollicis brevis lammet, mens flexor pollicis brevis og mm. lumbricales I og II kontrahertes ved elektrisk irritation av n. ulnaris ved albuen.

GOLDMANN beskriver et tilfælde med resektion av n. ulnaris paa grund av neurom, hvor der efter operationen ikke kom motoriske forstyrrelser i ulnarisgebetet. RÖDER resecerde n. ulnaris, cruralis og n. accessorius for neuromer hos en 21 aar gl. patient. De forstyrrelser, som efterfulgte resektionen, var paafaldende smaa.

HARBITZ omtaler et lignende tilfælde, operert av Løberg. Hos en 40 aar gl. mand eksstirperes et neurofibrom fra n. medianus paa overarmen, hvorved reseceres 3—4 cm. av n. medianus. Efter operationen var der fuld motilitet, men anæstesi i medianusgebetet. 12 dage senere var der bevægelighet av fingrene med undtagelse av, at 1ste og 2den finger ikke kunde bøies i noget led; likeledes var underarmens pronation indskrænket. Sensibiliteten var ophævet paa volarflaten av 2den og 3dje finger.

Disse tilfælder viser, at der efter nerveresektion paa grund av svulster ikke altid kommer saa betydelige utfaldsfænomener, som man paa forhaand skulde vente. Til forklaring av dette har der været anført, at andre nerver under svulstens utvikling kan ha overtatt funktionen. Dette forutsætter, at disse andre nerver, som efter læsionen fremdeles fungerer, ogsaa for læsionen delvis innerverte de muskler, som endnu trods nerverlæsionen kan kontrahere sig. Under svulstens langsomme utvikling gaar formodentlig en del nervefibre til grunde, og de muskler, der innerveres ogsaa fra en anden nerve, maa efterhaanden noie sig med de gjennom denne tilførte kontraktionsimpulser. Ved den operative fjernelse av tumor med dens

nervestamme blir de muskler, der kun innerveres fra den reseverte nerve, uvægerlig lammet, mens de muskler i dens utbredningsgebet, der desuten innerveres av andre nerver, allerede er indstillet paa og opøvet til at følge kontraktionsimpulser alene fra den friske nerve, og disse musklers funktion blir derfor ikke paaviselig nedsat ved resektionen. De nerver, der har overtat funktionen, representerer ikke nye baner, men kun en anatomisk omvei for kontraktionsimpulser og en vei, som ogsaa paa forhaand var tilstede.

Ogsaa efter overskjæring av friske nerver er der iagttat en rapid restitution av sensibiliteten, eller denne er overhodet ikke paavirket av overskjæringen. Dette er observeret av VUCETIC (n. medianus), POTHERAT (n. ulnaris) og THÖLE (n. radialis).

PÉRAIRES og MALLYS nøiagtig undersøkte patient viser, at forklaringen — ialfald i en del tilfælder — er den nys nævnte. Om det er den hele forklaring, er ikke sikkert. Det er vel mulig, at ogsaa musklerne i nogen utstrækning kan vikariere for hinanden, saa at kontraktion i en frisk muskel kan fremkalde bevægelser, der simulerer kontraktion i en lammet nabomuskel, saa man kun ved en nøiagtig elektrisk undersøkelse kommer paa det rene med det virkelige forhold. — Jeg har omtalt dette saa vidt nøie for at vise, at man efter operationer, der tilsigter retablering av en nerves funktion, maa være meget forsiktig med bedømmelsen ogsaa av de motoriske funktioner, og for at præcisere, at resultatet av efterundersøkelserne i vor statistik ogsaa paa dette punkt maa sigtes nøie.

Av de 2 *autoplastiske* nervetransplantationer, der er utført paa mennesker, er det ene tilfælde (Atkinson) ikke undersøkt senere end 16 dage efter operationen og maa derfor utgaa som værdiløst. I det andet (Dean) blev en defekt i n. radialis dækket ved et stykke av en radialisgren fra nervens perifere avsnit. En fuldstændig undersøkelse (ogsaa ved faradisk strøm) 5 aar senere viste komplet funktion.

Av de 6 *homoplastiske* transplantationer utgaar 3, nemlig kasus 3, 4 og 8. Derimot er kasus 5 (Mayo Robson), 6 (Ward) og 7 (Head) undersøkt 3 aar respektive 17 mndr. og 1 aar efter transplantationen og kan medtages. Av disse tre tilfælder viser det ene (Mayo Robson) komplet funktion, i de andre 2 er funktionen ikke vendt tilbake.

Blandt de 24 tilfælder av *heteroplastik* utgaar 11 (nemlig kasus 9, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 24, 28, 29 og 30), fordi de ikke er iagttat længe nok efter operationen. Av de øvrige 13 tilfælder er 3 usikre med hensyn til resultatet. I Damer Harrisons tilfælde (sek. sutur av medianus hos en 13 aar gl. gut) kunde patienten efter 8 mndr. opponere tommelfingeren, mens fleksion var ufuldstændig.

Petersons tilfælde (transplantation til n. medianus og ulnaris) kompli-
cetes under forløpet med en forfrysning, og STIRLINGS tilfælde (n. media-
nus) er heller ikke overbevisende. I alle disse tilfælder har der været
transplanteret til n. medianus eller ulnaris, og som foran anført er disse
nerver vanskelige at bedømme. Stoffel mener, at ingen av disse nerver
kan anvendes, naar det gjælder at prøve en metode, da resultaterne her er
lunefulde og vanskelige at bedømme. — Tilbake staar da 10 tilfælder av
heteroplastik. Av disse er kun 1 (Mayo Robson) vellykket. At dette er
en suksess, lar sig neppe bestride.

Av statistiken fremgaar følgende: *Autoplastisk* nerveimplantation
er gjort 1 gang med gunstig resultat, d. v. s. 100 % *helbredelse*.

Homoplastisk nerveimplantation er utført 3 gange, med gunstig resultat
i 1 tilfælde, d. v. s. 33 % *helbredelse*.

Heteroplastisk nerveimplantation er gjort 10 gange, med gunstig resul-
tat i 1 tilfælde, d. v. s. 10 % *helbredelse*.

Det maa indrømmes, at dette antal av frie nervetransplantationer er
altfor litet til, at man paa dette grundlag tør fælde nogen endelig dom om
metodens praktisk terapeutiske værdi, og at man maa opsætte med en
saadan avgjørelse, til materialet er blit større.

For at bidra til løsningen av disse spørsmål har jeg foretat en række
fri transplantationer av nerver paa dyr og skal nu gaa over til mine

egne undersøkelser over regenerationsforholdene ved fri
transplantation av nerver.

Disse forsøk er utført paa kaniner med n. ischiadicus paa laaret
som forsøksobjekt. Undersøkelsen falder ogsaa her i 3 parallele ræk-
ker — auto-, homo- og heteroplastiker, alt eftersom det implanterte
nervesegment skrev sig fra dyret selv eller fra en anden kanin eller fra
et dyr av en anden art. Før jeg refererer resultaterne av disse under-
søkelser, skal jeg angaaende den tekniske fremgangsmaate bemerke føl-
gende:

Dyrene er operert i æternarkose. Hvis der gjøres homoplastisk eller
heteroplastisk implantation, anbringes begge dyr, baade det, der leverer
nervesegmentet, og det dyr, der mottar det, paa et og samme operations-
bord, hvor de bindes med bakbenene mot hinanden; jeg opnaar derved at
begrænse utstrækningen av operationsfeltet til det mindst mulige og, hvad
der er endnu viktigere, — at transplantatet uten tidsspilde kan føres di-
rekte over fra Eiermanden til den nye vert. Det er en selvfølge, at opera-
tionen foregaar under iagttagelsen av rigorøs aseptik.

Dyrene barberes paa os sacrum og laaret, og operationsfeltet desinficeres med jodtinktur. Hos mottageren incideres hud og fascie, og muskelinterstitiet aapnes paa laarets bakside under nøiagtig blodstansning. N. peroneus avgaar fra n. ischiadicus litt ovenfor poplitæa; den løsnes med lethet fra hovedstammen videre opover laaret, likeledes avløses n. cutan. suræ med. og isoleres opad og nedad fra hovedstammen. Naar et passende stykke (ca. 2—3 cm.) av n. tibialis saaledes forsigtig er isolert, gjennomstikkes nerven opad og nedad med en med naal armert ganske tynd silketraad (karsilke), og mellem de 2 traade og klods ind til disse resekeres det stykke, man vil fjerne. Det er lettere at gjennomstikke nerven før reseksjonen end efter denne, og den traumatiske molest blir derved mindre. Nu uttages fra »giveren« det stykke av n. ischiadicus, der skal implanteres. Det gjøres et par mm. længere end defekten, saaledes at nerven efter implantationen kommer tilbake til sin fysiologiske spændingstilstand. Dette ansees som en fordel. Stramning maa naturligvis undgaaes, da ernæringen lider derved, men paa den anden side kan det ikke ansees hensigtsmæssig, som anbefalet av Duroux, at la transplantatet være 2—3 cm. længere end defekten. Dette overskud av nervesubstans er unødvendig og gjør direkte skade derved, at det forlænger den vei, de utvoksende aksecylindre har at passere, saa helbredelsen forsinkes. Transplantatet anbringes paa en saltvandskompres, og dets ene ende gjennomstikkes med den naal, som allerede har passert den øvre stump av mottagerens n. tibialis. I den anden ende av transplantatet fattes perinevriet med en liten Péans pincet, og under ganske let motstand nærmes transplantatets ende til øvre tibialisstump ved, at traaden knyttes. Paa denne maate opnaaes en ideel adaptation, og det er ikke nødvendig at anlægge mere end denne enkle sutur. Paa samme maate fæstes transplantatets nedre ende ved en enkelt gjennomgaaende knutesutur. Yderligere at sy perinevriet ved cirkulærsutur har jeg fundet ganske overflødig, og det vilde ved sutur av en saa tynd nerve som n. tibialis hos kaniner være en feil at forsøke paa det, da den traumatiske molest derved uvægerlig vilde fremkalde en saa sterk reaktion, at det hele arbeide vilde være spildt.

N. peroneus er urørt (ikke resekert) i alle disse forsøk.

Som suturmateriale har jeg anvendt tyndeste silke (karsilke), der er sterilisert i vaselin, og med dette stof er traaden indsat, naar den anbringes, idet jeg dermed har hat en ganske bestemt hensigt.

Vi vet, at der efter forsækning av vanlig suturmateriale (katgut eller silke) som regel kommer en reaktion omkring traaden i form av rundcelleansamling og undertiden ogsaa av kjæmpeceller. Dette kan gaa saa vidt, at traaden utstøtes, hvilket dog i vore dage under iagttagelsen av den

fuldstændige aseptik kun sjelden forekommer. Men selv fuldstændig aseptisk silke eller katgut virker, naar den forsænkes, som et fremmedlegeme og fremkalder derved nogen reaktion. Dette er ikke tilfælde med vaselin. Vi vet, at vaselin kan injiceres i led uten reaktion fra kapselen (Rovsing), og under mit arbeide med karkirurgi har jeg bekræftet Carrels paavisning, at vaselin ogsaa er ganske harmløs overfor karrenes intima. Det samme gjælder dens forhold til pleura. Under pleurotomi paa frisk pleura hos katter har jeg efter Carrels mønster dækket lungene med vaselinerte silkekompreser og ved senere aapning fundet pleura glat og speilende uten adhærens.

Den opfatning av nerveregeneration, som jeg paa grundlag av mine eksperimenter har dannet mig, nemlig at neurotisering av nervens perifere avsnit saavel som av et eventuelt implantert segment foregaar ved utvoksning av aksecylindre fra den centrale stump, kræver som logisk konsekvens, at nervesutur utføres med den største grad av omhu og nøiagtighet. Næst efter aksecylindrenes egen proliferationsenergi, som vi vet avtar med individets alder, antar jeg, at intet er viktigere for retablering av funktionen end nøiagtig adaptation og saavidt mulig primær heling av nervesuturen. Hermed forstaaes ikke primær heling i SCHIFFS forstand: den har nu kun historisk interesse. Med primær heling av nervesuturen mener jeg det samme, som vi ellers forstaar ved dette begrep i kirurgien, nemlig en saagodtsom reaktionsløs tilheling av et saar uten betændelsesfænomener og med minimal bindevævsutvikling. Vi maa tilstræbe, at de to nerveender vokser sammen med den mindst mulige bindevævsutvikling; det er klart, at et rikelig skrumpende bindevæv paa sammenvoksningsstedet vil kompromittere de unge utvoksende aksecylindres passage over til det perifere avsnit (respektive transplantatet) fra den centrale stump. Betingelsen for primær tilheling er nøiagtig adaptation, og for at sikre dette maa sutur anlægges. Suturen, der er et nødvendig onde, maa være saa tynd som mulig og ikke foraarsake reaktion. Intet suturemateriale tilfredsstiller disse krav i den grad som tynd, vaselinert silke.

Mine præparater viser dette. Kun de autoplastiske transplantationer har interesse for saavidt. Ti vi vet, at baade homo- og heteroplastikerne i og for sig virker positivt kemotaktisk paa rundcellerne, og en eventuel rundcelleansamling omkring suturen i disse segmenter kan derfor ikke uten videre tydes som et reaktionsfænomen mot traaden. Men i de autoplastiske transplantater, som ikke virker positivt kemotaktisk, maa en rundcelleansamling omkring suturen tydes saaledes.

Av mine 15 autoplastiske transplantater er 8 farvede med sølvnitrat eller methylenblaat. Og kun i 1 av disse (K. 42) findes der en rundcelle-

ansamling omkring silketraaden; i de andre 7 tilfælder ligger denne ganske reaktionsløs i nervevævet.

Naar suturerne er anlagt og segmentet kommet paa plads, maa operationsfeltet være ganske tørt. Ikke en draape blod maa faa lov at sive ut i vævet omkring nerven og ind i nervesaaret. Vi vet, at de unge utvoksende aksecylindre ikke trænger ind i blodkoagler; det er paavist av Cajal og bekræftet av Stoffel. For at hindre, at blod eller rundceller eller bindevæv skulde trænge ind i saaret i nerven, har man forsøkt at dække suturstedet med forskjellig materiale.

DENK, KIRSCHNER og VOELCKER dækker suturstedet med en fettfascielap, HASHIMOTO og TOKUOKA, STOFFEL og HIRSCHEL trækker efter FORAMITTIS mønster en formalinhærdet kalvearterie over suturstedet. LOTHEISEN dækker dette med formalinhærdede gelatinerør, PAYR med magnesiumtuber og andre med friskt eksciderte venesegmenter.

Alle saadanne foranstaltninger tror jeg man bør undlate. Ti anbringelsen av disse dækningsmidler komplicerer indgrepet, og saa langt fra at begunstige transplantatets ernæring efter operationen vil de dækkende fascier eller rør vanskeliggjøre den. Disse fascier og vener gjør direkte skade ogsaa paa anden maate. KREDEL har vist, at der i en saadan fasciefettlap foregaar en betydelig skrumpning, og at den senere komprimerer nerven, selv om den blev løst omviklet. v. HOFMEISTER fandt ved operation 5 mndr. efter en radialissutur, hvorved suturstedet blev lagt ind i et stykke av en vene, at denne hadde skrumpet, og at nerven svarende hertil var omdannet til en fast, rund, glat, fibrøs streng, der av den skrumpne vene var strangulert, saa den paa længdesnit ikke viste nogen nervefibre.

Omvikling av nerven og suturstedet med vener eller fett eller fascier kan neppe hindre, at blod eller rundceller eller bindevæv trænger ind mellem de to sammensyde nerveender, og heller ikke et stivt rør kan uten samtidig at gjøre skade anbringes saa tæt omkring en nervesutur, at ekssudat eller celleelementer hindres i at komme ind paa suturstedet. Og da jeg ikke kan anta, at man opnaar hensigten med disse forholdsregler, har jeg sloïfet dem.

For at hindre, at ekssudat, rundceller, blod og bindevæv skal trænge ind mellem de 2 nerveender paa suturstedet, har jeg i en del tilfælder dækket dette med et tyndt lag vaselin. Denne blir liggende der ganske reaktionsløs, og da den paa alle kanter smyer sig tæt optil nerven, vil den hindre indtrængen av celleelementer i nervesaaret. Jeg anbringer den kun paa suturstedet, da det er viktig, at transplantatet forøvrig saa raskt som mulig kommer i forbindelse med den omgivende vævsvæske og ernæres av denne. Et vaselinlag utenpaa transplantatet vilde hindre dette,

og det maa derfor undgaaes. Kun øvre og nedre sutursted dækkes av vaselin. Jeg kan ikke talmæssig vise, at nervetransplantationer, som avsluttes ved, at suturstedet besmøres med vaselin, lykkes bedre end de, der ikke behandles saaledes; en nøiagtig adaptation og hæmostase har sikkert større indflydelse paa resultatet end vaselindækket. Men jeg har ikke i et eneste tilfælde fundet, at dette over nogen ugunstig indvirkning, og jeg tor derfor anbefale denne fremgangsmaate, da jeg tror, den tjener det tilsigtede formaal.

Dermed er operationen færdig. Muskelinterstitiet og huden gjensyes, og dyret bringes tilbake til sit bur, hvor det, saavidt pladsen tillater det, kan bevæge sig frit.

Transplantationerne har jeg utført paa dyr, hvis alder var kjendt, og har dertil valgt kaniner, som ikke var under 4 maaneder gamle. Disse er endnu ikke helt utvokset og maa derfor kaldes unge dyr. De fleste av kaninerne har dog været ældre, — omkring 6 maaneder, og en del 8 maaneder; 8 og 10 maaneder gamle kaniner er voksne dyr.

Efter operationen har der været adskillig dødelighet — i en del tilfælder av diarré, i andre av snue, i andre av infektion utgaat fra decubitus-såret paa hælen og i en del tilfælder uten paaviselig dødsårsak. De inficerte tilfælder er ikke tat i betraktning. En del av de dyr, der døde, har været undersøkt paa regenerationsfænomener i transplantatet, mens observation av spontan bevægelighet hos disse tildels ikke er notert.

Til elektrisk undersøkelse har været anvendt en akkumulator med et litet induktionsapparat, hvis elektroder anbragtes paa den blotlagte, isolerte nerve, mens kaninen narkotiseres med æter. De fleste transplantationer har været utført direkte, uten konservering.

Blandt de homoplastiske transplantationer har nervesegmentet forut for implantationen 3 gange været *konserveret paa is* i 4—6 dage, 2 gange i vaselin, 1 gang i Ringers væske. Blandt de heteroplastiske har saadan konservering været prøvet 1 gang.

Saa har jeg forsøkt at borteliminere den indflydelse, transplantatets levende celler maatte ha paa regenerationsprocesserne. Cellerne *dræptes* ved, at nervesegmentet forut for transplantationen blev anbragt i Ringers væske av 56° C. i 20 min. Dette blev gjort 2 gange ved de autoplastiske, 3 gange ved de homoplastiske og 1 gang ved de heteroplastiske transplantationer.

Forsøksprotokol.

1. Autoplastik.

Lp.-nr. 1. K. 9. Y. 5 mndr. gammel. Autoplastik. *Dræpt ved ophetning.* 20 dage. Cajal.

Fra venstre n. isch. uttoges 2 cm., anbragtes i Ringers væske av 56° C. i 20 minutter. Derefter blev segmentet implantert i den høire n. isch. paa samme kanin, hvor 2 cm. var fjernet. Vaseline paa suturstederne. (Paa venstre side gjordes homoplastik.)

Efter 20 dage døde kaninen. Paralyse i ischiadicusgebetet.

Den hadde da et litet decubitus-saar paa h. hæl, et større paa v. hæl. Transplantatet paa h. side fandtes indhelet ved øvre og nedre sutursted, let adhærent til omgivelserne, men ikke fortykket.

Mikr.: Kun maatelig god adaptation.

Men der sees en del fibriller, som fortsætter sig direkte og ubrutt over fra den centrale stump til transplantatet, og som i dettes centrale ende forekommer i noksaa stor mængde. Utover mot periferien avtar de i antal. Og her sees, at mange av fibrillerne — og desto mere uttalt jo længere man kommer perifert — er meget tynde og tildels opdelt i smaa brokker og korn uten indbyrdes sammenheng. Her er tydelig indtraadt en kornet degeneration. I thionin-farvet præparat sees der en del Schwannske kjerner langs fibrillerne og sparsomme indvandrede celler. *Ingen* rundcelleansamling, indvandrede celler spredt utover som i det perifere avsnit av en overskaaret nerve.

Lp.-nr. 2. K. 5. 6 mndr. gl. Autoplastik. *Dræpt ved ophetning.* 21 dage. Cajal.

Fra venstre n. isch. blev uttat 2 cm., anbragt i Ringers væske av 56° C. i 20 minutter. Derefter blev stykket implantert i den høire n. isch. paa samme kanin — hvor 2 cm. var fjernet. Ikke vaselin paa suturstederne. (Venstre side homoplastik.)

Efter 21 dage døde kaninen.

Den hadde da et litet decubitus-saar paa v. hæl, ikke paa høire. Transplantatet paa h. ben fandtes indhelet ved øvre og nedre sutursted, litt adhærent til omgivelserne, men ikke fortykket.

Mikr.: Overgangen fra centrale stump til transplantatet er meget skarpt markert. Der har været god adaptation. Den centrale stump og overgangsstedet adskiller sig ikke paa noget punkt fra, hvad der sees ved direkte sutur av nerver. En del av fibrillerne i den centrale stump har

kolber og stanser i arret, andre danner uttalte Perroncito-nøster, men de fleste passerer ubrutt over i transplantatet, som er jevnt og tæt gjennemsat av fibriller i bundter. Jo længere de fjerner sig fra den centrale stump, desto færre blir de i antal; men endnu 12 mm. fra det centrale sutursted sees fibriller av kraftig kaliber. — Ingen rundcelleansamling.

Lp.-nr. 3-4. K. 42. 5 mndr. gl. *Autoplastik*. 30 dage. Cajal. (Thionin.)

(Re-implantation paa begge ben.)

Paa v. ben reseceres 2 cm. og implantertes paa samme sted ved øvre og nedre sutur.

Paa h. ben reseceres 2 cm. og implantertes efter at være vendt rundt 180° (d. v. s. den perifere ende indsattes centralt og den centrale ende perifert). — Ingen vaselin.

Efter 30 dage. Intet decubitus. Kaninen kan ikke bevæge aktivt i fotled og heller ikke tærne paa noget av bakbenene. Dræpt.

Autopsi. Paa h. side ser transplantatet helt normalt ut makroskopisk. Ingen bindevævs-nydannelse. Paa v. side er transplantatet omgitt av en del bindevævsagtige adhærensener.

Mikr. H. side: Omkring den centrale sutur er der adskillig rundcelle-infiltration. Ellers ingen celleansamlinger. Transplantatet er gjennemsat av kraftige, brede bundter av nydannede nervefibre, som tildels kan følges kontinuerlig fra den centrale stump. De løper *mellem* de degenererte myelin-fibre. I thionin-præparatet sees talrike Schwannske kjerner.

I. side: Ogsaa her er der rundcelleansamling omkring den centrale sutur. Transplantatet gjennemsat av kraftige bundter av nydannede nervefibre.

Lp.-nr. 5. K. 82. 4 mndr. gl. *Autoplastik*. Undersøkt efter 30 dage. Fig. 49.

N. ischiadicus. Der reseceres og utløstes 2 cm. Ved en øvre og nedre sutur (silke) sattes stykket ind igjen paa plads.

K. 82 dræpt. Det indsatte segment er *reaktionsløst* indhelet. Det har samme hvite, glinsende farve som nerven forøvrig, men er ubetydelig tyndere end øvre og nedre segment.

Øvre del av transplantatet uttoges sammen med et stykke av centrale stump, den nedre del sammen med et stykke av den perifere stump.

Mikr. I den centrale stump sees i høide med suturen en del varikøse aksecylindre. De fleste aksecylindre er omgitt av talrike, tynde fibriller,

der løper parallelt og ubrutt over i arvævet; enkelte ender her i knopper. De fleste med retning mot periferien, kun noen ganske faa vendt mot centrum. Paa begge sider av suturen løper de nydannede fibre i store, brede, buede drag over i arret. Dette er gjennemkrydset av disse fibrebundter i forskjellige retninger, og her findes delinger paa mange steder. Fibrillerne ender i knopper eller ringe.

Kommet over mot transplantatet blir bundternes retning mere og mere orientert mot periferien, og paa begge sider av suturen og i transplantatets centrale ende løper fibrillerne igjen i store, buede drag og samler sig i transplantatet til parallele baand med retning mot periferien. — I transplantatet løper de parallele bundter akkurat som i den perifere stump av en degenerert nerve.

Transplantatet: Kun ganske faa mørke, brokkede rester av de gamle aksecylindre sees. Derimot sees talrike ellipsoider. Med sterk forstørrelse sees konturerne av de Schwannske kjerner, hvis kromatinkorn er distinkte og sølvimpregnerte. Disse kjerner danner lange rækker og baand, og de nydannede fibriller ligger indiblandt dem. Fibrillerne har talrike smaa, ovale, mørke, fint granulerte varikositeter.

Kommet over til det perifere sutursted gaar de allerfleste fibre helt ubrutt og uten avbøining gjennom dette, hvor der ikke sees ardannelse. I den perifere stump danner de bundter, der krydser hinanden og ordner sig saa igjen til parallele, brede baand. Ved overgangen til den perifere stump sees en del Perroncito-skruer. Desuten talrike delinger, for det meste i T-form, og disse utgaar oftest fra en 3-kantet eller oval opsvulming av fibrillen. Små ovale varikositeter sees paa de enkelte fibriller med små mellomrum.

I snit av øvre halvdel av transplantatet findes helt perifert en del fibre *skaaret paa tvers*. En del av dem sees her *inde* i gamle Schwannske skeder, der endnu indeholder myelinkorn, og de ligger her utenpaa myelinet. Desuten sees deres intravaginale beliggenhet paa længdesnit derav, at de følger ovoidernes overflate. — Men paa tversnit ligger de fleste fibriller omgitt av en protoplasmazone, uten at den Schwannske skede kan sees. — Protoplasmaet er — det sees paa længdesnit — de Schwannske cellers protoplasma — som ligger indiblandt fibrillerne.

Lp.-nr. 6. K. 2. Y. *Autoplastik*. 40 dage. Cajal.

K. 2. Y. døde. Fra v. n. isch. overførtes 2 cm. til h. n. isch. Ingen vaselin.

Efter 40 dage: Decubitus paa v. hæl, intet paa høire. Kaninen strækker ikke i fotled, spriker ikke med tærne. M. gastrocnemius er atrofisk paa venstre side, noget, men langt mindre, atrofisk paa h. side.

Mikr.: Transpl. med øvre sutursted. Talrike fibriller kan følges direkte over fra centrale stump gjennom arret over i transplantatet. Dette er tæt gjennemsat av tykke bundter av fibriller.

Lp.-nr. 7. K. 6. Y. 7 mndr. gl. *Autoplastik. 50 dage.* Cajal. Fig. 50. (Ikke vaselin paa suturstederne.)

Fra v. n. isch. uttoges $1\frac{1}{2}$ cm. og implantertes til h. n. isch., efterat like meget var fjernet fra denne. (Paa v. side blev gjort homoplastisk transplantation.)

Efter 50 dage: Kaninen bevæger (strækker) foten, spriker med tærne paa h. side, men ikke paa venstre, hvor der er betydelig peroneus-kontraktur. Der er decubitus paa v. side, men ikke paa h. side. Kaninen dræpt.

Autopsi: Høire n. isch. Plastiken har samme tykkelse som nerven ovenfor og nedenfor. Suturstederne er noget opsvulmede. M. gastrocnemius er rød, betydelig tykkere end paa v. side, hvor den er noget atrofisk.

Mikr. Autoplastik. H. ben.

Suturstedet er litt opsvulmet. Der sees talrike bundter av nervefibre, som krydser hinanden i forskjellige retninger, de fleste orientert mot periferien, mange ender i kolbeformige opsvulmninger. En stor del av fibrene kan følges uten avbrytelse over i transplantatet; dette viser rester av gamle aksecylindre (mørke brokker) og er tæt gjennemsat av de unge voksende aksecylindre fra den centrale stump; disse ligger i tykke bundter, der smyer sig omkring resterne av myelinet. I den centrale del av transplantatet er de for det meste jevne, cylindriske, med faa og smale, avlange varikositeter. I den kortikale del av transplantatet blir disse varikositeter mere tæstaaende og tildels litt større; de er mørkfarvede, granulerte og av meget varierende størrelse fra saavidt synlige op til 3—4 μ brede og dobbelt saa lange.

Der sees ingen Schwannske kjerner.

Mikr.: Perifere del av n. isch. V. ben.

Ingen nydannede aksecylindre.

Lp.-nr. 8. K. 28. 6 mndr. gl. *Autoplastik. 53 dage.* Marchi. Polykrom-methylenblaat.

Høire ben: Reseksion av 3 cm. av n. isch. Re-implantation efter dreining paa 180°. Vaselin paa suturstederne.

Venstre ben: Resektion av 3 cm.

Efter 53 dage: Paa venstre hæl stort decubitus, intet paa høire hæl.

Kaninen kan bevæge (strække) høire fotled, ikke venstre, likeledes spriker den i tærne paa høire fot, ikke paa venstre. Paa venstre side er der kontraktur av peroneerne, ikke paa høire. Atrofi av m. gastrocnemius paa venstre side, ganske litt atrofi paa høire side. Dræpt.

Mikr.: Talrike nydannede, marvholdige fibre. Masser av Schwannske kjerner, — like mange — ja kanskje litt flere end i en 40 dage degenerert nerve.

Av gammelt fett (myelin) er der noget mere end i et autoplastisk transplantat efter 63 dage. Myelinresterne er fordelt paa samme maate som i dette og som i de degenererte nerver.

Lp.-nr. 9. K. p. 69. 6 mndr. gl., brun kanin. *Autoplastik paa venstre ben. 54 dage.* Marvskedefarvning. Vaseline.

(Høire ben katgutslynge.)

Paa *h* ben reseceres 2 cm. av n. isch., og defekten dækkedes ved en like lang katgutslynge.

Efter 10 dage: Der er begyndende haaravfald paa begge hæle.

Efter 44 dage: 2-ørestort decubitus paa høire hæl, intet paa venstre.

Efter 54 dage: Kaninen død.

Autopsi: Decubitus paa høire hæl. Intet decubitus paa venstre.

V. m. gastrocnemius god, svulmende.

H. m. gastrocnemius atrofisk. Peroneuskontraktur.

Mikr.: (Weigert). Den perifere del av transplantatet (paa v. side) viser talrike, nydannede, marvholdige fibre indimellem de resterende myelinkorn. Likeledes fortsætter disse fibre sig ut i den perifere del av n. isch.

Mikr.: (Weigert). Den perifere del av n. isch. paa *h*. side (katgutslyngesutur) viser *ingen* nydannede fibre.

Lp.-nr. 10. K. 71. 10 mndr. gl., brun kanin. *Autoplastik. 54 dage.* Marvskedefarvning.

Paa *venstre* ben reseceres 2½ cm. av n. isch. og implantertes straks ved øvre og nedre sutur paa samme sted. Suturestederne blev besmurt med vaselin.

Paa *høire* ben reseceres og fjernes likeledes 2½ cm., og disse erstattedes av en silketraadslynge.

Autopsi efter 49 dage. V. ben (autoplastik). Reaktionsløst forløp. Transplantatet er adhærent til omgivende muskulatur ved tynde bindevævsmembraner. Transplantatet selv er hvitt, av samme utseende

og tykkelse som nerven ovenfor og nedenfor. Det isolertes fra omgivelserne.

Elektrisk undersøkelse. Faradisk strøm: Akkum. 2,1 volt, sek.-rulle-avstand 6,5 cm. Rykning i m. gastrocnemius, ingen rykning i tærne ved applikation ovenfor, paa og nedenfor transplantatet.

Hoire ben: Silketraaden ligger der reaktionsløs. Ingen antydning til nervegeneration. *Ingen rykning i gastrocnemius eller tær* ved applikation ovenfor silketraaden. Intet decubitus paa venstre hæl. Stort decubitus paa høire hæl. Ingen kontraktur av mm. peronei paa venstre side, svær kontraktur paa høire side. M. gastrocnemius er noget atrofisk paa v. side, men friskt rød. H. sides m. gastrocnemius svært atrofisk og av gul farve.

54 dage efter operationen døde kaninen. Transplantatet paa v. ben uttat. Marchi-Weigert.

Snit fra periferien av transpl. viser mange marvskedeholdige nervefibre (de centrale snit mislykkede).

Lp.-nr. 11. K. p. 72. I. 8 mndr. gl. 57 dage. Marchi.

Hoire ben: Autoplastik. Vaselin.

Venstre ben: Homoplastisk transplantation til n. isch. av 2 cm. efter reseksjon av et like langt stykke.

Efter 57 dage: Decubitus paa begge hæle. Nogen kontraktur av mm. peronei paa begge sider. Kaninen dræpt. Begge mm. gastrocnemici like tynde, atrofiske. Begge transplantater er hvite, litt adhærente, litt tykkere end nerven ovenfor og nedenfor.

Mikr. Autoplastik paa h. ben: Transplantatet er synlig ved rikelige sortfarvede korn og klumper av myelin — adskillig flere end i en tilsvarende degenerert nerve. Indiblandt disse sorte myelinkorn sees talrike nydannede fibre.

V. ben (homoplastik) omtrent like mange nydannede fibre i transplantatet.

Lp.-nr. 12. K. p. 67. 6 mndr. gl. Autoplastik. 60 dage. (Marvskedefarvning.)

Hoire ben: Reseksjon av 3 cm. av n. isch. Autoplastisk implantation (replantation), efterat stykket var vendt rundt 180°. Vaselin paa suturstederne.

Venstre ben: Reseksjon av 3 cm. av n. isch. Implantation av like meget fra en anden kanin. (Homoplastik.)

Efter 10 dage: Et ganske litet decubitus paa h. hæl, et noget større paa v. hæl.

Efter 60 dage døde kaninen. Den har nu et kronestort decubitus paa begge hæle. Begge mm. gastrocnemici er tynde, noget atrofiske. Kontraktur i peroneerne. Transplantaterne er ens paa begge sider, med ganske lette adhærensers.

Mikr. (Autoplastik): Ved øvre sutursted sees talrike marvholdige fibre at fortsætte sig fra det centrale stykke ubrutt ned i transplantatet, som er tæt gjennemsat av parallele sterke, marvholdige fibre. Der sees endnu rester av myelinkorn i transplantatet — rikeligere end i det perifere segment av en overskaaret nerve efter 60 dage.

Mikr. (Homoplastik): Transplantat + perifere sutursted.

Der er rikeligere bindevæv omkring transpl., og det er vel vaskularisert. De degenererte partier indeholder rikelig fettkorn (omtrent som i autoplastiken) og er gjennemsat av sterke, marvholdige, nydannede nervefibre. De er tildels parallele, men snittet rammer dem kun stykkevis, saa de sees avbrutt.

Lp.-nr. 13. K. 10. 6 mndr. gl. *Autoplastik*. 63 dage. Marchi. Polykrom-methylenblaat.

Fra venstre n. isch. uttoges et 3 cm. langt stykke og implantertes paa *hoire* side, hvor et like langt segment var fjernet. Vaseline paa suturstederne.

(Homoplastisk transplantation paa v. side.)

Efter 63 dage: Intet decubitus paa *hoire* hæl. Kronestort decubitus-saar paa venstre hæl. Kaninen kan ikke bevæge (strække) *hoire* fot og spriker ikke med tærne. Paa venstre side er der kontraktur i peroneerne; poten kan ikke strækkes, og den spriker ikke med tærne.

Ved uttagelsen findes transplantatet vel indhelet. Det har samme farve som nerven ovenfor og nedenfor. Ingen fortykkelse av transplantatet. Kaninen dræpt.

Mikr. undersøkelse av transplantatet: Noksaa god adaptation ved øvre sutursted. Mange nydannede, marvholdige fibre, dog ikke saa mange som i en avklemmt nerve efter 40 dage (kanin 2).

Schwannske kjerners utseende er det vanlige. Deres antal er ikke saa stort som i en nerve i Wallersk degeneration 40 dage efter over-skjæring. Av fettkugler og -fragmenter er der *mere* end i en 40 dages degenerert nerve.

Lp.-nr. 14 se Lp.-nr. 37.

Lp.-nr. 15. K. P. 68. 8 mndr. gl. *Autoplastik v. ben*. 163 dage. Marvskedefarvning.

Paa venstre ben uttoges av n. isch. et segment paa 3 cm. og re-implantertes straks ved øvre og nedre sutur. Vaseline paa suturestederne.

(Paa h. side homoplastisk implantation.)

Efter 3 uker: Intet decubitus.

Efter 4 mndr.: Intet decubitus. Kaninen gaar som en normal kanin og sparker fra med tærne paa begge sider; der er ingen synlig forskjell mellem høire og venstre bakkens bevægelighet.

Efter 163 dage døde kaninen. Der er intet decubitus paa nogen av hælene. Ingen kontraktur paa høire eller venstre bakken. Fot. fig. 54.

Venstre ben: Transplantatet er vel indhelet, øvre og nedre suturested er let fortykkede. Tynde adhærensers mellem transplantatet og omgivelserne. Det har samme tykkelse og samme farve som nerven ovenfor. M. gastrocnemius er tyk og svulmende, ikke det mindste atrofisk — den samme tykkelse som paa den anden side (homoplastik).

Mikr. undersøkelse av transpl. + øvre suturested: Noksaa god adaptation. Dog er der livlig krydsning av fibre i arret, og de træffes av snittet kun i ganske kort utstrækning. Perifert for arret samles fibre i sterke parallele drag, som imidlertid 4 mm. nedenfor blir tvert avbrutt av tversgaaende bindevævsdrag. Perifert for dette sees igjen rester av det degenererte transplantat med myelin — og fettkorn — men uten nydannede nervefibre.

Perifere suturested: Rikelig bindevæv i og omkring transplantatet (snittet har sandsynligvis truffet i periferien), og kun faa nervefibre sees.

I arret: Talrike marvfibre, perifere stump rikelig nevrotisert.

2. Homoplastik.

Lp.-nr. 16. K. 23. Y. 6 mndr. gl. Homoplastik. 13 dage. Cajal.

Fra en anden kanin av et andet kuld uttoges 2½ cm. av n. ischiadicus og indsattes paa kanin 23 Y, efterat der av dennes venstre n. isch. var fjernet like meget. Ikke vaselin paa suturestederne.

(Paa høire side blev n. isch. urørt.)

Efter 13 dage døde kaninen. Begyndende decubitus paa v. hæl.

Transplantatet vel indhelet ved øvre og nedre sutur. Adhærent paa suturestederne og mellem disse.

Mikr.: Daarlig adaptation. Omkring øvre sutur er der en del infiltration av mononukleære rundceller. Stripevis sees en sparsom rundcelleinfiltration ogsaa et litet stykke ned gjennom transplantatet (thionin-farvet præparat).

I den centrale stump sees like ved øvre sutur tykke kolbe- eller kuleformig opsvulmede fibre. Fra en del av disse sees unge, tynde fibre at springe ut med retning mot arret i ret linje eller spiralsnodd omkring de gamle, opsvulmede aksecylindre, av hvilke enkelte er avbøiet til siden eller endog tilbake i centripetal retning.

I arret sees nogen bundter nydannede fibriller. I transplantatet sees likeledes en del tynde, parallele, rette, nydannede fibriller i dets overfla diske lag.

Lp.-nr. 17. K. 12. N. Y. 5 mndr. gl. Homoplastik. 19 dage. (Cajal.) *Konservert paa is-vaselin 4 dage.* Fra en anden kanin av et andet kuld uttoges fra n. isch. 2 cm., anbragtes i vaselin paa is i 4 dage, implantertes dernæst i høire n. isch. av K. 12, hvor like meget var fjernet. Vaselenen fjernedes.

(Paa venstre ben reseceres 2 cm. av n. isch.)

Efter 19 dage døde kaninen. Der var da:

Et 1-ørestort decubitus paa v. hæl, kun litt haarløshet paa h. hæl. Nogen kontraktur av peroneerne paa begge sider. Atrofi av begge mm. gastrocnemici. Transplantatet indhelet. Ingen sammenvoksninger.

Mikr.: Daarlig adaptation. Betydelig arvæv med celleinfiltration omkring centrale sutur.

I arret sees en del fibriller i et forvirret fletverk mellem cellerne. En del fibre passerer over i transplantatet, som er sparsomt gjennemsat av enkeltfibriller, hvorav hver enkelt er kraftig.

Et andet (thionin-farvet) præparat viser samme billede av enkeltfibriller i transplantatet. Der sees Schwannske kjerner, men ingen rundcelleansamling. (I dette præparat er arvævet tildels faldt ut.)

Lp.-nr. 18. K. 9. Y. 5 mndr. gl. Homoplastik. 20 dage. Cajal.

Fra n. isch. av en anden kanin fra et andet kuld uttoges et stykke, 2 cm. langt, og implantertes i venstre n. isch. paa K. 9. Vaseline paa suturstederne. (Paa høire ben gjordes en autoplastik.)

20 dage senere døde kaninen. Den hadde da et litet decubitussaar paa h. hæl, et større paa v. hæl. Transplantatet fandtes paa *venstre side* indhelet ved øvre og nedre sutursted, litt adhærent og noget fortykket.

Mikr.: Absolut ideel adaptation. Avstanden mellem de 2 tversnit av suturen, der har forbundet centrale stump med transplantatet, er ca. $1\frac{1}{2}$ mm. Fig. 51.

Fra den centrale stump løper talrike nervefibriller ganske ubrutt gjennom forbindelsesstedet, uten at man her kan se antydning til arvæv.

I et par snit sees avbøining av enkelte fibriller ved suturerne, og i en skraat-gaaende linje sees en del fibriller at ende i egne Perroncito-nøster. -- Transplantatet gjennemsattes i sin helhet av talrike, kraftige fibriller, der løper i parallele bundter. En del av dem ender i en knop.

Som det fremgaar av tversnit av transplantatet 1 og $1\frac{1}{2}$ cm. fra det centrale sutursted, findes paa disse steder talrike fibriller, som løper i bundter mellem de for det meste tomme Schwannske skeder. Enkelte sees ogsaa inde i disse.

Lp.-nr. 19. K. 5. N. Y. 6 mndr. gl. Homoplastik. 21 dage. Cajal.

Fra en anden kanin av et andet kuld uttoges 2 cm. av n. isch. og implantertes ved øvre og nedre sutur i venstre n. isch. paa K. 5.

Autoplastik paa høire side. Ikke vaselin paa suturstederne.

Efter 21 dage døde kanin 5. Den hadde da et litet decubitus paa venstre hæl, intet paa høire hæl. Transplantatet paa v. ben fandtes vel indhelet ved øvre og nedre sutur, adhærent til omgivelserne, ikke fortykket.

Mikr.: Daarlig adaptation ved øvre sutursted, hvor der er bindevævs-utvikling og nogen celleinfiltration. I centrale stumps perifere del er der sterk multiplikation av nye fibriller omkring de gamle, der er kolbeformig opsvulmet. Der sees en del Perroncito-nøster. Kun faa fibriller gaar ubrutt over i arvævet, som er gjennemsat av talrike fibrillebundter paa kryds og tvers, men fra arret gaar der forholdsvis flere ubrutt direkte over i transplantatet. Dette viser komplet degeneration med enkelte mørke, brokkede rester av de gamle aksecylindre. Det er tæt gjennemsat av ny-utvoksede fibriller, der løper parallelt i bundter. Mange av dem viser store og smaa ellipsoide, mørke varikositeter. Enkelte ender i en pæreformig knop.

Lp.-nr. 20. K. 24. Y. 6 mndr. gl. Homoplastik. 22 dage. Konservert paa is i Ringers væske. Cajal.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges av n. isch. $2\frac{1}{2}$ cm., anbragtes i Ringers væske og opbevartes her i 6 døgn paa is, hvorefter det implantertes i venstre n. isch. paa K. 24, efterat her var fjernet like meget. Ikke vaselin paa suturstederne.

(Paa høire ben: Homoplastik.)

Efter 22 dage døde kaninen. Der var intet decubitus paa høire eller venstre hæl. Transplantatet paa v. side er vel indhelet ved øvre og nedre sutur. Lette adhærensenser omkring transplantatet til omgivende muskulatur.

Mikr.: Maatelig adaptation. Omkring øvre sutur danner nervebundterne et tæt fletverk, og i den mest perifere del av den centrale stump er

der overmaade mange kuleformede eller kolbeformede opsvulmninger i enden av fibrillerne, som desuten danner talrike Perroncito-nøster. Arret er gjennemkrydset av talrike fibriller, og herfra trænger mange direkte og ubrutt over i det degenererte transplantat, som er tæt gjennemsat av fibrillebundter; enkelte fibriller ender i en knop.

Lp.-nr. 21. K. 24. Y. 6 mndr. gl. Homoplastik. 22 dage. Cajal. *Høire.*

Fra en anden kanin av et andet kuld uttoges av n. isch. $2\frac{1}{2}$ cm. og implantertes i høire n. isch. av K. 24, efterat her var fjernet like meget. Ikke vaselin paa suturstederne. (Paa v. side — iskonservert homoplastik.)

Efter 22 dage døde kaninen.

Der var intet decubitus paa hælene. Transplantatet paa h. side er vel indhelet ved øvre og nedre sutur. Transplantatet er noget fortykket og temmelig adhærent.

Mikr.: Noksaa middelmadig adaptation. Ved øvre sutur sees i centrale stump talrike kolber i enden paa aksecylindre, og en del av disse har retning centrifugalt. Talrike Perroncito-nøster. Masse fibrebundter i arret. Mange av disse passerer ubrutt over i transplantatet, som er gjennemsat av fibrillebundter og forøvrig viser de vanlige tegn paa degeneration. (Rester av gamle aksecylindre, myelinoiders omrids.)

Der er i fibrillernes utseende eller forløp intet, som skiller dem fra de tilsvarende paa det andet ben (iskonservert transplantat) eller fra det perifere segment av en suturert nerve.

Lp.-nr. 22. K. 3. Y. 5 mndr. gl. Homoplastik. 25 dage. Cajal.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges 2 cm. av n. isch. og implantertes ved øvre og nedre sutur i venstre n. isch. paa kanin 3. Vaselin paa suturstederne.

Paa høire side resecertes 3 cm. av n. isch.

Kaninen døde efter 25 dage. Den hadde da et kronestort decubitus paa h. hæl, saavidt nogen haarløshet paa v. hæl. Kontraktur av m. peroneus paa begge sider. Begge mm. gastrocnemici er atrofiske og i like høi grad. Transplantatet paa v. side vel indhelet. Ingen fortykkelse. Saavidt antydning til adhærens.

Mikr.: Der er bra adaptation ved øvre sutursted, daarlig ved nedre.

Fra centrale stump passerer sterke bundter av paralelle nervefibriller over i transplantatet; flere av dem hele og ubrutte. Ovenfor arret, som er antydet ved en skraatgaende, buet linje, dannet av suturen, sees enkelte

fibre med kolber tildels paa avveie. Andre viser antydning til Perroncito-nøster.

Transplantatet er i sin helhet gjennomvokset av fibrillebundter. En del av dem viser smaa ovale lysere varikositeter. Mot nedre segment blir fibrenes forløp uregelmæssig, og bundterne krydser hinanden i forskjellige retninger som i et arvæv.

Lp.-nr. 23. K. 13. Y. 6 mndr. gl. Homoplastik. 30 dage. Cajal.
Konservert i vaselin paa is i 4 dage.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges 2 cm. av n. isch., anbragtes i vaselin paa is i 4 dage og implantertes dernæst til høire n. isch. paa kanin 13, hvor like meget var uttat. Øvre og nedre sutur. Vaseline.

(Til venstre n. isch. implantertes et stykke av en kattenerve.)

Efter 30 dage døde denne kanin.

Der var da et ærtstort decubitus paa høire hæl, et kronestort paa venstre hæl. Atrofi av begge mm. gastrocnemici. Kontraktur av mm. peronei. Transplantatet paa høire side er vel indhelet. Ingen adhærens, ingen fortykkelse.

Mikr.: Noksa god adaptation. Fra centrale stump passerer gjennom suturstedet talrike, kraftige bundter av nervefibriller ned i transplantatet. En del av dem gaar hele og ubrutte over, men de fleste er truffet paa skraa og fremtræder derfor kun stykkevis i snittet.

I transplantatet kan kraftige fibriller følges ned indtil ca. 1½ cm. fra det centrale sutursted.

Lp.-nr. 24. K. 83. 5 mndr. gl. Homoplastik. 30 dage. Cajal.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges av n. isch. 3 cm. og implantertes ved øvre og nedre sutur i høire n. isch. hos K. 83, efterat her var fjernet like meget. Ikke vaselin paa suturstederne.

Efter 15 dage var der haarløshet og begyndende decubitus paa høire hæl. Men dette gik ikke videre og var efter 3 uker i langsom tilheling.

Død efter 30 dage. Næsten tilhelet decubitus paa h. hæl. Nogen atrofi av h. gastrocnemius.

Autopsi: Transplantatet er vel indhelet ved øvre og nedre sutur. Det er adskillig fortykket — næsten dobbelt saa tykt som n. popliteus — ved nedre sutursted, adhærent til omgivelserne, av samme farve som nerven ovenfor og nedenfor.

Mikroskopiske undersøkelser av:

1. Centrale sutursted.
2. Perifere sutursted.
3. N. popliteus like ved indtrædelsen i m. gastrocnemius.

1. *Centrale sutursted:*

I den centrale stump sees like ovenfor suturen aksecylindre, som forgrener sig. I arret: aksecylindre, som ender i kolber, og flere steder Perroncito-nøster omkring gamle aksecylindre, der løper ubrutt til arret. Kun et faatal av fibriller løper kontinuerlig gjennom dette. De fleste ligger kun med en del av sin længde i snittet, som derfor i arret viser en række korte bundter av fibriller; disse har alle hovedretning mot periferien, men bundterne krydser hinanden tildels, og enkelte løper endog paa tvers.

I transplantatet sees brede bundter av parallele fibriller, der ligger mellem — delvis ogsaa inde i — gamle degenererte myelinfibre, idet de følger konturerne av ovoiderne. Saavel paa suturstedet som nedenfor dette er der adskillig rundcelleinfiltration.

2. *Perifere sutursted:*

Transplantatet er gjennemsat av ret talrike fibrillebundter av vanlig utseende og indbyrdes parallele. Ved suturen indtræder nogen disorientering av fibrillebundterne, der dels krydser hinanden, dels som helhet bøier ind mot arrets centrum, hvor en del av traadene løper paa tvers. En hel del fortsætter dog ubrutt over i arret, og fra arret gaar disse og andre ubrutt over i perifere stump. Denne er tæt gjennemsat av fibriller — adskillig rikeligere nevrotisert end transplantatet, saa der efter al sandsynlighed er foregaat en deling og multiplikation ved det perifere sutursted. Svær rundcelleinfiltration i transplantatet og omkring suturerne.

3. *Perifere stump (n. poplitæus):*

4 $\frac{1}{2}$ cm. nedenfor øvre sutursted: Overmaade tæt gjennemsat av nydannede fibriller.

Lp.-nr. 25. K. 96. Y. 6 mndr. gl. Homoplastik. Cajal. 30 dage.

Paa K. 95 blev n. isch. for 11 mndr. siden overskaaret, og den centrale stump utrevet. Av den perifere, degenererte stump, hvori ved sølvfarvning *ikke* paavistes nervefibriller, uttoges 1 cm. og implantertes ved øvre og nedre sutur til venstre n. isch. hos kanin 96, efterat der paa forhaand var fjernet like meget.

Efter 30 dage uttoges transplantatet.

Mikr.: Tversnit. Av Schwannske skeder er der kun faa tilbage som aapne ringe, der indeholder detritus. Istedet sees tversnit av talrike, cylindriske protoplasmatraade uten nogen omgivende skede.

I en del av tversnittet indeholder saagodtsom hver eneste av disse protoplasmatraade en eller flere nervefibriller.

Lp.-nr. 26. K. 118. 7 mndr. gl. Homoplastik. 35 dage. Cajal.

Fra en anden kanin av et andet kuld uttoges 2,5 cm. av n. isch. og overførtes ved øvre og nedre sutur til venstre n. isch. hos K. 118, efterat her paa forhaand var fjernet like meget. Vaselin paa suturstederne.

(Paa høire side: Resektion av 2 cm. av n. ischiadicus.)

Efter 35 dage døde kaninen.

Intet decubitus paa venstre hæl. Kronestort decubitus paa høire hæl. Ved uttagelsen findes transplantatet vel indhelet, uten fortykkelse, litt adhærent til omgivelserne.

Mikr.: Maatelig adaptation ved øvre sutursted, hvor fibrillerne i arret er noget desorienterte; nogen faa passerer direkte over. — I transplantatet findes fibriller i rikelig, men dog avtagende mængde, i vel 1 cm.'s utstrækning nedover. De er alle meget tynde. Der er ingen rundcelleansamling.

Lp.-nr. 27. K. 8. Y. 7 mndr. gl. Homoplastik. 48 dage. Cajal.

Fra en anden kanin uttoges 2 cm. av n. isch., anbragtes i Ringers væske av 56° i 20 min. og overførtes dernæst (øvre og nedre sutur) til venstre n. isch. av K. 8, efterat der paa forhaand var fjernet like meget. Vaselin paa suturstederne.

Efter 36 dage:

Paa v. hæl er der et kronestort decubitus; der er kontraktur av peroneerne, atrofi av m. gastrocnemius.

Efter 48 dage døde kaninen.

Der var da stort decubitus paa v. hæl.

Obduktion:

Transplantatet er vel indhelet ved øvre sutursted; ved nedre er der en diastase paa et par mm. mellem det og perifere stump. (Suturen er løsnet.) Transplantatet er adhærent til omgivende muskulatur, men er ikke fortykket eller indkapslet i bindevæv. Fig. 52.

Mikr.: Kun en del av tversnittet av den centrale stump er forbundet med transplantatet, som er tyndest. Adaptationen er god. I arvævet er der en del bundter av fibriller, som krydser hinanden i forskjellige retninger under sin passage mot transplantatet. Flere bundter gaar kontinuerlig over fra den centrale stump til transplantatet og løper et stykke (3—5—6 mm.) ned gjennom dette, saa det er vel nevrotisert. Indimellem fibrillebundterne sees nekrotiske (kornede, strukturløse) klumper. Ingen betændelsesagtig celleinfiltration.

Lp.-nr. 28. K. 6. Y. 7 mndr. gl. Homoplastik. (Dræpt ved ophetning.) Cajal. 50 dage.

Av n. ischiadicus fra en anden kanin uttoges 2 cm., anbragtes i Ringers væske av 56⁰ i 20 minutter og implantertes dernæst i n. isch. paa venstre ben hos kanin 6, efterat 1½ cm. var fjernet her. Ikke vaselin paa suturstederne.

(Paa høire side gjordes autoplastik.)

Venstre ben: betydelig peroneus-kontraktur. Decubitus (1-ørestort) paa venstre hæl. Strækker ikke i fotleddet, spriker ikke med tærne. V.m. gastrocnemius noget atrofisk.

Kaninen dræpt.

Mikr.: God adaptation. Transplantatet findes gennemvokset av talrike, kraftige bundter av nervefibriller, enkelte ender i en knop. Der sees et og andet Perroncito-nøste. Hvor langt ned i transplantatet fibrillerne gaar, kan ikke avgjøres, da kun en skalk av dette er truffet ved snittet.

Av tversnit sees, at de nytvoksede fibre dels ligger inde i, dels og for det meste mellem de Schwannske skeder.

Lp.-nr. 29. K. P. 72. 1. 8 mndr. gl. Homoplastik. 57 dage. Marchi.

Fra en anden kanin av et andet kuld uttoges 3 cm. av n. isch. og implantertes ved øvre og nedre sutur i venstre n. ischiadicus paa K. P. 72. 1, efterat her paa forhaand var fjernet like meget. Vaselin paa suturstederne. (Paa høire side implantertes autoplastisk.)

Efter 57 dage dræptes kaninen.

Den hadde da store decubitus-saar paa begge hæle. Nogen kontraktur av mm. peronei paa begge sider. Begge transplantater er hvite, litt adhærente, litt tykkere end nerven ovenfor. Begge mm. gastrocnemici er noget atrofiske, av friskt rød farve.

Mikroskopisk undersøkelse av transplantatet med periferе sutursted:

Rikelig nydannede marvfibre i transplantatet. Kun maatelig adaptation ved nedre sutursted, hvor der er adskillig bindevæv. Kun faa fibre passerer ubrutt over. Rikelig uresorbert fett i transplantatet. I den periferе stump er der straks ved suturen talrike, nydannede, marvholdige fibre.

Lp.-nr. 30. K. P. 67. 6 mndr. gl. (graa). Homoplastik. 60 dage. (Marvskedefarvning.)

Fra en anden kanin av et andet kuld uttoges 3 cm. av n. ischiadicus og implantertes ved øvre og nedre sutur i venstre n. isch. paa K. P. 67, efterat her paa forhaand var fjernet like meget. Vaselin paa suturstederne. (Paa høire side gjordes autoplastisk implantation.)

Efter 10 dage:

Et ganske litet decubitus paa høire hæl, et noget større paa venstre hæl.

Efter 60 dage døde K. P. 67. Der var da et kronestort decubitus paa begge hæle. Begge mm. gastrocnemici var tynde og atrofiske. Kontraktur i peroneerne paa begge sider. Transplantatet var ens paa begge sider, med lette adhærensener.

Mikroskopisk undersøkelse av transplantatet med perifer sutursted:

Adskillig bindevæv omkring transplantatet; der er god adaptation. Flere av de talrike marvfibre i transplantatet passerer ubrutt over i arret ved nedre sutur, og herfra gaar enten disse eller nye fibre direkte over i den perifer stump, som er vel nevrotisert.

Lp.-nr. 31. K. 109. 4 mndr. glm. Homoplastik. *60 dage*. Cajal.

Fra en anden kanin uttoges 1½ cm. av n. isch. og indsattes i venstre n. isch. paa K. 109, efterat like meget var fjernet her. — Øvre og nedre sutur. Ikke vaselin. (Paa høire sides reseceertes og fjernedes 2 cm.)

Efter 60 dage døde kanin 109.

Den hadde da et kronestort decubitussaar paa høire hæl, intet paa venstre hæl. Der var kontraktur av peroneerne paa begge sider. M. gastrocnemius tynd, gulagtig, sterkt atrofisk paa h. side, langt mindre atrofisk paa v. side. Transplantatet vel indhelet. Adhærent saavel paa suturstederne som mellem disse.

Mikroskopisk undersøkelse ved øvre sutursted:

Daarlig adaptation. Nervefibrillerne danner et forvirret netverk. I transplantatet sees ikke desto mindre talrike nervefibriller. De fleste er rammet i noget skraa retning (ikke helt paralelt med deres hovedretning), saa de sees kun stykkevis. Her sees tydelig, at enkelte av dem ligger *inde i* degenererte myelinskeder.

Ved nedre sutursted:

Utviklet arvæv med forvirret nervefletverk.

I perifer stump:

Mange nervefibre.

Lp.-nr. 32. K. 10. Y. 6 mndr. gl. Homoplastik. (Dræpt ved ophetning.) *63 dage*. Marchi.

Fra en anden kanin uttoges 3 cm. av n. ischiadicus og implantertes ved øvre og nedre sutur i n. isch. paa venstre ben hos K. 10 (hvor der var fjernet like meget), efterat segmentet i 20 minutter hadde været anbragt i Ringers væske av 56°. Vaselin paa suturstederne.

(Autoplastik paa høire side.)

Efter 63 dage: Kronestort decubitus paa venstre hæl. Intet decubitus paa høire hæl. Ingen aktiv bevægelighet i tærne eller i fotleddet paa nogen av siderne. Kaninen dræptes.

Ved uttagelsen findes transplantatet vel indhelet ved øvre og nedre sutursted, som begge viser let opsvulmning. Transplantatet er hvitt, bindevævsagtig, adhærent, noget tyndere end nerven ovenfor og nedenfor.

Mikr.: Transplantatets hele bredde er optat av talrike, tætliggende marvfibre, 8—10—12 ved siden av hinanden. Marvskeden er lys graa og svakt osmert, langt svakere end i den centrale stump. Indimellem myelinfibrene sees ovale ansamlinger av sorte fett- og marvrestes. Ved øvre sutursted sees der en kontinuerlig overgang av en del marvfibre fra centrale stump til transplantatet.

Lp.-nr. 33. K. 7. Y. 7 mndr. gl. Homoplastik. 70 dage. Marchipolykrom.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges 2,5 cm. av n. isch. og overførtes ved øvre og nedre sutur til venstre n. isch. paa K. 7. Vaseline paa suturstederne. (Høire n. ischiadicus: resektion av 2 cm.)

Efter 32 dage: Der har ikke været decubitus paa v. hæl. Heller ikke nu noget decubitus. Kronestort decubitus paa h. hæl. Der er nogen kontraktur av peroneerne og nogen atrofi av m. gastrocnemius paa venstre ben.

Efter 70 dage: Intet decubitus paa v. hæl. Fremdeles nogen kontraktur av peroneerne, atrofi av m. gastrocnemius.

Paa h. hæl: stort decubitus. Atrofi av m. gastrocnemius, kontraktur av peroneerne.

Æternarkose. Elektrisk undersøkelse. Faradisk strøm. Akkumulator 2,5 volt. Rulleavstand 2 cm.

Ingen rykning paa noget av benene ved applikation paa centrale stump. Transplantatet vel indhelet. God adaptation opad og nedad. Ingen fortykkelse.

Mikr. undersøkelse: Den aller største del — næsten hele nervens tverrsnit — indtages av nydannede marvklædte aksecyliindre med svaktfarvede Schwannske kjerner i det vanlige antal. — En del av disse aksecyliindre kan følges kontinuerlig fra den centrale stump gjennem det øvre sutursted ut i transplantatet. I dette ligger fettkorn (myelinresterne) i smale, spolformede spalter mellem marvfibrene. Der er en ret fremskreden fettresorption. — Ingen betændelsesinfiltration.

Lp.-nr. 34. K. P. 65. 6 mndr. gl. Homoplastik høire ben. 80 dage. Katgutslynge venstre ben.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges 3 cm. av n. isch. og implantertes ved øvre og nedre sutur i høire n. isch. paa K. P. 65, efterat her paa forhaand var uttat like meget. Vaseline paa suturestederne.

Paa venstre side (K. P. 65) fjernedes 3 cm., og defekten dækkedes ved en dobbelt katguttraad (o), der var utvandet i fysiologisk saltvand.

Efter 80 dage: Kaninen døde.

Der er decubitus paa begge hæle av omtrent samme størrelse. Kontraktur av peroneerne paa begge sider. Svær atrofi av begge mm. gastrocnemii.

Paa høire side: Transplantatet vel indhelet ved øvre og nedre suturested, som er let opsvulmede. Ellers har transplantatet samme farve og tykkelse som nerven ovenfor og er ganske let adhærent.

Paa venstre side: Katguttraaden findes ikke, og der er ingen makroskopisk nervøs eller bindevævsagtig forbindelse mellem de 2 nerveender.

Mikroskopi: Høire n. isch., øvre suturested:

Noksaa god adaptation; omkring suturen er der et virvar av marvfibre. Kun nogen faa passerer fra arret ubrutt over i transplantatet, der er tæt gjennemsat av nydannede marvfibre. En del fettkorn (sorte, osmiumfarvede) ligger endnu igjen mellem marvfibrene — noget rikeligere og i større masser end i den perifere del av nerven.

Nedre suturested: Det sees her, at saavel transplantatet som suturestedet er indkapslet i noksaa rikelig bindevæv.

Fra transplantatet passerer kun ganske faa av de talrike marvfibre direkte og ubrutt over i arret (uheldig snitretning). I og like ovenfor arret sees kraftige bundter av parallele marvfibre, der ubrutt passerer over i den perifere stump, som de helt gjennemsætter, og hvor fettresorptionen er langt fremskreden (længere end i transplantatet).

Lp.-nr. 35. K. 156. 7 mndr. gl. Homoplastik paa venstre ben. 95 dage. Katgutslynge paa høire ben.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges 2,5 cm. av n. ischiadicus og overførtes ved øvre og nedre sutur til v. n. ischiadicus paa K. 156, efterat her var fjernet like meget. Vaseline paa suturestederne. Fra høire n. isch. fjernedes likeledes 2,5 cm., og her dækkedes defekten ved en katguttraad (dobbelt) nr. o, utvandet i fysiologisk saltvand.

Efter 10 dage: Begyndende decubitus paa høire hæl, intet saar paa venstre hæl.

Efter 95 dage døde kaninen.

Der var da stort decubitus med absces paa høire hæl. Intet saar paa venstre hæl. Sterk kontraktur av peroneerne paa høire side, ingen kontrak-

tur paa venstre side; her kan foten med lethed rettes ut passivt. Svær atrofi av høire m. gastrocnemius, nogen atrofi av venstre m. gastrocnemius.

Transplantatet paa venstre side er vel indhelet og vel bevaret, let adhærent, litt opsvulmet paa suturstederne; let fortykkelse av transplantatet selv.

Paa *høire* side sees ingen rester av katgut. Den centrale stump er opsvulmet og løper ut i et avsmalnende, tyndt, hvitt baand mot periferien. Det naar ikke hen til den perifere stump.

Mikroskopisk undersøkelse av *transplantatet med centrale sutursted* viser adskillige desorienterte fibriller i den centrale stump ovenfor suturen; der er flere kolber, og en del av disse har vendt sig om mot centrum. Arret er ujevnt og viser avbrytelse av de fleste fibriller. Men i transplantatet like nedenfor arret sees ikke desto mindre store masser paralelle fibriller, der tildels viser forgreninger og multiplikation.

Mikroskopisk undersøkelse av *n. popliteus* like foran indtrædelsen i m. gastrocnemius viser langtkommen resorption av myelinrester. Forøvrig er hele nervens tversnit opfyldt av tætliggende, nydannede marvfibre (Marchi), der alle er godt osmert.

Lp.-nr. 36. K. 153. 7 mndr. gl. Homoplastik venstre ben. 105 dage. Katgutslynge høire ben. Fotografert. Fig. 55.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges 3 cm. av n. isch. og implantertes ved øvre og nedre sutur i venstre n. isch. paa K. 153, efterat her paa forhaand var fjernet like meget. Vaseline paa suturstederne.

Paa høire ben uttoges 3 cm. av n. isch., og defekten dækkedes med en dobbelt katguttraad (o) utvandet i fysiologisk saltvand.

Efter 58 dage: Stort decubitus paa høire hæl, intet paa venstre hæl.

Efter 105 dage: Fremdeles stort decubitus paa h. hæl, intet paa v. hæl.

Høire bakben staar sterkt bøiet i knæet og dorsalflektert i fotleddet.

Der er kontraktur av laarets fleksorer og fotens dorsalfleksorer. Paa *venstre* bakben er der ingen kontrakturer. Under gang bevæges høire bakben utelukkende i hofteleddet, og kun hælen støtter mot jorden. Venstre bakben strækkes under gang saavel i knæled som i fotled.

Naar kaninen hænges op i ørene, strækkes venstre ben fuldstændig, og tærne spriker. Høire ben kan ikke strækkes i knæ- eller fotled.

Elektrisk undersøkelse (æternarkose). Faradisk strøm: Akkumulator 2 volt:

Paa venstre side:

Rykning i m. gastrocnemius ved applikation av elektroderne *ovenfor* transplantatet ved sekundærrulleavstand 9 cm.

Rykning i m. gastrocnemius ved applikation av elektroderne
paa transplantatet ved sekundærrulleavstand 6 cm.

Rykning i m. gastrocnemius ved applikation av elektroderne
nedenfor transplantatet ved sekundærrulleavstand 9 cm.

Paa høire side:

Ingen rykning ved applikation paa centrale stump, heller ikke paa bindevævet mellem de 2 ender og heller ikke paa perifere stump.

Autopsi. Fot. fig. 55.

Transplantatet paa venstre side er vel indhelet ved øvre og nedre sutur, hvor der er let fortykkelse. Det er litt rødlig farvet, har samme tykkelse som nerven ovenfor og nedenfor, er ganske let adhærent til omgivelsene.

Paa høire side sees makroskopisk ingen nervøs forbindelse mellem øvre og nedre ende, og her sees heller ikke rester av katguttraad.

Paa venstre side er m. gastrocnemius tyk og svulmende, paa høire side er den ganske tynd, blek, gulagtig og atrofisk. Kaninen dræpt.

Mikroskopisk undersøkelse av n. poplitæus paa venstre side perifert for transplantatet viser, at den er gjennomvokset av talrike, nydannede marvholdige fibre, som er vel osmert. Fettresorptionen er langt fremskreden.

Lp.-nr. 37. K. 132. 6 mndr. gl. Autoplastik venstre ben. 136 dage.
Fot. fig. 53.

Homoplastik høire ben.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges 3 cm. av h. n. isch. og implantertes ved øvre og nedre sutur i høire n. isch. paa K. 132, efterat her var fjernet like meget. Vaseline paa suturstederne. (Paa venstre side: autoplastisk implantation.)

Efter 107 dage: Der er decubitus paa høire hæl, ikke paa venstre.

Ved gang er der betydelig forskjell mellem høire og venstre bakben. Høire fot: hælen løftes ikke og tærne sparker ikke fra. Der er kontraktur i peroneerne paa høire side, ikke paa venstre.

Efter 136 dage døde kaninen.

Intet decubitus paa venstre hæl, et litet decubitus paa høire hæl. Kontraktur i peroneerne paa høire side, ikke paa venstre. Høire m. gastrocnemius atrofisk, venstre kraftig, svulmende. *Transplantaterne* er vel indhelet paa begge sider.

Venstre (autoplastik). Saavidt synlig opsvulmning av suturstederne. Transplantatet litt tykkere end nerven ovenfor, let adhærent.

Høire (homoplastik). God adaptation ved øvre sutursted. Transplantatet samme farve som nerven, let adhærent, litt tyndere end nerven oven-

for. Ved nedre sutursted synes adaptationen mindre god; her er et tyndt og litt slasket parti paa ca. 1—2 mm. ved overgangen i den perifere stump. (Fig. 53.)

Lp.-nr. 38. K. 68. Y. 8 mndr. gl. Homoplastik h. ben. 163 dage. (Marvskedefarvning.)

Fra en anden kanin av et andet kuld uttoges 3 cm. av n. isch. og implantertes ved øvre og nedre sutur i høire n. isch. hos K. 68, efterat her var fjernet like meget. Vaseline paa suturstederne. (Paa venstre side gjordes autoplastisk implantation.)

Efter 3 uker: Intet decubitus.

Efter 4 maaneder: Intet decubitus. Kaninen gaar som en normal kanin, sparker fra med tærne paa begge sider: der er ingen synlig forskjell mellem høire og venstre bakkens bevægelighet.

Efter 163 dage dode kaninen.

Der er intet decubitus paa nogen av hælene. Ingen kontraktur paa høire eller venstre bakken.

Høire ben:

Transplantatet vel indhelet, øvre og nedre sutursted let fortykkede. Ved tynde adhærensers er transplantatet loddet til omgivende muskulatur. Det har samme tykkelse som nerven ovenfor, men har en noget rødere farve (vel vaskularisert). M. gastrocnemius er tyk og svulmende, ikke spor atrofisk — av samme tykkelse som paa den anden side (autoplastik).

Mikroskopisk undersøkelse av transplantatet paa høire ben.

Øvre sutursted:

God adaptation. Talrike marvfibre passerer i brede bundter direkte over fra centrale stump til transplantatet. Her viser bundterne sig kun stykkevis i snittet, men transplantatet er vel nevrotisert.

Nedre sutursted:

Ikke videre god adaptation; transplantatet er rikelig vaskularisert. Fra transplantatet passerer ret talrike fibre ubrutt gjennom arret. Perifere stump vel nevrotisert.

Lp.-nr. 39. K. 135. 6 mndr. gl. Homoplastik. 319 dage.

Paa venstre ben implantertes 3 cm. av n. isch. fra en anden kanin av et andet kuld i n. isch., efterat like meget var fjernet paa forhaand. Vaseline paa suturstederne.

(Paa høire side uttoges 3 cm. av n. isch. Intet blev indsat.)

Efter 260 dage: Et litet decubitus paa v. hæl, et noget større paa h. hæl.

Gangen:

Betydelig forskjel mellem høire og venstre bakben.

Høire bakben:

Bevæges kun i hofte, er sterkt bøiet i knæ- og fotled, støtter kun med hælen paa underlaget, sparker ikke fra med tærne. Kan ikke sprike i tærne, kan ikke aktivt (eller passivt) strække i fotleddet. (Svær kontraktur av peroneerne.)

Venstre bakben:

Bevæges under gangen saavel i fot- og knæled som i hofteled. Ingen kontraktur i knæleddet, kun ubetydelig peroneuskontraktur i fotleddet. Den støtter med hele fotsaalen paa jorden og sparker fra med tærne under gang. Strækker en del i fotleddet.

Efter 319 dage: Kaninen døde.

Der er stort decubitus med absces paa høire hæl. Et litet decubitus paa venstre hæl. Svær kontraktur i fotleddet paa høire side. Ingen kontraktur paa venstre side. Paa høire ben sees paa baksiden av laaret en tynd ($1\frac{1}{2}$ mm. bred), hvit stripe mellem de 2 overskaarne nerveender.

Paa *venstre* side er transplantatet vel indhelet, adhærent til omgivelserne med nogen bindevævsnydannelse (fortykkelse).

Paa h. side: m. gastrocnemius tynd, atrofisk.

Paa v. side: m. gastrocnemius svulmende, meget tykkere end høire. (Makr. præp.)

Lp.-nr. 40. K. 115. 6 mndr. gl. Homoplastik høire ben. 348 dage. Resektion venstre ben.

Fra en anden kanin av samme kuld uttoges av n. isch. 3 cm. og implantertes ved øvre og nedre sutur i høire n. isch. paa K. 115, efterat her var fjernet like meget. Vaseline paa suturstederne.

Paa venstre ben fjernedes hos K. 115 3 cm., og her blev intet implantert.

Efter 13 dage noteres: ganske litet (ertstort) decubitus paa høire hæl, noget større decubitus paa venstre hæl.

Efter 21 dage: Tilhelet decubitus paa h. hæl, kronestort decubitus paa v. hæl.

Efter 5 maaneder:

Intet decubitus paa h. hæl. Kronestort decubitus paa v. hæl.

Gangen: Der er stor forskjel mellem de 2 bakben under gang.

Høire ben strækkes i knæ- og fotled, og tærne sparker fra jorden under løftning av hælen.

Venstre ben strækkes ubetydelig i knæled, slet ikke i fotled, tærne sparker ikke fra jorden, og hælen løftes ikke fra underlaget.

Der er ingen kontraktur paa høire ben.

Paa venstre ben er der nogen kontraktur av laarets fleksorer og sterk kontraktur av peroneerne.

Elektrisk undersøkelse (æternarkose). Faradisk strøm. Akkumulator 2 volt.

Høire ben: Med *sekundærrulleavstand* 12 cm. komplet kontraktion av tærnes fleksorer og av gastrocnemius ved applikation ovenfor transplantatet.

Venstre ben: Ingen kontraktion ved applikation paa den centrale stump ovenfor reseksjonen.

Efter 348 dage: Kaninen døde.

Stort decubitus paa venstre hæl. Intet paa høire. Sterk kontraktur av peroneerne paa v. ben. Ingen kontraktur av peroneerne paa h. ben.

Fot. fig. 56.

Der er svær atrofi av m. gastrocnemius paa venstre ben, muskelen er blekt gul.

Paa høire ben er m. gastrocnemius vistnok litt tynd, men ikke atrofisk, — langt tykkere end paa v. side. Farven friskt rød.

Paa høire side er transplantatet vel indhelet ved øvre og nedre sutur, hvor der er ubetydelig opsvulmning. Det er adhærent til omgivelsene. Transplantatet har samme farve og tykkelse som nerven ovenfor.

Paa venstre side er der en knopformet opsvulmning av centrale stump, der forlænger sig mot periferien i et tyndt, 1 cm. langt, hvitt, avsmalnende baand, som ikke naar den perifere stump.

Mikr. undersøkelse av øvre sutursted og en del av transplantatet (marvskedefarvning):

Adaptationen er ikke absolut god; i ethvert fald fremgaar det av snittet, hvor kun en del marvfibre passerer ubrutt over. Paa selve suturstedet er der desuten faldt ut stykker av en hel del fibre (mekanisk ved skjæringen). I transplantatet perifert for suturen er der brede kolonner av tætliggende marvholdige fibre, der gir transplantatet utseende som en *normal nerve*.

Lp.-nr. 41. K. p. 89. 6 mndr. gl. *Homoplastik*. Hvit kanin.

H. ben: Reseksion av 3 cm. av n. isch., hvorefter implantertes 3 cm. av n. isch. fra en anden kanin av et andet kuld.

V. ben: Reseksion av 3 cm. av n. isch. Intet implantertes.

30 dage senere: Intet decubitus paa nogen av hælene.

58 dage efter operationen: Begge poter strækkes omtrent like daarlig i fotleddene.

267 dage efter operationen: Strækker foten godt i *hoire* fotled; strækker saagodtsom ikke i *venstre* fotled, hvor der er kontraktur av peroneerne. Kronestort decubitus paa venstre hæl, intet decubitus paa høire hæl.

Æternarkose: Elektrisk undersøkelse:

Paa høire side: God indheling, øvre og nedre sutursted litt opsvulmet, transplantatet er ikke fortykket, men adhærent til omgivelserne. M. gastrocnemius er kraftig, rød og svulmende.

Paa venstre side er den gul, blek, atrofisk.

Paa høire side: Kraftig rykning i m. gastrocnemius ved applikation av elektroderne ovenfor transplantatet ved en sekundærrulleavstand av $8\frac{1}{2}$ cm. Akkumulator 2 volt.

Paa venstre side: Svak rykning i m. gastrocnemius ved en sekundærrulleavstand av $5\frac{1}{2}$ cm.

360 dage efter operationen:

Kaninen døde av diarré. Kontraktur av peroneerne paa venstre side, ikke paa høire side. Kronestort decubitus paa *venstre hæl*, intet paa *høire hæl*. *Venstre* m. gastrocnemius gul, slap, tynd; *hoire* m. gastrocnemius rød, kraftig og tyk. Transplantatet paa høire side litt adhærent. Paa venstre side sees mellem den let opsvulmede øvre ende av n. ischiadicus og den nedre ende en ganske tynd, hvitgraa, bindevævsliignende streng. Præparatet opbevaret.

Lp.-nr. 42. K. p. 89. 6 mndr. gl. graa kanin. Venstre ben: Homoplastik.

Høire ben: N. ischiadicus urørt.

30 dage senere: Intet decubitus paa venstre hæl.

58 dage efter transplantationen: Intet decubitus paa venstre hæl.

273 dage efter transplantationen: Der er intet decubitus. Strækker begge ben ens i fotleddet, spriker i tærne.

Æternarkose: Elektrisk undersøkelse:

Paa venstre side er der adskillige bindevævsadhærensener mellem transplantatet og omgivende muskulatur. Det isolertes.

Akkumulator 2 volt.

Rykning i m. gastrocnemius ved sekundærrulleavstand 10 cm. paa *hoire* ben.

Rykning ved sekundærrulleavstand 9 cm. paa *venstre* ben. M. gastrocnemius er like tyk og svulmende paa venstre som paa høire side.

282 dage efter transplantationen (9 dage efter den elektriske undersøkelse) døde kaninen. Der var flegmonøs betændelse paa venstre ben. Intet uttoges.

Lp.-nr. 43. K. p. 90. 6 mndr. gl. sort kanin.

Paa høire ben: Homoplastik. 3 cm.

Paa venstre ben: N. ischiadicus urørt.

Efter 21 dage: Intet decubitus.

58 dage efter transplantationen: Intet decubitus. Strækker i høire fotled, spriker i tærne paa høire side. M. gastrocnemius er litt tyndere paa høire end paa venstre side.

193 dage efter transplantationen: Ingen forskjel mellem høire og venstre ben.

268 dage efter transplantationen: Ingen forskjel mellem høire og venstre ben under gang og i hvile.

Æternarkose: Elektrisk undersøkelse:

Transplantatet er omgitt av lette bindevævsagtige adhærensers. De løstes. Akkumulator 2 volt. Ved applikation av elektroderne paa og ovenfor transplantatet kom der rykning i høire m. gastrocnemius ved sekundærrulleavstand 8,5 cm. Paa venstre side (n. ischiadicus urørt) kom der rykning i m. gastrocnemius ved sekundærrulleavstand 9 cm.

281 dage efter transplantationen: døde kaninen. Der var flegmonøs betændelse paa høire ben. Intet blev uttat.

Lp.-nr. 44. K. p. 90. 6 mndr. gl. graa kanin.

Høire ben: Homoplastik $2\frac{1}{2}$ cm.

Venstre ben: Resektion av $2\frac{1}{2}$ cm. Intet blev innsatt. (N. cutan. suræ. med. blev ved et uheld avskaaret og saa suturert.)

Efter 21 dage: Decubitus paa venstre hæl, intet paa høire hæl.

58 dage efter transplantationen: Decubitus paa venstre hæl, intet paa høire hæl. Strækker høire ben i fotleddet, venstre ben ogsaa, men meget mindre.

193 dage efter transplantationen: 2-kronestort decubitus paa venstre hæl, ertstort decubitus i tilheling paa høire hæl. Strækker i høire fotled, kan ikke strække i venstre.

262 dage efter transplantationen: Æternarkose: Elektrisk undersøkelse:

Paa venstre side: Ingen makroskopiske tegn paa regeneration fra den centrale stump av n. ischiadicus, som er litt opsvulmet. Ingen rykning i m. gastrocnemius ved irritation av n. ischiadicus.

Paa høire ben: M. gastrocnemius kraftig. Ved applikation paa og ovenfor transplantatet faaes rykning i m. gastrocnemius ved sekundærrulleavstand 8,5 cm. Akkumulator 1,8 volt.

362 dage efter transplantationen: 2-kronestort decubitus paa venstre hæl. 1-ørestor haarløs flek paa høire hæl. Venstre fot staar i calcaneusstilling med sterk kontraktur av peroneerne.

Høire ben: Fri bevægelighet i fotledet, som aktivt strækkes helt. Den spriker ikke i tærne.

Dræpt. *Høire ben:* m. gastrocnemius tyk og svulmende.

Venstre ben: m. gastrocnemius tynd — atrofisk — gul.

Præparatet opbevaret.

3. Heteroplastik.

Lp.-nr. 45—46. K. 17. Y. 7 mndr. gl. *Heteroplastik*. Venstre. Cajal. 12 dage.

Fra en kat uttoges av n. isch. 2 cm. og implantertes i n. isch. paa K. 17 (*venstre ben*) ved øvre og nedre sutur, efterat det hadde ligget i Ringers væske paa is i 4 døgn. Vaseline paa suturestederne.

Høire: I høire n. isch. (K. 17) implantertes ved øvre og nedre sutur et 1½ cm. langt stykke av n. isch. av en kat *direkte*. Vaseline paa suturestederne.

K. 17 dræpt efter 12 dage.

Begyndende decubitus paa begge hæle. Paa begge sider er transplantaterne vel indhelet paa suturestederne. De er litet adhærente til omgivelserne, er bløte, graagule, begge av omtrent samme utseende, ikke fortykkede.

Mikr. Venstre: Adaptation ved centrale suturested er ret god. Rikelige regenerationsfænomener fra aksecylindrene i den centrale stump (multiplikation og spredning av fibrillerne, endekøller, Perroncito-nøster). Ingen av dem passerer over i arret. — Transplantatet er ujevnt mørkt farvet, flekvis helt sort av mørke, kornede masser, andre steder gult med længdestriping av Schwannske skeder, som endnu indeholder myelinbrokker og mørke aksecylinderrester. Flekvis sees rundcellet infiltration.

Høire: Sparsomme regenerationsfænomener fra aksecylindrene i centrale stump. Ingen nevrofibriller i arret eller transplantatet. Dette er gult, ensartet, viser længdestriping (Schwannske skeder), ingen synlig rundcellet infiltration.

Lp.-nr. 47. K. 43. 6 mndr. gl. *Heteroplastik*. *Høire*. Marchi. 24 dage.

Fra et marsvin uttoges av n. isch. et 2,5 cm. langt stykke og implantertes ved øvre og nedre sutur i høire n. isch. paa K. 43. Vaseline paa suturestederne.

Efter 24 dage: Decubitus paa h. hæl. Ingen kontraktur i peroneerne. Atrofi av m. gastrocnemius. Transplantatet vel indhelet, ikke fortykket, adhærent til omgivende muskulatur.

Mikr.: Transplantatet ligger indhyllet i en bindevævskapsel. I methylenblaat-farvet præparat sees en svær, tæt rundcelleinfiltration, der dels er diffus og i hele tversnittet dækker al anden struktur, dels som striper og kolonner trænger ind mellem nervefibrene. I de osmerte præparater har osmiumsyren trængt helt ind til centrum av transplantatet; mængden av sortfarvet substans er dog her langt mindre end i de ytre lag. I centrum sees konturer av opsvulmede, ensfarvede, graa marvskeder, som er uregelmæssig avbrutt og ikke har gennemgaat den vanlige ellipsoide omdannelse, som vi kjender fra den Wallerske degeneration. Andre steder — og særlig i de overfladiske lag — er der en sterk sortfarvning av præparatet med tætliggende smaa, osmerte korn, som her jevnt og diffust dækker al anden struktur.

Lp.-nr. 48. K. 44. 6 mndr. gl. *Heteroplastik*. Cajal. 30 dage.

Ind i *venstre* n. isch. paa K. 44 implantertes ved øvre og nedre sutur 2,5 cm. av n. isch. fra et marsvin. Vaseline paa suturstederne.

Efter 30 dage: Stort decubitus paa venstre hæl, som ikke løftes fra jorden ved gang. Kontraktur i peroneerne. Atrofi av n. gastrocnemius.

Kaninen dræpt. Transplantatet vel indhelet opad og nedad. Det er noget fortykket, adhærent til omgivende muskulatur. Det er gulagtig av farve.

Mikr.: Rikelige regenerationsfænomener i nevrofibrillerne i centrale stump. I et av præparaterne passerer flere over i arret. Fra arret passerer andre ubrutt over i transplantatet, hvor de stanser 1,5 mm. fra arret. I transplantatet sees her rikelig rundcelleinfiltration. Vævet har vanlig, gul farve (Cajal) i de mest centrale dele; ut mot det perifere sutursted er transplantatet mørkt, næsten sort med parallelle længdestriper (graa, sorte Schwannske skeder). Forøvrigt sees her inde ingen celler og ingen struktur; utseende er nekrotisk.

Lp.-nr. 49. K. 124. 6 mndr. gl. *Heteroplastik*. Cajal. 30 dage.

I *venstre* n. isch. implantertes ved øvre og nedre sutur 1 $\frac{1}{2}$ cm. av n. isch. fra et marsvin. Vaseline paa suturstederne.

Efter 30 dage: Paralyse av m. gastr., kontraktur av peroneerne, foten kan ikke plantarboies i fotleddet. Stort decubitus paa hælen. *Dræpt*.

M. gastrocnemius paa v. side sterkt atrofisk. Transplantatet er vel indhelet ved øvre og nedre sutur. Det er betydelig tykkere end nerven ovenfor og nedenfor, adhærent til muskulaturen, gulfarvet.

Mikr.: Bra adaptation ved øvre sutursted, hvor der i den centrale stump sees neurofibriller. Disse viser i arret nogen faa endekolber. Ingen av fibrene rækker forbi arret over i transplantatet. Dette er gulfarvet, viser en utydelig længdestripning, ingen neurofibriller, men en diffus og svær rundcellet infiltration og mange tyndvæggede og — sandsynligvis nydannede — kar og kapillærer. Heller ikke i den perifere stump er der neurofibriller. Et *tersnit* av transplantatet er gulfarvet og viser en del tomme ringe (Schwannske skeder), men forøvrig et diffust, forvasket utseende, hvori skjelnes rundceller i og mellem de kollaberte Schwannske skeder; i en del av disse sees rester av gamle aksecylindre som mørke brokker.

Lp.-nr. 50. K. 13. N. 6 mndr. gl. *Heteroplastik*. Venstre. Cajal. 30 dage.

Fra en kats n. isch. uttoges 2 cm. og overførtes ved øvre og nedre sutur i venstre n. isch. paa K. 13 N. Vaseline paa suturstederne.

Efter 30 dage døde K. 13.

Paa venstre hæl et kronestort decubitus. Atrofi av m. gastrocnemius. Kontraktur av mm. peronei. Transplantatet er vel indhelet ved øvre og nedre sutur.

Mikr.: Grænsen mellem centrale stump og transplantatet er meget skarp — som trukket med en naalespids. Transplantatet er mørkt graabrunt, overalt gjennemsat, likesom tilstøvet, av fine, sorte, sort-brune korn. Det viser længdestripning (Schwannske skeder) og inde i disse mørke, lange, svakt bugtede og litt ujevne dannelser, d. v. s. rester av de gamle aksecylindre, som altsaa ikke er fragmentert paa samme maate som ved Wallers degeneration eller i auto- eller homoplastiske transplantater. I thioninfarvet præparat sees nogen rundcelleinfiltration i den centrale stump nærmest arret. Derimot ingen rundceller i transplantatet. Dette indeholder *ingen* nydannede neurofibriller.

Lp.-nr. 51. K. 11. Y. 6 mndr. gl. *Heteroplastik*. (Dræpt.) Cajal. 53 dage.

Fra en kat uttoges av n. isch. ca. $1\frac{1}{2}$ cm., anbragtes i Ringers væske av 56° \pm $\frac{1}{2}$ time og implantertes saa ved øvre og nedre sutur i høire n. isch. paa K. 11. Y.

Efter 53 dage dræptes K. 11. Y. Den har decubitus paa hælen. Atrofi av m. gastrocnemius. Kontraktur av peroneerne. Transplantatet var saagodtsom ikke adhærent, var tyndt, gulfarvet, slasket; noksaa godt indhelet opad og nedad.

Mikr.: Adskillige regenerationsfænomener i centrale stump (endekøller, delinger). Overgangen til transplantatet er skarpt markert, idet dette nærmest arret er sterkt brunfarvet, næsten helt sort og viser av struktur her kun en del opflossede længdestriper med diffuse korn. Længer perifert er det igjen lysere farvet, og her sees nekrotiske, større og mindre mørke brokker uten antydning til skeder eller nevrofibriller. — I andre snit er transplantatet helt sort, uten synlig struktur. I et præparat (snit) sees en del tynde, nydannede nervefibriller, der har vokset $1\frac{1}{2}$ mm. ned i transplantatet. I thioninpræparat sees en del rundcelleinfiltration i transplantatets mest centrale del.

Lp.-nr. 52. K. 46. 6 mndr. gl. *Heteroplastik. Venstre. Cajal.*
63 dage.

Fra en kat uttoges $2\frac{1}{2}$ cm. av n. isch. og implantertes ved øvre og nedre sutur i venstre n. isch. paa K. 46. Vaselin paa suturstederne.

Efter 63 dage: Kronestort decubitus paa hælen, foten staar dorsalflektet i fotleddet og bevæges ikke aktivt under gang; kan passivt strækkes ca. 20^0 .

Dræpt: Atrofi av m. gastrocnemius. Transplantatet er vel indhelet ved øvre og nedre sutur, ikke fortykket, let adhærent, av graagul farve, litt slasket.

Mikr.: God adaptation ved øvre sutursted, hvor der fra den centrale stump gaar flere drag parallele aksecylindre ubrutt gjennom arret. — Ovenfor og i dette sees desuten en del forvirrede og desorienterte fibrillebundter, der løper paa kryds og tvers. — Like ovenfor arret er der nogen fibre med utvilsomme regenerationsfænomener (kolber, dichotomiske delinger). — Den del av transplantatet, som ligger nærmest arret, er gulfarvet og indeholder aksecylindre, der rigtignok ikke viser tegn paa regenerationsbestrebelse, men som dog paa grund av sit noget uordnede forløp, ujevne tykkelse, krydsninger, antages at være nydannede; de gaar ikke mere end $\frac{3}{4}$ mm. nedenfor arret. — Perifert for dette sted har transplantatet mørk, flekvis næsten sort farve, er ujevnt, viser diffust kornet struktur eller parallele striper (Schwannske skeder), hvori sees rester av de gamle aksecylindre. — I thioninfarvet præparat sees transplantatet gjennemsat av en tæt rundcelleinfiltration.

Jeg skal nu resumere resultaterne av disse forsøk.

Som kontrol paa nervetransplantationerne blev der i en del tilfælder paa kaninens andet bakben gjort reseksion av n. ischiadicus, uten at noget

blev implanteret i defekten. Dette ansaaes at være af betydning for bedømmelsen baade av den spontane bevægelighed og muskelatrofien, samt forholdet ved elektrisk irritation og det decubitussaar, som efter resektion av n. ischiadicus med bibehold av n. peroneus og n. cutan. suræ medialis dannes paa hælen.

Efterat jeg paa kaniner hadde gjort 64 resektioner av n. ischiadicus, fandtes, at der i alle tilfælder, altsaa i 100 %, dannedes et decubitussaar paa hælen. Saaret begynder at dannes 12—13 dage efter resektionen og tiltar i størrelse i de følgende uker, saa det til slut er saa stort som et 2-kronestykke. Der kunde ikke være tvil om, at saaret dannedes paa grund av ophævet nerveledning, og siden resektion altid fulgtes av saardannelse, trodde jeg omvendt at kunne slutte, at kom der intet saar, var der heller ikke ophævet nerveledning. Da en del tilfælder av resektion med paafølgende auto- eller homoplastisk transplantation ikke paafulgtes av saardannelse, antoges, at man kunde bruke decubitussaaret som indikator for ophævet nerveledning og dets utebliven eller tilheling som tegn paa retablert nerveledning.

Men senere undersøkelser viste, at det ikke er saa enkelt, idet decubitussaarets dannelse efter resektion vistnok er regelen, men en regel, som ikke er uten undtagelser.

Hos 4 kaniner — 3—4 maaneder gamle søskende av samme kuld — hvorfra jeg til forsøk med regeneration i plasma reseuerte n. popliteus, kom der intet decubitus. Disse kaniner var usedvanlig kraftige, livlige og store dyr, og resektionen influerte meget litet paa deres normale gang. Der kom kun en saavidt merkbar peroneuskontraktur, og den vanlige calcaneusstilling uteblev. Paa hælen kom der forbigaaende haaravfald, men intet decubitus.

Dette er tilstrækkelig til at reducere betydningen av decubitussaaret som symptom, idet dets forhold til nerveledning er komplicert og uklart, og tydingen av dets opstaaen eller utebliven i tilsvarende grad usikker. Hvor stor andel læsion av de sensible baner og motoriske baner har i dets patogenese, vet jeg ikke.

Det ligger nær at tro, at fotens calcaneusstilling spiller en væsentlig rolle for dets dannelse; hvis ikke, skulde man vente — naar n. cutan. suræ medialis skaanes — at der ikke kom decubitus. Imidlertid er det jo ikke mulig at utelukke, at denne tynde nervegren under avløsningen fra n. popliteus trods al forsigtighet i visse tilfælder blir molestert, saa dens ledningsevne avbrytes.

BROWN-SEQUARD viste, at dannelsen av decubitussaaret paa hælen hos kaniner efter gjennomskjæring av n. ischiadicus avhænger av arten av det

underlag, dyret bevæger sig paa i buret. Det kom ikke til utvikling, hvis kaninerne opholdt sig i en kasse med hø, men dannedes hos kaniner, der løp frit omkring. Alle mine kaniner har bevæget sig frit i et bur med sagflis og hø paa bunden, saa de har for saavidt været holdt under ensartede vilkaar, og forklaringen paa de forskjelligheter, der observertes i utviklingen av decubitus, er ikke at søke i ydre forhold.

Alt i alt antar jeg, at decubitussaarets forhold ikke kan brukes som indikator for ophævet eller tilstedeværende nerveledning, og at det i ethvert fald kun maa tillægges en relativ betydning.

Blandt de 15 *autoplastiske* transplantationer kom der decubitus i 3 tilfælder; det dannedes ikke i 11 tilfælder, og i et tilfælde er der intet notert desangaaende, da dette (K. 82, lp.-nr. 5) undersøktes, førend endnu oppmerksomheten var rettet paa decubitus.

I 29 tilfælder av *homoplastik* kom der decubitus i 13 tilfælder, mens det ikke kom til utvikling i 16 tilfælder, og i samtlige 8 tilfælder av *heteroplastik* kom der decubitus paa hælen.

Undersøkelse paa spontan bevægelighet i de muskler, der efter resektion og transplantation blev lammet, er gjort i de fleste tilfælder; den mangler hos en del kaniner, der døde. Like efter transplantationen var der hos alle kaniner lammelse av musklerne paa læggens boieside (triceps suræ), og kaninen kunde ikke sprike i tærne. I de følgende 2—3 uker kom der efterhaanden kontraktur i peroneerne, og foten indtok calcaneusstilling. Det tidligste tidspunkt for tilbakevendt aktiv kontraktion av m. gastrocnemius er 50 dage efter transplantationen (K. 6. Y, lp.-nr. 7) og i et andet tilfælde 53 dage efter transplantationen (K. 28, lp.-nr. 8). Hos den første av disse kaniner var der resecert 1½ cm. og hos den anden 3 cm., og hos begge var defekten dekket ved *autoplastik*. Men saa kommer der 3 autoplastiker (K. 72.1, lp.-nr. 11; K. p. 67, lp.-nr. 12 og K. 10, lp.-nr. 13), hvor der efter 57, 60 og 63 dage var kontraktur av peroneerne uten tegn til aktiv kontraktion av m. gastrocnemius. Ved autoplastik er der imidlertid normal gang 120 og 136 dage efter transplantationen hos K. p. 68 (lp.-nr. 15) og K. 132 (lp.-nr. 37); hos begge disse var der paa venstre ben gjort autoplastik, paa høire homoplastik. Hos K. p. 68 (lp.-nr. 15) var der god aktiv bevægelighet ibegge ben efter 120 dage; hos K. 132 (lp.-nr. 37) var der fri aktiv bevægelighet paa venstre side, men ikke paa høire efter 107 dage.

Da kaninerne døde, fandtes hos K. p. 68 (lp.-nr. 15), som døde 163 dage efter transplantationen, begge m. gastrocnemici tykke, røde og svulmende, av omtrent ensartet tykkelse; transplantaterne var av omtrent samme tykkelse; homoplastiken hadde en litt rødere farve end nerven ellers, mens autoplastiken hadde den samme hvite farve som nerven ovenfor og nedenfor. (Fotografi.)

Hos K. 132 (lp.-nr. 37), som døde 136 dage efter transplantationen, fandtes sterk atrofi av m. gastrocnemius paa høire side (homoplastik), men svulmende, rød og kraftig m. gastrocnemius paa venstre side (autoplastik). (Fotografi.) Fig. 53.

Ved *homoplastik* tar det gjennomgaaende litt længere tid, før spontan bevægelighet vender tilbake. Efter 80 dage og 136 dage (K. p. 65, lp.-nr. 34 og K. 132, lp.-nr. 37) er der endnu kontraktur av peroneerne og atrofi av m. gastrocnemius. K. p. 90 (lp.-nr. 43), sort, har dog god bevægelighet efter 58 dage, det samme har K. p. 90 (lp.-nr. 44), graa, efter 58 dage. K. 153 (lp.-nr. 36) har efter 105 dage fri aktiv bevægelighet i fotleddet, og det samme findes efter 120 dage hos K. p. 68 (lp.-nr. 38). K. p. 89 (lp.-nr. 41), hvit, har fri aktiv bevægelighet i fotleddet efter 267 dage, K. p. 89 (lp.-nr. 42), graa, efter 273 dage.

Efter *heteroplastik* er der ikke i noget tilfælde kommet aktiv bevægelighet, men undersøkelsen strækker sig her ikke længere end til 63 dage efter transplantationen.

Som tidligere paapekt er *elektrisk irritation* av den blotlagte nerve den eneste paalidelige metode til undersøkelse av nervens funktion. Dette er gjort 1 gang ved autoplastik og 7 gange ved homoplastik.

Hos K. 71 (lp.-nr. 10) (*autoplastik*) blottedes transplantatet 49 dage efter transplantationen i æternarkose. Transplantatet (2,5 cm. langt) var adhærent til omgivende muskulatur ved tynde bindevævsmembraner; det var hvitt, av samme utseende og tykkelse som nerven ovenfor og nedenfor. Efter løsning fra omgivelsene og isolation ved et stykke gummipapir irritertes nerven ved faradisk strøm. Der kom rykning i m. gastrocnemius ved en sek.rulleavstand av 6,5 cm., men ingen rykning i tærne. Hos normale kanner kommer i almindelighet rykning i m. gastrocnemius ved sekundærrulleavstand 10—11—12 cm., d. v. s. irritabiliteten av m. gastrocnemius var alt-saa endnu ikke fuldt restituert. Hos denne kanin er den spontane bevægelighet ikke notert.

Efter *homoplastik* undersøktes paa elektrisk irritabilitet i 7 tilfælder. 70 dage efter transplantationen hadde kanin K. 7 y (lp.-nr. 33) ingen spontan bevægelighet, og der kom ingen rykning ved applikation av faradisk strøm.

De andre 6 homoplastiker undersøktes elektrisk 105, 135, 267, 273, 262 og 268 dage efter transplantationen, og hos samtlige var der god elektrisk irritabilitet.

Hos K. 153 (lp.-nr. 36, 7 mndr. gl.) kom der 105 dage efter transplantationen rykning i m. gastrocnemius paa venstre side ved en sekundærrulleavstand av 9 cm., akkumulator 2 volt. (Paa det andet ben, høire, var en like stor — 3 cm. lang — defekt dækket med katgut; her var ingen elektrisk reaktion.) Kaninen hadde fri aktiv bevægelighet i fotled og tær paa venstre side, ingen be-

vægelighed paa høire side; her fandtes ingen nervøs forbindelse, men atrofi av m. gastrocnemius, mens denne muskel paa venstre side var sterk og svulmende. (Fotografi.) Fig. 55.

Hos K. 115 (lp.-nr. 40, 6 mndr. gl.) var der 135 dage efter transplantationen god rykning i m. gastrocnemius paa høire side (ingen paa venstre side, hvor 3 cm. var resecert). Hertil svarte, at høire ben hadde fri aktiv bevægelighed og ingen kontrakturer, mens der paa venstre ben var kontraktur av laarets fleksorer og peroneerne, og da kaninen 348 dage efter transplantationen døde, var der svær atrofi av m. gastrocnemius paa venstre side, derimot ikke paa høire side, hvor der heller ikke var decubitus, mens der paa venstre hæl var et stort decubitus¹. (Fot.) Fig. 56.

K. p. 89 (lp.-nr. 41). Hvit kanin, 6 mndr. gl., viste ved elektrisk undersøkelse 267 dage efter transplantationen god rykning i m. gastrocnemius ved sekundærrulleavstand 8 cm. paa høire side, hvor der var transplantert. Paa det andet ben, hvor intet var sat ind i den 3 cm. lange defekt, kom der en svak rykning i m. gastrocnemius ved sekundærrulleavstand $5\frac{1}{2}$ cm., saa her var øiensynlig indtraadt en begyndende regeneration; m. gastrocnemius var tynd, gul og atrofisk. Men tilfældet er det eneste av samtlige mine resecerte kaniner, hvor der er kommet regeneration av en 3 cm. lang defekt, uten at denne er dækket ved implantation, og det er av interesse, fordi det altsaa viser, at en saadan ufuldstændig regeneration i undtagelses-tilfælder kan forekomme hos 6 mndr. gl. kaniner. Kaninen døde 360 dage efter transplantationen. Præparatet er opbevaret.

Hos K. p. 89 (lp.-nr. 42), graa, var der 273 dage efter transplantationen god rykning i m. gastrocnemius, der var svulmende og tyk, ved sekundærrulleavstand 9 cm. og ved sekundærrulleavstand 10 cm. paa det friske ben, altsaa næsten fuld restitution. Kaninen hadde fri bevægelighed i fotleddet.

Hos K. p. 90 (lp.-nr. 43), sort, var der 58 dage efter en homoplastik paa 3 cm. aktiv bevægelighed i fotled og tær, og 193 dage efter transplantationen var der under gang ingen forskjel mellem høire ben (hvor plastiken var utført) og venstre, som var urørt. 268 dage efter transplantationen kom der rykning i m. gastrocnemius ved sekundærrulleavstand 8,5 cm. paa høire side og ved sekundærrulleavstand 9 cm. paa venstre side.

K. p. 90 (lp.-nr. 44), graa, viste god aktiv bevægelighed i fotleddet 58 dage efter en homoplastisk implantation paa 2,5 cm. 262 dage efter transplantationen var der rykning i m. gastrocnemius, som var tyk og sterk, ved sekundærrulleavstand 8,5 cm., mens der *ikke* kom rykning paa det andet ben, hvor 2,5 cm. av n. ischiadicus var resecert, uten at noget var sat ind.

¹ Denne kanin fremvistes i 1914 i Medicinsk selskap. Med. selsk. forhandl. N. Mag. f. l. v. 1914 nr. 5.

Den *anatomiske undersøkelse* av de transplanterte nervesegmenter supplerer, hvad vi fra de i forangaaende kapitel meddelte forsøk vet om transplantatets skjæbne. De deri meddelte resultater omhandler væsentlig de degenerative forandringer og de Schwannske cellers forhold i de 2—3 første uker efter transplantationen, mens vi nu skal fæste opmerksomheten ved regenerationsfænomenerne i de senere stadier.

De *autoplastiske* transplantater viser makroskopisk ikke store forandringer. Alle var ved uttagelsen vel indhelet ved øvre og nedre sutur, og de fleste sutursteder viste en let opsvulmning i forhold til nerven. Men opsvulmningen var dog i flere tilfælder saa ubetydelig, at suturstedet ikke derav med sikkerhet kunde identificeres (se fot. fig. 53, K. 132, lp.-nr. 37), og først silketraadens tilsynekomst i de mikroskopiske præparater viste suturstedet.

De *autoplastiske* transplantater er ved bindevævssammenvoksning let adhærente til omgivende muskulatur og har enten beholdt sin tykkelse, eller de er litt tykkere end nerven ovenfor og nedenfor. Kun i 1 tilfælde (K. 82, lp.-nr. 5) var transplantatet litt tyndere end nerven. Transplantatet har nervens vanlige, faste konsistens og dens hvite farve, men mangler dens glans paa grund av det omgivende tynde bindevævslag.

Regenerationsfænomenerne har jeg studert ved histologisk undersøkelse av sølvimpregnerte snitpræparater (15 μ tykke). I *alle* de undersøkte 15 tilfælder av autoplastik er der regeneration av aksecylindre.

Disse findes i transplantatet 3 uker efter operationen, og man ser ved øvre sutursted, hvorledes mange av nervefibrillerne i transplantatet danner den direkte og ubrutte fortsættelse av nervefibrillerne i den centrale stump. Dette er tydeligst i de præparater, der ved øvre sutursted viser god adaptation og litet arvæv. Av disse 2 faktorer bestemmes ogsaa antallet av Perroncito-nøster og kolber, som viser det omvendte forhold, idet der er faa av dem ved god adaptation og litet arvæv, mange, hvor der paa grund av rikelig arvæv og daarlig adaptation er vanskeligheter og hindringer at overvinde under utvoksningen.

Naar nervefibrillerne er kommet over i transplantatet, ordner de sig i større og mindre bundter, hvis der er mange av dem — eller de løper enkeltvis, hvis der er faa. De har da et jevnt, oftest næsten retlinjet forløp gjennom hele transplantatet, indtil de kommer over til det perifere sutursted, hvor der igjen kan optræde Perroncito-nøster, hvis mængde her likesom ved det centrale sutursted staar i omvendt forhold til antallet av fibriller, der passerer direkte over i det perifere avsnit. (K. 82, lp.-nr. 5.) Dette bekræfter den antagelse, at dannelsen av Perroncito-nøsterne betinges i motstand mot nervefibrillens utvoksning i længden, saa den blir nødt til at slynge sig om sig selv, idet den saa at si gjør paa stedet marsj.

Hvor raskt utvoksningen av fibrillerne foregaar, kan vi faa et begrep om derved, at de efter 21 dage er vokset 12 mm. ned gennem transplantatet (K. 5, lp.-nr. 2) og efter 30 dage allerede har vokset gennem hele transplantatet, der er 2 cm. langt, og har passert det perifere sutursted.

Hvis dette repræsenterer deres gennemsnitlige veksthastighed, er der intet i veien for at anta, at den spontane bevægelighet, som er notert hos K. 67 (lp.-nr. 12) og K. 28 (lp.-nr. 8) efter 50 respektive 53 dage — og den rykning i m. gastrocnemius, som hos K. 71 (lp.-nr. 10) fandtes ved elektrisk irritation av nerven ovenfor transplantatet 49 dage efter transplantationen, er betinget i en delvis regeneration helt ut til muskelforgreningerne, ja efter alt hvad vi vet, er dette den mest nærliggende, for ikke at si eneste mulige forklaring.

Det, som dernæst interesserer, er forholdet mellem transplantatets Schwannske skeder og de nye nervefibriller; — løper disse inde i eller mellem de Schwannske skeder? Spørsmålet er ikke saa let at avgjøre, men i enkelte præparater fremgaar det noksaa tydelig, at de unge nervefibriller ligger *mellem* de Schwannske skeder (K. 42, lp.-nr. 3—4); i andre præparater fra K. 82 (lp.-nr. 5) og her særlig klart i tversnit sees, at en del av fibrillerne ligger *inde i* de gamle Schwannske skeder mellem denne og eventuelt resterende myelin. Transplantatet ligner altsaa paa dette punkt det perifere segment av en overskaaret og suturert nerve under regeneration. Ogsaa under disse forhold finder man de nyutvokste nervefibriller saavel inde i som indimellem de Schwannske skeder.

I det hele har jeg ikke kunnet finde nogen væsensforskjel mellem regenerationsfænomenerne i en implantert autoplastik og det perifere segment av en overskaaret og suturert nerve — hverken ved overgangene paa suturstederne eller i nerven selv. I arret finder vi, foruten de allerede omtalte Perroncito-nøster og kolber, ogsaa de velkjendte delinger i T-form eller Y-form, idet der paa delingsstedet er ansamlet en liten oval eller 3-kantet protoplasmaklump.

I enkelte præparater, særlig fra mere fremskredne stadier (50 dage efter transplantationen, K. 6, lp.-nr. 7), er de unge nervefibriller under sit forløp gjennom transplantatet rikelig besat med mindre og større varikositeter, fra saavidt synlige, op til 3—4 μ brede, ovale opsvulmninger av fibrillerne. Deres natur eller betydning skal jeg la staa hen. Det er ikke usandsynlig, at det er et ganske banalt fænomen; i ethvert fald var det en ofte tilbakevendende foreteelse hos de i plasma utvoksende eksperimentelle nervefibre.

Fra regenerationsprocessens senere stadier er flere præparater undersøkt paa marvskederegeneration — fra 53 dage til 163 dage efter transplantationen. I *alle* disse tilfælder (7 i alt) er der paavist regeneration av myelin-

klædte nervefibre. — I de osmerte præparater kan man studere resorptionen av de degenererte myelinfibre, og man finder da, at resorptionen er adskillig forsinket i sammenligning med, hvad den er i det perifere avsnit av en overskaaret nerve, hvilket stemmer med, hvad derom er anført i forrige kapitel. Men resorptionen av myelinet er dog i stadig fremadskriden, og 60 dage efter transplantationen (K. p. 67, lp.-nr. 12) sees kun rester tilbage.

Jeg har allerede i forrige kapitel undersøkt cellernes forhold i transplantatet og fundet, at antallet av indvandrede celler i de første 2—3 uker var omtrent som i det perifere avsnit av en overskaaret nerve. Undersøkelsen av de præparater, som i denne serie er behandlet med kjernefarver (thionin og methylenblaat), viser, at dette gjælder ogsaa de senere stadier. I autoplastiker findes *ingen ansamling* av indvandrede celler (herfra er der kun en undtagelse, K. 42 (lp.-nr. 3—4), hvor der paa suturstedet er adskillige rundceller).

Transplantatets egne Schwannske celler er det vanskelig at kontrollere i denne serie, da implantationen tillater disse at vokse ind i transplantatet fra begge ender.

Ved 2 av autoplastikerne K. 28 (lp.-nr. 8) og K. p. 67 (lp.-nr. 12) blev transplantatet vendt rundt 180°. Det undersøktes efter 53 og 60 dage og fandtes rikelig gjennemvokset av myelinfibre. Utskaarne nervesegmenter har altsaa ikke polaritet, hvilket allerede er paavist av Gluck og Kilvington, Kennedy og Verga.

Ved *anatomisk* undersøkelse av de *homoplastiske* transplantater findes, at alle er vel indhelet paa suturstederne (med undtagelse av et tilfælde, K. 8 y, lp.-nr. 27, hvor nedre sutur var løsnet).

Suturstederne viste som oftest en let opsvulmning. De transplanterte segmenter var dels *ikke fortykket*: K. 5 (lp.-nr. 19), 3 y (lp.-nr. 22), 13 y (lp.-nr. 23), 118 (lp.-nr. 26), 7 (lp.-nr. 33), p. 65 (lp.-nr. 34), 153 (lp.-nr. 36), 115 (lp.-nr. 40); dels *noget fortykket*: K. 9 (lp.-nr. 18), 24 (lp.-nr. 21), 156 (lp.-nr. 35), 135 (lp.-nr. 39); dels *sterkt fortykket*: K. 83 (lp.-nr. 24), 8 y (lp.-nr. 27). I 2 tilfælder var transplantatet *tyndere* end nerven ovenfor og nedenfor: K. 10 y (lp.-nr. 32), 132 (lp.-nr. 37). Aarsakerne til disse variationer fremgaar ikke av forsøkene.

I de aller fleste tilfælder var transplantatet ved bindevævsagtige sammenvoksninger adhærente til omgivende muskulatur; kun i 2 tilfælder, K. 12 y (lp.-nr. 17) og 13 y (lp.-nr. 23), var der ingen adhærens; disse var paa forhaand konserveret i vaselin, som ved implantationen ikke helt kunde fjernes, og som derfor har hindret utviklingen av adhærens. De homoplastiske transplantaters farve er gjennemgaaende hvit og konsistensen

fast; den glinsende overflate er ikke mere synlig paa grund av bindevævsadhærensers.

I 2 tilfælder, K. 153 (lp.-nr. 36) og K. p. 68 (lp.-nr. 38), hadde transplantatet en let rødlig farve, som ialfald hos K. p. 68 (lp.-nr. 38) skyldtes en rikelig vaskularisation.

Histologisk undersøkelse paa regenerationsfænomener er utført i 23 tilfælder, og i *alle fandtes regeneration av nervefibre*, som allerede 13 dage efter transplantationen har fundet veien gjennom det centrale sutursted over i transplantatet. Kommet over hit viser de det samme forhold som i autoplastikerne, og 3 uker efter transplantationen findes homoplastiken hos K. 9 y (lp.-nr. 18) rikelig nevrotisert (fig. 51). De aller fleste fibriller løper her ubrutt over fra den centrale stump, og findes allerede 1½ cm. nede i transplantatet, hvor de løper i kraftige, paralelle bundter. Heller ikke i de mere fremskredne stadier av regeneration er der nogen væsensforskjel mellem nervefibrillerne i homoplastikerne og autoplastikerne, eller mellom disse og det perifere avsnit av en overskaaret og suturert nerve.

Ogsaa i de homoplastiske transplantater løper nervefibrillerne dels inde i, dels mellom de gamle Schwannske skeder, og deres utstyr med varikositeter, kolber, Perroncito-nøster og forgreninger avviker ikke fra, hvad der foran er skildret for autoplastikernes vedkommende.

Resorptionen av transplantatets degenererte myelinskeder foregaar langsommere end i det perifere segment av en overskaaret nerve.

Efter 57 dage findes myelinfibre i transplantatet (K. p. 72.1, lp.-nr. 11); det er dermed ikke sagt, at saadanne ikke forekommer paa et tidligere stadium, men der er ikke undersøkt tidligere ved marvskedefarvning.

Angaaende cellernes forhold i de homoplastiske transplantater henvises for de Schwannske cellers vedkommende til forrige kapitel. De indvandrede celler er her noget flere end i autoplastikerne, men kun i et av de 6 tilfælder, der er behandlet med kjernefarve, (K. 23, lp.-nr. 16) er der paavist en virkelig ansamling av rundceller inde i transplantatet.

I 3 tilfælder: K. 23 (lp.-nr. 16), 12 (lp.-nr. 17), 5 (lp.-nr. 19), fandtes rundcelleansamling ved suturstederne, og det er værd at lægge merke til, at ingen av disse var blit besmurt med vaselin.

Blandt de 29 tilfælder av homoplastik var det i 7 tilfælder ukjendt, om der mellom giver og mottager var *noget slegtsskapsforhold*. Blandt de resterende 22 var i 11 tilfælder giver og mottager av samme kuld. I de andre 11 tilfælder kunde man selvsagt ikke med bestemthet utelukke slegtsskap mellom giver og mottager, men om disse visste man, at de i ethvert fald ikke var søskende. Ved sammenlikning mellom de 2 serier hver paa

11 transplantationer findes, at *slegtskapsforholdet ikke har hat paavisselig indflydelse paa resultatet.*

Av de 8 heteroplastiske *transplantater* er 5 fra kattens n. poplitæus, 3 fra marsvinets n. ischiadicus. Mellem kattenerven og marsvinnerven fandtes ved undersøkelsen ingen forskjel i anatomisk henseende. Transplantaterne var indhelet paa suturstederne allerede 12 dage efter transplantationen, men de var gule, bløte, slaskede, nekrotiske. De fleste var let adhærente til omgivende muskulatur.

Ved histologisk undersøkelse findes efter sølvimpregnation, at transplantatet er mørkfarvet, i flere tilfælder helt sort av amorf brokker og korn eller fint støv, mens kun hist og her sees en længdestripning som rester av de gamle Schwannske skeder. Inde i enkelte av disse findes mørke, lange, svakt bugtede og ujevne dannelser, der repræsenterer de gamle aksecylindre, som altsaa ikke har gennemgaaet den vanlige Wallerske degeneration.

Dernæst findes i 7 av de 8 heteroplastiske transplantater *en svær rundcelleansamling*, væsentlig bestaaende av store, enkjernede celler.

I samtlige 7 sølvimpregnerte heteroplastiker findes mere og mindre uttalte regenerationsfænomener fra aksecylindrene i den overskaarne nerves centrale ende. I 2 tilfælder naar de nyutvokste nervefibriller ikke engang over i arret (K. 17, 17, lp.-nr. 45, 46). I 2 tilfælder (K. 124 og 13, lp.-nr. 49, 50) rækker de saavidt over i arvævet uten at trænge ind i transplantatet, og i 3 tilfælder har de vokset 1,5 respektive $\frac{3}{4}$ mm. ned i dette. Bortset fra denne betydningsløse regeneration *findes i de 8 transplantater ingen nydannede nervefibriller.*

Den anatomiske undersøkelse av præparaterne i denne serie viser altsaa ogsaa en prægnant forskjel mellem de auto- og homoplastiske transplantater paa den ene side, og de heteroplastiske paa den anden. I auto- og homoplastiker er der en let grad av rundcelleinfiltration og livlig regeneration av unge nervefibriller. I heteroplastiker er der en svær rundcelleansamling, nekrose av transplantatet og saagodtsom ingen regeneration av unge nervefibriller.

Transplantation efter konservering.

I en særskilt forsøksrække har jeg undersøkt nervefibrenes forhold under konservering paa is i Ringers væske og vaselin. For at undersøke dette maa man ha en iskasse med absolut isolation, saa temperaturen ikke stiger over $+ 1^{\circ}$. Nerverne anbringes her i glastuber.

Ved konservering i *Ringers væske* findes efter 24 og 48 timer ingen forandring i den histologiske struktur; ved undersøkelse senere findes nogen faa myelinovoider, og efter 6—7 dage kan der være dannet en del flere. Hvis en saadan nerve, som har været konserveret 7 dage i *Ringers væske* paa is, bringes herfra til termostat av 38^0 , skrider ovoidformationen raskt fremad, og efter 24 timer er myelinskeden komplet fragmentert. Men stort længere end 6—7 dage taaler ikke nervefibre at konserveres paa is i *Ringers væske*. Strukturen begynder efter dette tidsrum at forandres paa en maate, der avviker fra den Wallerske degenerations type, idet marvskedens indre konturer forvisses, saa den flyter sammen med aksecylindren, og de Schmidt-Lantermannske incisurer forsvinder. Efter 22—23 dage finder man inde i den Schwannske skede større og mindre opake og hyaline klumper, og fiberen har antat et eiendommelig voksagtig og næsten homogent utseende.

Ved konservering av nervesegmenter i *vaselin* paa is findes efter 24 og 48 timer ingen forandringer i strukturen. Heller ikke efter 6 døgn findes nogen avvikelser fra dens normale histologiske forhold; det samme gjælder konservering i vaselin i 24 dage; der er paa dette tidspunkt ikke dannet ovoider. Naar de nervefibre, der har været konserveret paa is i vaselin i 6 døgn, bringes over i *Ringers væske* av 38^0 i 24 timer, segmenteres myelinskeden paa vanlig vis, men der kommer ingen segmentering av de fibre, der har været konserveret 24 dage i vaselin.

Av disse forsøk kan man slutte, at saavel *Ringers væske* som vaselin er gode konserveringsmidler for perifere nerver paa is i op til 6 dage.

Som det fremgaar av forsøksprotokollen, har saadanne iskonserverte nervesegmenter i 4 tilfælder været anvendt til dækning av nervedefekter. 2 homoplastiske transplantater (K. 12 y og 13 y, lp.-nr. 17, 23) blev konservert paa is i vaselin i 4 dage. 19 dage efter transplantationen fandtes hos K. 12 y (lp.-nr. 17) ved histologisk undersøkelse talrike nervefibriller i transplantatet, og hos K. 13 y (lp.-nr. 23) fandtes 30 dage efter transplantationen, at nervefibrillerne var vokset $1\frac{1}{2}$ cm. ned gjennom transplantatet. Efter konservering paa is i *Ringers væske* i 6 døgn fandtes ved histologisk undersøkelse av dette transplantat hos K. 24 y, v. (lp.-nr. 20) talrike indvokste nervefibriller. Og disse konserverte segmenter viser histologisk i det hele ingen avvikelse fra dem, der er transplantert direkte.

Det samme gjælder det *heteroplastiske transplantat*, som overførtes efter 4 døgn konservering paa is. (K. 17, lp.-nr. 45.) Det fandtes ved histologisk undersøkelse 12 dage efter transplantationen nekrotisk, rundcelleinfiltrert uten nervefibriller og avviker ikke paa noget punkt fra de direkte overførte heteroplastiker.

Transplantation av dræpte nervesegmenter.

For at utelukke enhver indflydelse paa regenerationen av de unge nervefibriller fra transplantatets egne, levende celler har jeg i en del tilfælder forut for transplantationen dræpt disse ved ophetning i Ringers væske til 56^0 i 20 minutter. Dette blev gjort 2 gange ved autoplastik (K. 9, lp.-nr. 1 og K. 5, lp.-nr. 2), 3 gange ved homoplastik (K. 8, K. 6 og K. 10, lp.-nr. 27, 28 og 32) og 1 gang ved heteroplastik (K. 11 y, lp.-nr. 51). Samtlige transplantater var ved uttagelsen indhelet paa suturestederne.

I baade auto- og homoplastikerne fandtes ved histologisk undersøkelse rikelig indvoksning av unge nervefibriller fra den centrale stump.

I den ene autoplastik (K. 9, lp.-nr. 1) er disse nervefibriller 20 dage efter transplantationen tildels opdelt i smaa brokker og korn uten indbyrdes sammenhæng — et utseende, som avviker fra det vanlige saa meget, at det maa antages at ha en egen betydning. Og det ligger nær at anta, at dette utseende bestemmes av det medium, hvori disse fibre vokser, at det med andre ord er en følge av, at transplantatet er dræpt. I den anden autoplastik finder man derimot efter 21 dage *masser* av kraftige nervefibriller, der har gjennomtrængt det centrale suturested og er vokset 12 mm. ned gjennom transplantatet, hvor de ligger parallelt i store bundter, for det meste *mellem* de Schwannske skeder. Disse fibre avviker ikke paa noget punkt fra dem, man finder under regeneration i det perifere segment av en overskaaret nerve efter suture.

I de 2 homoplastiker (K. 8 og K. 6, lp.-nr. 27, 28) findes 48 og 50 dage efter transplantationen *masser* av nye, indvokste nervefibre i transplantatet — for det meste *mellem* de Schwannske skeder. Og hos K. 10 (lp.-nr. 32) findes der i transplantatet efter 63 dage en del myelinfibre.

Disse eksperimenter viser, at transplantatets levende celler er uten betydning for nervefibrillernes indvoksning i dette fra den centrale stump, og at en ophetning av transplantatet til 56^0 i 20 minutter ikke forandrer dets strukturelle forhold saa meget, at nervefibrenes indvoksning derved vanskeliggjøres eller forhindres.

Disse eksperimenter er imidlertid av betydning ogsaa for vort syn paa nerve regeneration i sin almindelighet. Ved den fremgangsmaate, jeg her har anvendt, er der nemlig i den levende organisme indskutt et stykke dødt væv, hvori de levende nervefibriller vokser ind. Ingen vil vel paa-staa, at transplantatets Schwannske celler efter denne ophetning kan bidrage til at danne nervefibre; og da saadanne er dannet i disse transplantater i like stor mængde og med samme utseende som i normale transplantater, er der ingen grund til at anta, at transplantatets Schwannske celler spiller

nogen anden eller større rolle i det sidste tilfælde end i det første. Og vi kommer da til den konklusion, at *auto- og homoplastiske transplantaters Schwannske celler er uten nogensomhelst biologisk betydning for regeneration av transplantatets nye nervefibriller, som vokser ind i transplantatet fra den centrale stump, enten transplantatet er levende eller dødt.*

Deres videre skjæbne her synes ikke at avvike fra, hvad der er dem beskaaret i et overlevende nervesegment. Det henfald, som er iagttat i den ene autoplastik (K. 9. lp.-nr. 1), viser dog, at man her maa ytre sig med forsigtighet; ti det er rimelig at sætte nervefibrenes kornede degeneration i forbindelse med det dræpte transplantat; det kornede henfald antyder, at nervefibre, der vokser ind i dræpte transplantater, i visse tilfælder degenererer, mens de i de fleste (4 av 5 forsøk) ikke viser nogen degenerative forandringer.

I det forsøk, hvor et *heteroplastisk* segment implantertes efter at være dræpt ved ophetning (K. 11, lp.-nr. 51), fandtes ved histologisk undersøkelse 53 dage efter transplantationen en del smaa tynde nervefibre $1\frac{1}{2}$ mm. ned i transplantatet. Ellers er dette nekrotisk med en del rundcelleinfiltration. Heteroplastiske transplantater blir altsaa ikke mere skikkede til at opta de utvoksende nervefibre, efterat det er dræpt ved ophetning, end naar det planteres direkte. I begge tilfælder er det hjemfaldt til nekrose.

Autoplastik.

Løp- nr.	Kænn nr.	Dyrets alder.	Transplanter- tes direkte? (Levende? Konservet?) Dræbt? Nerve-seg- ment.	Vaselin paa suture- derne.	Døde dy- ret, eller blev det dræbt?	Hvor længe efter trans- plantationen døde dyret?	Nervefunktion.			Histologisk undersøkelse.
							Decu- bitus.	Spontan bevæge- lighed.	Elektrisk undersøkelse.	
1.	K. 9. Y.	5 mndr.	Dræbt ved ophetning.	Ja.	Døde.	20 dage.	Ja.	Ingen.		+
2.	K. 5.	6 mndr.	Dræbt ved ophetning.	Nei.	Døde.	21 dage.	Nei.	Ingen.		+ 12 mm. lange fibriller.
3.	K. 42. h.	5 mndr.	Direkte.	Nei.	Dræbt.	30 dage.	Nei.	Ingen.		+
4.	K. 42. v.	5 mndr.	Direkte.	Nei.	Dræbt.	30 dage.	Nei.	Ingen.		+
5.	K. 82.	4 mndr.	Direkte.	Nei.	Dræbt.	30 dage.		Ingen.		+
6.	K. 2. Y.		Direkte.	Nei.	Døde.	40 dage.	Nei.	Ingen.		+
7.	K. 6. Y.	7 mndr.	Direkte.	Nei.	Dræbt.	50 dage.	Nei.	Strækker i fot- led. Sprækker i tærne.		+
8.	K. 28.	6 mndr.	Direkte.	Ja.	Dræbt.	53 dage.	Nei.	Strækker i fot- leddet.		+

Autoplastik. (Forts.).

Løp- nr.	Kanin nr.	Dyrets alder.	Transplanter- tes direkte? (Levende? Konserverv?) Draept? Nerveseg- ment.	Vaselin paa suture- stederne.	Døde dy- ret, eller blev det draept?	Hvor længe efter trans- plantation døde dyret?	Nervefunktion.			Histologisk undersøkelse.
							Decu- bitus,	Spontan bevæge- lighed,	Elektrisk undersøkelse.	
9.	K. p. 69.	6 mndr.	Direkte.	Ja.	Døde.	54 dage.	Nei.	?		+
10.	K. 71.	10 mndr.	Direkte.	Ja.	Døde.	54 dage.	Nei.	?	Rykning i m. gastr. ved direkte applik. av faradisk strøm oven- for transpl. 49 dage efter transplantationen.	+
11.	K. 72. I.	8 mndr.	Direkte.	Ja.	Draept.	57 dage.	Ja.	Nogen kontrak- tur av perone- erne.		+
12.	K. p. 67.	6 mndr.	Direkte.	Ja.	Døde.	60 dage.	Ja.	Kontraktur av peroneerne.		+
13.	K. 10.	6 mndr.	Direkte.	Ja.	Draept.	63 dage.	Nei.	Strækker ikke i fotledet.		+
14.	K. 132. v.	6 mndr.	Direkte.	Ja.	Døde.	136 dage.	Nei.	Ingen kontraktur. Aktiv bevæge- lighed i fotled.		+
15.	K. p. 68.	8 mndr.	Direkte.	Ja.	Døde.	163 dage.	Nei.	Normal gang.		+

Homoplastik.

Løp- nr.	Kanin nr.	Dyrets alder.	Transplanter- tes direkte? (Levende eller konserveret?) Drept? Nerveseg- ment.	Vaselin paa suture- stederne.	Slegtskap mellem de 2 dyr?	Hvor længe efter tr. døde (dræptes) dyret?	Nervefunktion.		Histologisk undersøkelse.	
							Decu- bitus.	Spontan bevæge- lighed.	Elektrisk undersøkelse.	Regenerationsfænomener.
16.	K. 23. Y.	6 mndr.	Direkte.	Nei.	Intet.	Døde, 13 dage.	Ja.	Ingen.		+
17.	K. 12. Y.	5 mndr.	Konserveret i vaselin paa is i 4 dage.	Nei.	Intet.	Døde, 19 dage.	Nei.	Let kontraktur av peroneerne.		+
18.	K. 9. Y.	5 mndr.	Direkte.	Ja.	Intet.	Døde, 20 dage.	Ja.	?		+
19.	K. 5. Y.	6 mndr.	Direkte.	Nei.	Intet.	Døde, 21 dage.	Ja.	?		+
20.	K. 24. Y. v.	6 mndr.	Konserveret i vaselin paa is i Rind- gers vasker i 6 døgn.	Nei.	Søskende.	Døde, 22 dage.	Nei.	?		+
21.	K. 24. Y. v.	6 mndr.	Direkte.	Nei.	Søskende.	Døde, 22 dage.	Nei.	?		+
22.	K. 3. Y.	5 mndr.	Direkte.	Ja.	Søskende.	Døde, 25 dage.	Nei.	Kontraktur av peroneerne.		+
23.	K. 13. Y.	6 mndr.	Konserveret i vaselin paa is i 4 dage.	Ja.	Søskende.	Døde, 30 dage.	Ja.	Kontraktur av peroneerne.		+ Fibriller i 15 mm.s længde ned gennem transplan- taten.

Homoplastik. (Forts.).

Løp- nr.	Kanin nr.	Dyrets alder.	Transplanter- tes direkte? (Levende eller konserveret?) Dræpt? Nerveseg- ment.	Vaselin paa sutureste- derne.	Slegtsskap mellem de 2 dyr.	Hvor længe efter tr. døde (dræptes) dyret?	Nervefunktion.		Histologisk undersøkelse.
							Decu- bitus.	Spontan bevæge- lighed.	Elektrisk undersøkelse.
24.	K. 83.	5 mndr.	Direkte.	Nei.	Søskende.	Døde, 30 dage.	Decubi- tus i til- heling.	.	+ Fibre ogsaa perifert for transplantatet.
25.	K. 96. Y.	6 mndr.	Direkte.	Nei.	Intet.	30 dage. Transplan- tatet uttoges av den le- vende kanin.	Nei.	?	+
26.	K. 118.	7 mndr.	Direkte.	Ja.	Intet.	Døde, 35 dage.	Nei.	?	+ 1 cm. ned gjennom trans- plantatet.
27.	K. Y. 8.	7 mndr.	Dræpt ved ophetning til 56° i Ringersvæ- ske i 20 mi- nutter.	Ja.	?	Død, 48 dage.	Ja.	Kontraktur av pe- roneerne.	+
28.	K. 6. Y.	7 mndr.	Dræpt ved ophetning til 56° i 20 minutter.	Nei.	?	Dræptes, 50 dage.	Ja.	Kontraktur av pe- roneerne.	+
29.	K. p. 72. I.	8 mndr.	Direkte.	Ja.	Intet.	Dræptes, 57 dage.	Ja.	Kontraktur av pe- roneerne.	+

30.	K. p. 67.	6 mndr.	Direkte.	Ja.	Nei.	Døde, 60 dage.	Ja.	Kontraktur av peroneerne.	+
31.	K. 109.	4 mndr.	Direkte.	Nei.	?	Døde, 60 dage.	Nei.	Kontraktur av peroneerne.	+
32.	K. 10.	6 mndr.	Dræpt ved ophetning.	Ja.	?	Dræptes, 63 dage.	Ja.	Kontraktur av peroneerne.	+
33.	K. 7. Y.	7 mndr.	Direkte.	Ja.	Søskende.	Undersøkt in vivo 70 dage efter transpl.	Nei.	Kontraktur av peroneerne.	+
34.	K. p. 65.	6 mndr.	Direkte.	Ja.	Søskende.	Døde, 80 dage.	Ja.	Kontraktur av peroneerne. Atrofi av m. gastrocnemius.	+
35.	K. 156.	7 mndr.	Direkte.	Ja.	Søskende.	Døde, 95 dage.	Nei.	Rykning i m. gastr. ved appl. av elektroderne ovenfor transpl. Sek. rulleavstand. 9 cm., 2 volt.	+
36.	K. 153.	7 mndr.	Direkte.	Ja.	Søskende.	Undersøkt in vivo 105 dage efter transpl.	Nei.	Fri aktiv bevægelighed i fotled og tær.	+
37.	K. 132.	6 mndr.	Direkte.	Ja.	Søskende.	Døde, 136 dage.	Ja.	Kontraktur i peroneerne.	+
38.	K. p. 68.	8 mndr.	Direkte.	Ja.	Nei.	Døde, 163 dage.	Nei.	Fuld aktiv bevægelighed. Normal gang.	+

Løpe- nr.	Kanin nr.	Dyrets alder.	Transplanter- tes direkte? (Levende? Konservert?) Dræbt? Nerveseg- ment.	Fra hvilket dyr blev der trans- planteret?	Vaselin paa suturstec- terne.	Døde dy- ret, eller blev det dræbt?	Hvor længe efter transpl. døde dyret?	Nervefunktion.		Histologisk undersøkelse.
								Decu- bitus.	Spontan bevæge- lighed i ischiadi- cusgebet.	
45.	K. 17.	7 mndr.	Konservert 4 døgn paa is i Ringers væske.	Kat.	Ja.	Dræbt.	12 dage.	Ja.	Ingen.	÷
46.	K. 17.	7 mndr.	Direkte.	Kat.	Ja.	Dræbt.	12 dage.	Ja.	Ingen.	÷
47.	K. 43.	6 mndr.	Direkte.	Marsvin.	Ja.	?	24 dage.	Ja.	Ingen. Kontraktur.	÷
48.	K. 44.	6 mndr.	Direkte.	Marsvin.	Ja.	Dræbt.	30 dage.	Ja.	Kontraktur i pe- ronæerne. Ingen bevægelighed i transplantatet fra arret.	+
49.	K. 124.	6 mndr.	Direkte.	Marsvin.	Ja.	Dræbt.	30 dage.	Ja.	Paralyse.	÷
50.	K. 13.	6 mndr.	Direkte.	Kat.	Ja.	Død.	30 dage.	Ja.	Kontraktur i pe- ronæerne. Atrofi av m. gastr.	÷
51.	K. 11 Y.	6 mndr.	Dræbt ved opfløtning i Ringers væ- ske av 56 ⁰ i 20 min.	Kat.	?	Dræbt.	53 dage.	Ja.	Kontraktur av pe- ronæerne.	+
52.	K. 46.	6 mndr.	Direkte.	Kat.	Ja.	Dræbt.	63 dage.	Ja.	Kontraktur av pe- ronæerne.	+

Nydannede fibriller findes i
transplantatet.

Nydannede fibriller findes i
transplantatet.

Nydannede fibriller passerer 3/4 mm. over
i transplantatet.

Konklusioner:

Der er undersøkt 15 tilfælder av fri *autoplastisk* nervetransplantationer paa kaniner i alderen mellem 4 og 10 maaneder, i tidsrum fra 20 til 163 dage efter transplantationen. I *alle* tilfælder fandtes histologisk regeneration av nervefibriller i transplantatet, indvokset fra den defekte nerves centrale ende. 21 dage efter transplantationen findes nervefibrillerne 12 mm. nede i transplantatet.

49 dage efter transplantationen paavistes rykning i m. gastrocnemius ved elektrisk irritation ovenfor transplantatet.

50, 53, 107 og 120 dage efter transplantationen fandtes aktiv kontraktion i m. gastrocnemius; denne muskel fandtes efter 136 og 163 dage tyk, rød og svulmende.

Disse anatomiske og funktionelle resultater berettiger den antagelse, at der efter dækning av defekter i perifere nerver ved fri autoplastisk nervetransplantation er gode utsigter til regeneration av nerven og restitution av funktionen i dens utbredningsgebet.

Der er undersøkt 29 tilfælder av fri *homoplastisk* nervetransplantation hos kaniner i alderen mellem 4 og 8 maaneder i tidsrum fra 13 til 273 dage efter transplantationen.

I *alle* tilfælder fandtes histologisk regeneration av nervefibriller i transplantatet, indvokset fra den defekte nerves centrale stump. 20 dage efter transplantationen fandtes nervefibriller 15 mm. nede i transplantatet.

105 dage efter transplantationen findes aktiv kontraktion av m. gastrocnemius og rykning i denne muskel ved irritation av nerven ovenfor transplantatet. Hos 7 av 8 kaniner, som undersøktes mellem 136 og 262 dage efter transplantationen, fandtes fri aktiv bevægelighet i nervens utbredningsgebet og rykning i dens muskelgebet ved elektrisk irritation av nerven ovenfor transplantatet.

Disse anatomiske og funktionelle resultater berettiger den antagelse, at der efter dækning av defekter i perifere nerver ved fri homoplastisk nervetransplantation er god utsigt til regeneration av nerven og restitution av funktionen i dens utbredningsgebet.

Der er undersøkt 8 tilfælder av fri *heteroplastisk* nervetransplantation paa kaniner i alderen 6—7 maaneder i tidsrum fra 12 til 63 dage efter transplantationen.

I *alle* tilfælder fandtes transplantatet nekrotisk med rikelig rundcelle-ansamling; i 3 tilfælder var der en ganske betydningsløs regeneration av nervefibriller 1½ mm. ned gjennom transplantatet, i de øvrige 5 tilfælder *ingen* regeneration av nervefibriller.

Disse anatomiske undersøkelser berettiger den antagelse, at der efter dækning av defekter i perifere nerver ved fri heteroplastisk transplantation ikke er nogen utsigt til, at den defekte nerves perifere avsnit kan regenerere gjennom transplantatet. Kommer allikevel funktion i nervens utbredningsgebet, sker det sandsynligvis ved utvoksning av nervefibriller utenpaa, langs med transplantatet, som i sig selv maa antages at danne en hindring for regenerationen.

Resultaterne av de forsøk, der er gjort med auto- og homoplastisk transplantation av nervesegmenter, der har været *konservert paa is i vaselin* og *Ringers væske*, viser, at saadanne transplantater kan regenerere, naar de efter 6 døgns konservering implanteres i en nervedefekt.

De forsøk, der er gjort med transplantation av *drøpte nervesegmenter*, viser, at regenerationen av nervefibriller i transplantatet foregaar utelukkende ved indvoksning fra den defekte nerves centrale stump, og at nervesegmentets egne, levende celler ikke spiller nogen rolle ved denne regeneration; transplantatet er ved sin struktur og ved sine retlinjede, paralelle spalter og interstitier et gunstig medium for utvoksning av de unge nervefibriller, som her finder de bedste (mekaniske) forhold for sin fremtrængen.

Kap. 6. Dækning av defekter i perifere nerver ved andre metoder.

(Plastisk lapdannelse, resektion av ben, anastomose, tubulørsutur, suture à distance).

De funktionelle og anatomiske resultater av de frie auto- og homoplastiske transplantationer av nervesegmenter, som jeg har skildret i forrige avsnit, viser, at denne metode sandsynligvis med held kan anvendes til dækning av nervedefekter, og at den bør prøves paa mennesker.

Problemet er imidlertid vanskelig, og der er til dets løsning foreslaat og anvendt ogsaa andre metoder, hvis værdi, saa vidt det lar sig gjøre, maa undersøkes.

Plastisk lapdannelse.

Denne fremgangsmaate anvendtes første gang av LÉTIÉVANT, i et tilfælde av defekt i n. ulnaris og medianus, og beskrives av ham saaledes: Det øvre nervesegment gjennomstikkes med en kniv 5 mm. ovenfor defekten og spaltes herfra opover 2—3—4 cm., det vil si i en utstrækning, der avhænger av defektens størrelse. Ved længdespaltens øvre ende føres kniven ut paa tvers av nerven, hvorved der avdeles en lap, som vendes nedover, og som saaledes med sin basis hænger fast ved øvre segment, mens den frie ende ved suturer fæstes til nedre nervestump. Hvis den ikke er lang nok, præpareres en lignende lap fra nedre stump, hvorpaa de to lapper forenes ved sutur.

LÉTIÉVANTS tilfælde blev ikke bedret efter operationen.

I 1904 har POWERS samlet 11 saadanne tilfælder fra litteraturen (nemlig foruten LÉTIÉVANTS tilfælde referert av DITTEL, WÖLFLE, TILMANN, GLEIS, BRENNER, BOBROW, GIORDANO, v. BRUNS, LOSSEN). Av disse 11 tilfælder er 5 uten interesse, fordi efterundersøkelse mangler. Av de andre 6 blev 4 bedret eller helbredet, og 2 blev upaavirket av indgrepet.

Disse nervelapper, som efter LÉTIÉVANTS forslag har været anvendt til dækning av nervedefekter, degenererer naturligvis. (Wallersk degeneration.)

De repræsenterer en slags autoplastik med et komplicert nervesaar, hvor regenerationen maa foregaa under saa abnorme og forvredne forhold, at man paa forhaand ikke kan vente sig store resultater. Jeg har ingen personlig erfaring i anvendelsen av denne metode, men efter hvad jeg vet om nerveregeneration, antar jeg ikke, at der er nogen grund til fortsat prøve med den.

Resektion av ben.

En utvei, som altid staar aapen ved behandling av nervedefekter, er at utligne den manglende nervesubstans ved en tilsvarende forkortning av ekstremiteten, idet man resekerer et stykke av diafysen. Dette blev gjort første gang av Löbker i 1884 paa underarmen. Senere er metoden anvendt av TRENDELENBURG, (Riethus) KEEN og KÜTTNER.

Dette er dog en mutilerende operation, som man i det længste vil søke at undgaa. Skyldes nervedefekten en fraktur med paafølgende pseud-artrose, ligger det nær at behandle denne ved at resekere saa meget av benenderne, at direkte nervesutur muliggjøres. Saadan laa forholdene an i Keens ene tilfælde. Og bestemmer man sig for at foreta en saadan forkortelse av ekstremiteten, er det selvsagt, at regenerationen av den lammede nerve ikke kan foregaa med større utsigt til et godt resultat end ved den direkte forening av de 2 ender.

Nerve-anastomose.

Ved nerve-anastomose forstaaes implantation av en lammet nerves perifer stump ind i en frisk nabonerve, hvor den fæstes i et litet skraasnit eller tversnit. Hvis tversnittet gaar helt gjennom den friske nerve, saa hele dens centrale ende forenes med den lammede nerves perifer stump, har man gjort en nervekrydsning. Hensigten med disse operationer er at la den lammede nerve regenerere ved gjennemvoksning av aksecylindre fra den friske.

De første forsøk paa en saadan operation blev gjort av FLOURENS (1824), som krydset de to hovedstammer i plexus brachialis hos en hane med den følge, at der efter en tids lammelse kom koordinerte bevægelser i vingen. RAWA krydset peroneus og tibialis med held paa dyr. LANGLEY, STEFANI og CUNNINGHAM opnaadde resultater av betydelig interesse ved eksperimentelle nervekrydsninger.

MANASSE sydde paa hunde den periferende av den overskaarne n. facialis ind i n. accessorius. I 3 av 5 forsøk reagerte facialisgebetets

muskler paa elektrisk irritation av n. accessorius 4 maaneder efter operationen.

KENNEDY eksperimenterte paa hunde og krydset n. medianus og n. ulnaris med n. radialis; han undgik kontrakturer og opnaadde fuldstændig koordinerte bevægelser av saavel flexor- som extensorgruppens muskler. Irritation av n. radialis ovenfor suturen fremkaldte fleksion, irritation av n. ulnaris og medianus ekstension, og funktion indtraadte like raskt efter denne nervekrydsning som efter simpel gjennemskjæring og sutur.

FLATOU og SAWICKI implanterte paa kaniner og hunde den perifere ende av den gjennemskaarne n. peroneus ind i n. tibialis. Peroneusgruppens muskler atrofierte, men gjenvandt efter nogen tid sin oprindelige konsistens og funktion.

BASIL KILVINGTON, som eksperimenterte paa hunde, har ogsaa her ydet værdifulde bidrag. Han gennemskar n. ischiadicus i poplitæa. Efterat den centrale ende av n. tibialis var forenet med de perifere ender av baade n. tibialis og peroneus, kom der koordinerte bevægelser i samtlige læggens muskler, og det samme resultat opnaaddes, om den centrale ende av n. peroneus forentes med de perifere avsnit av baade n. peroneus og n. tibialis. Ved at tælle aksecylindrene fandt Kilvington et langt større antal perifert for suturen end centralt og slutter derav, at der paa suturetstedet foregaar en multiplikation av aksecylindrene, idet den enkelte aksecylinder ved suturetstedet deler sig og sender en gren til hver av de to nerveavsnit. I det heldigste tilfælde av nervekrydsning fik Kilvington fuldstændig restitution 141 dage efter operationen. Kilvington anbefaler metoden til behandling av poliomyelit-lammelser hos børn (hvor den forøvrig allerede var utført av Peckham (1900) og senere av Hackenbruch (1903) og mange andre).

Anvendelsen av nerve-anastomose til behandling av nervelammelser og nervedefekter er allerede underbygget av betydelige kliniske erfaringer. LÉTIÉVANT er den første, der har anbefalt metoden under betegnelsen »greffe nerveuse«, men fik ikke anledning til at prøve den selv. Operationen utførtes paa mennesker første gang av DESPRES (1876), som implanterte den perifere ende av n. medianus ind mellem n. ulnaris' fibre. Patienten undersøktes 2 maaneder senere, men enderesultatet er ukjendt.

Det næste tilfælde operertes av GUNN og viste ingen bedring efter 3 maaneder.

SICK og SÄNGER berettet om det første heldige utfald av en nerve-anastomose. Den perifere ende av den lammede n. ulnaris forentes med en lap fra den friske n. medianus. 2 aar og 3 maaneder senere var der normal funktion og elektrisk irritabilitet i alle underarmens muskler.

Jeg skal ikke gaa i detalj med omtale av kasuistiken over nerveanastomose, men indskrænke mig til at gjengi resultaterne av de foreliggende samlereferater.

Powers hadde i 1904 samlet 10 tilfælder av perifere lamheter av forskjellig oprindelse i ekstremitets-nerver, der var behandlet med anastomose. I 5 eller 6 av disse 10 tilfælder, det vil si i ca. 50 %, fandt Powers opmun-trende resultater.

Dette tal mener Sherren er altfor lavt. Sherren har i 1906 samlet 25 tilfælder av blivende nervelamheter paa ekstremiteterne (deriblandt et par plexuslamheter), der var blit hehandlet med nerveanastomose. I 13 tilfælder mangler efterundersøkelse, mens 12 er efterundersøkt; og blandt disse 12 er der ifølge Sherren kun 2 tilfælder, som ikke blev gunstig paa-virket av operationen; de andre 10 bedredes mere eller mindre efter ind-grepet.

I de sidste aar er anvendelsen av nerveanastomose blit sterkt anbefalt av SPITZY og STOFFEL til behandling av poliomyelitiske lammelser. Foruten disse kirurger har STEIN og TUBBY hat gode resultater av denne metode, mens MURRAY og DUN kun har oplevet skuffelser.

Mere enslydende er resultaterne av *nervekrydsningens anvendelse ved facialislammelser*. Indikationen for at utføre *nervekrydsning* er tilstede, naar derved en lammet nerve av høi værdi for patienten kan innerveres fra en nabonerve av relativt ringere værdi, saa dennes utbredningsgebet derfor kan ofres til fordel for den vigtigere lammede nabonerves.

Denne indikation er given ved facialislammelser. Hvad enten lamheten skyldes en nekrose i pars petrosa, eller en overskjæring ved radikalopera-tion for kroniske ørelidelser, eller den er av reumatisk oprindelse, har man her intet valg. Er lamheten otogen, forbyder nervens utilgjængelighet i de benede omgivelser ethvert forsøk paa fri transplantation ind i defekten, og ved reumatiske lamheter er der ingen indikation for fri transplantation. Her træder derfor nervekrydsning eller nerveanastomose ind med fuld ret og har feiret smukke triumfer.

DROBNIK synes at ha været den første, der utførte operationen i 1879, men publicerte sit tilfælde mange aar senere. Ballance gjorde nerveanasto-mose for facialisparalyse i 1895, FAURE og FURET i 1898, og Kennedy be-handlet en tic convulsif paa denne maate i 1899.

SHERREN har i 1906 samlet 40 tilfælder av facialisparalyse behandlet med nervekrydsning eller anastomose, 8 nervekrydsninger og 32 nerve-anastomoser. — Blandt de 8 tilfælder i førstnævnte kategori gjordes 2 gange krydsning med n. accessorius, 6 gange med n. hypoglossus. I *alle* de tilfælder, der undersøktes tilstrækkelig længe efter operationen, var der aktiv

bevægelighet i facialisgebetets muskulatur. Blandt de 32 tilfælder av nerveanastomose var 20 facio-akcessoriske. I samtlige tilfælder, som var tilstrækkelig længe iagttat, kom der voluntær bevægelighet.

Nerveanastomose og nervekrydsning er nu saa at si blit den regulære behandling av blivende facialisparalyse. I 1907 hadde Ito og SOYE-SIMO samlet 57 tilfælder, og antallet økes stadig.

Der er saagodtsom enstemmighet om metodens værdi, men der synes endnu ikke at herske fuld enighet om, hvorvidt krydsning eller anastomose er at foretrække, og mens enkelte operatører anvender hypoglossus som »nevrotisør«, vælger andre, og vistnok de fleste, n. accessorius.

Mens nerveanastomose eller nervekrydsning altsaa ved facialislammelser og som regel ved facialisdefekter er den rationelle behandling, rangerer nerveanastomosen ved behandling av defekter i ekstremitetsnervener ikke saa høit, og *nervekrydsning* kan her neppe komme i betragtning. Ti blandt de motoriske nerver paa ekstremiteten er den ene neppe viktigere end den anden, og man vil betænke sig paa at ofre hele n. tibialis for at innervere n. peroneus, eller n. radialis for at innervere n. medianus.

Men *nerveanastomose* er ogsaa paa ekstremiteterne en hensigtssvarende operation ved defekter i perifere nerver. At der fra et tversnit i den friske nerve vokser aksecylindre ut i den anastomoserte, lamme nerve, er en sikker sak, og multiplikationen av aksecylindrene paa suturstedet maa ogsaa ansees fastslaat. Det er derfor meget sandsynlig, at man kan opnaa nevrotisering av en lammet nerve ved at anastomosere den med en frisk nerve eller et friskt nervesnit, der er av adskillig *mindre* kaliber end den lamme nerve. Men den nerve, der skal nevrotisere den lamme, maa selv sagt være av samme kvalitet; d. v. s. til at innervere en motorisk nerve maa vælges en motorisk, til en sensibel en sensibel. Og skal man anastomosere en motorisk nerve til en blandet nerve, maa man av denne, efter Stoffels mønster, utvælge bestemte nervebundter. Dette skal ifølge Stoffel ikke byde paa store vanskeligheter, men det er da ialfald uomgjængelig nødvendig, at man for at anvende denne fremgangsmaate med utsigt til heldig resultat maa kjende nervernes topografiske anatomi ind og ut.

En indskrænkning faar dog metoden allikevel derved, at snittet i den friske nabonerve nødvendigvis følges av en partiel lamhet i denne nerves utbredningsgebet. I de 25 tilfælder av nerveanastomose, som er referert av Sherren, er der kun meget ufuldstændige angivelser av utfaldssymptomerne (lammelserne) efter snittet i den friske nerve. Sherren anfører rigtignok, at man kan avdele $\frac{1}{3}$ eller litt mere av en nerves tversnit, uten at dette resulterer i andet end en forbigaaende parese, men iagttagelserne er paa dette punkt endnu noksaa sparsomme, og fremgangsmaaten synes

mig paa forhaand ikke uten betænkelighet. Selv har jeg ingen erfaring i dette og kan ikke bidrage til spørsmålets belysning.

v. HOFMEISTER har nylig, ved nervedefekter, angit en ny slags nerve-anastomose, som han kalder »Doppelte Nervenpropfung«. Han planterer den defekte nerves centrale ende ind *mellem* fibrene i en frisk nabonerve, og paa samme maate den defekte nerves perifere ende litt længere nede ind i samme friske nabonerve, saaledes at den perifere endes tversnit vender ind mot den centrale endes. Han haaber da, at nervefibrillerne skal vokse ut fra den centrale stump, ind *mellem* den friske nerves fibre, som danner et slags stillas for dem, indtil de ved ankomsten til den perifere stump atter kan vokse ind i denne.

Denne fremgangsmaate kan teoretisk være vel begrundet, og resultaterne av v. Hofmeisters tilfælder maa imøtesees med den største interesse. Skulde de bli vellykkede, er dette en form for nerveanastomose, som fremfor de andre har det store fortrin, at man ved anlæggelsen undgaar tver-snittet i den friske nerve, hvis integritet lades uforstyrret.

Efter hvad vi vet, vokser nervefibrene under regenerationen like meget mellem de Schwannske skeder som inde i dem, og det er meget rimelig, at de ved v. Hofmeisters anastomose finder vei mellem den friske nerves fibre, der anvendes som en bro for dem. Men naar de kommer til det perifere avsnit av den lamme nerve, møtes de av vanskeligheter. Naar de kommer hit, er allerede nogen tid forløpet siden implantationen, og det er at frygte, at der imidlertid paa implantationsstedet er dannet arvæv, som ved skrumpling har tillukket adgangen til den centrale ende av den perifere stump.

Lignende vanskeligheter kan møte nervefibrene, naar de efter at ha gjennomvokset et auto- eller homoplastisk transplantat skal finde vei gjennom det perifere sutursted over i den degenererte (lamme) nerve. Hvis her har dannet sig arvæv, kan dette vanskeliggjøre den komplette regeneration. Men mine forsøk viser, at dette arvæv ved aseptisk operation med nøiagtig hæmostase og adaptation, ved sutur med tynd vaselinert silke og ved anvendelse av vaselin paa suturstederne, ikke er saa betydelig, at det hindrer regenerationen, i ethvert fald ikke naar defekten ikke er længere end 3 cm.

Tubulærsutur og Suture à distance.

Grundlaget for tubulærsuturen blev lagt ved Vanlairs eksperimenter i 1882 og følgende aar, men operationen blev foreslaat av GLUCK allerede i 1880.

VANLAIR resecerte 3 cm. av n. ischiadicus paa en hund (1 aar gl.) og forente de 2 ender ved et dekalcinert benrør (»Neubers rør»). 4 mndr. senere fandt han mellem de 2 nerveender et nydannet segment av 5 cm.'s længde; histologisk undersøkelse viste, at dette var en nerve, og at det perifere avsnit likeledes var nevrotisert; de nye fibre fandtes her *mellem* de gamle Schwannske skeder.

ASSAKY søkte at dække nervedefekter ved katguttraade mellem de 2 ender.

I 1888 har GLUCK og BERNHARDT med godt resultat anvendt denne metode til dækning av en 5 cm. lang defekt av ældre datum i n. radialis, og EHLMANN fik adskillig bedring av funktionen i n. ulnaris efter dækning med katgut av en 5 cm. lang defekt; sidstnævnte forfatter foreslaar ved defekter paa mere end 5 cm. at anvende silketraad eller kautschukrør.

KÖLLIKER anser dog Assakys katguttraade som det bedste og støtter dette paa den fuldstændige helbredelse, han opnaadde i et tilfælde av ulnarisdefekt, behandlet med nerverlap og katguttraade.

Ifølge STEINTHAL er den første rene tubulærsutur paa mennesker utført av SOCIN — med negativt resultat. Steintal gjengir efter Oberndörffers samlereferat resultaterne av de mellem 1896 og 1907 med tubulærsutur og suture à distance behandlede tilfælder. Det er i alt 9 tilfælder; blandt disse var resultatet i 1 tilfælde ukjent, i 4 tilfælder slet, i 3 maatelig og i et tilfælde godt.

Steintal har selv i 1914 anvendt tubulærsutur (gummirør) ved en ulnarisdefekt paa 1 cm. Da røret uttoges 4½ mnd. senere, var nerve-defektens længde uforandret, og Steintal fraraader forsøk med baade tubulærsutur alene og i forbindelse med katguttraade.

De andre tilfælder av tubulærsutur og suture à distance, som jeg har fundet i litteraturen, skal kort refereres.

V. AUFFENBERG: Tubulærsutur paa n. ulnaris, katgut- og silketraad-slynge paa medianus. Resultat: bedring i medianusgebetet, uforandret tilstand i ulnarisgebetet.

HALM: Resektion av et fibrom i n. ulnaris. En defekt paa 1½ cm. dækkedes ved katgutslynge-sutur, med fuldstændig tilbakevendende funktion.

POMERANOW: En defekt, 4 cm. lang, i n. radialis dækkedes ved implantation av patientens v. basilica; desuten blev nerveenderne forbundet ved 4 silketraade inde i venen. Der angives begyndende funktion i nervens utbredningsgebet fra 6te maaned efter operationen.

TAYLOR: Hos et 1 aar gammelt barn med en fødselslamhet fandtes plexus brachialis adhærent til den dype halsfascie. Der resecertes 2 cm.;

defekten dækkedes med kromkatguttraade. Begyndende bedring 8 maaneder senere. Godt resultat efter 28 maaneder.

WREDE behandlet en 4,5 cm. lang defekt i n. medianus, hvis ender blev forbundet ved 4 silketraade, og disse dækkedes ved et stykke av v. safena. 2 aar senere var der »delvis restitution«.

Paa den ortopædiske kongres i Berlin februar 1916 foreslog EDINGER en modificert tubulærsutur til dækning av nervedefekter.

Idet han gaar ut fra de sidste aars undersøkelser over dyrkning av nervefibre i plasma utenfor organismen, antar Edinger, at det ved anvendelsen av tubulærsutur er nødvendig at fylde røret med et medium, der yder en viss motstand mot de unge, utvoksende nervefibre, og foreslaar til dette øiemed implantation av *formalinhærdede kalvearterier fyldt med agar*.

Resultatet av Edingers dyreeksperimenter forelaa ikke paa kongressen, men der fremvist en del saarede soldater, hvis nervedefekter, efter Edingers forslag, av andre kirurger var behandlet paa ovennævnte maate. En del av disse soldater paastodes bedret efter operationen, men iagttagelsestiden var kort, og der fremkom paa kongressen advarsler mot at slutte for meget av det lille materiale, der væsentlig omfattet ulnaris- og medianus-læsioner.

Jeg har for 3 aar siden (i 1913) prøvet en lignende fremgangsmaate. Da disse forsøk kun gav negative resultater, har jeg tidligere ikke publicert dem, men de fortjener at nævnes nu, efterat Edinger har foreslaat denne form for tubulærsutur. Jeg tror nemlig, at Edingers metode kun vil bringe skuffelse, og at den ikke bør anvendes til fortrængsel for andre og bedre metoder.

I 5 tilfælder resecerte jeg hos kaniner et par cm. av n. ischiadicus. Paa forhaand var der fra dyrets karotis uttømt litt blod, som centrifugertes paa is i parafinerte tuber. Det plasma, som jeg saaledes skaffet mig, fyldtes i et stykke av aorta fra en anden kanin. Aortasegmentet var $\frac{1}{2}$ cm. længere end nervedefekten. Naar plasmaet efter faa minutter var begyndt at koagulere, implantertes aortasegmentet i nervedefekten, idet et par suturer fikserte karret til øvre og nedre nervestump.

De 5 segmenter uttoges og undersøktes histologisk efter sølvimpregnation paa regenerationsfænomener 4, 24 og 41 dage efter implantationen. I et tilfælde fandtes en ganske sparsom utvoksning av nervefibre fra den centrale nervestump ut i plasmaet, hvor de dannet et forvirret netverk uten nogen bestemt orientering. I de andre 4 tilfælder fandtes en del regenerationsfænomener fra den centrale stump, men nervefibrene rak i disse tilfælder kun saavidt over i plasmaet.

Disse forsøk har vist, at *denne* form for tubulærsutur ikke kan føre til noget resultat. Og da er der ingen grund til at haabe, at Edingers agartuber kan det.

Jeg har tidligere vist, at plasma er det bedste medium, vi besidder til dyrkning av pattedyrvæv utenfor organismen, og at det er det *eneste* medium, der tillater proliferaion av voksne pattedyrs væv. Og ved mine kulturforsøk har jeg ikke i et eneste tilfælde faat vekst av nervefibre i agarkulturer, kun i plasma. I blandinger av agar og serum fik jeg vekst av visse embryonale væv, saaledes av embryonal kyllinglever og kyllinghud, som endog vokste ret livlig i disse kulturer, hvor de vel at merke ikke vokste ind i agårklumpen, men spredtes som en tynd, sammenhengende epitelmembran i det kapillære væskelag mellem agårklumpen og glasplaten.

Jeg anser det, paa grundlag av disse forsøk, meget litet sandsynlig, at der i Edingers agartuber kommer nogensomhelst regeneration av nervefibre.

Forutsætningen for Edingers anvendelse av agarfylde tuber var som nævnt, at nervefibrene under sin vekst maa bydes en viss motstand at overvinde. Dette tror jeg ikke er noget væsentlig moment for regeneration av nervefibre i en defekt. Blandt betingelserne for en vellykket regeneration av en nervedefekt kommer aksecylindrenes egen proliferationsenergi selvfølgelig i første række. Og i anden række, at de voksende aksecylindre finder vei til sit bestemmelsessted: nemlig det perifere avsnit av den defekte nerve. Heri kan motstandsforhold spille en stor rolle, navnlig for at hindre utvoksningen, men neppe for at paaskynde eller lette den.

Vi vet fra Harrisons forsøk, at nervefibrene er utstyrt med positiv stereotropisme, og efter min opfatning er dette et centralt punkt i nerve-regenerationsprocesserne. Jeg haaber ved mine eksperimenter at ha vist, at det væsentlige moment i regeneration av en nervedekt ikke er paavirkning av de utvoksende nervefibre ved kemiske stoffe fra de Schwannske celler i den perifere stump, hvorved nervefibrene — utstyrt med en hypotetisk positiv nevrotropisme — skulde lokkes ind mot den perifere stumps hilus. Og heller ikke er der grund til at opstille hypotetiske motstande som en nødvendig betingelse for en vellykket regeneration av en nervedekt. Det væsentlige moment er efter min opfatning de rent mekaniske rumforhold, bestemt ved den anatomiske struktur i det medium, fibrene gives at vokse i. Det gjælder, at nervefibrene mekanisk ledes den rigtige vei under sin vekst.

Her vil jeg minde om mine forsøk med dyrkning av nervefibre i plasma. Plasma er et udmerket næringssubstrat for nervefibre, som her i løpet av faa dage naar en længde av op til 1 mm., og der er al grund til at anta, at fibrinnettet herunder spiller en rolle som skelet for de voksende nervefibre. Men som det fremgaar av illustrationerne, vokser nervefibrene i plasma ganske vildt uten orientering i nogen bestemt retning, og det er klart, at disse fibre i plasma aldrig vil kunne danne nogen nervebunt, der kunde bygge bro over en defekt. Forat dette skal ske, maa nervefibrene under sin vekst ledes den korteste vei, d. v. s. i rette parallele linjer, gjennom ganske smale interstitier, avpasset efter nervefibrenes størrelse, og det mønster, naturen her har git os til efterligning, er den degenererte, perifere nervestump. Noget bedre gives ikke. Mellem de spalterum, som i det perifere avsnit av den defekte nerve, eller i det auto- og homoplastiske transplantat, er disponert for de utvoksende aksecylindre, og de kunstige interstitier og rør, som bydes dem ved tubulærsutur med tomme eller agarfylde arterier og vener og kautschukrør eller katguttraade, er der i struktur og størrelse et saa iøinefaldende misforhold, at der allerede paa forhaand kunde være tvil om muligheten av at erstatte en degenerert nerves hundreder av mikroskopiske interstitier og tuber med et gummidrænrør eller en bundt katguttraade.

Var resultatene av mine forsøk med tubulærsutur litet opmuntrende, kunde heller ikke de eksperimenter, jeg gjorde med suture à distance, avsvække tvilen om denne metodes anvendelighet til dækning av en nerve-defekt.

I alt gjorde jeg 5 forsøk med suture à distance over en defekt paa 2—3 cm. (Se forsøksprotokollen. Lp.-nr. 9, 10, 34, 35 og 36.)

Hos K. p. 69 (lp.-nr. 9) gjordes paa venstre ben en autoplastik, paa høire ben dækkedes en like stor (2 cm. lang) defekt ved en katguttraadslynge. Efter 44 dage var der decubitussaar paa h. hæl, intet decubitussaar paa v. hæl. Og da kaninen efter 54 dage døde, fandtes venstre m. gastrocnemius tyk og kraftig, høire atrofisk. Perifert for autoplastiken fandtes histologisk i v. n. ischiadicus nydannede nervefibre, mens ingen nervefibre hadde fundet vei over defekten langs katguttraadene.

Hos K. 71 fandtes 49 dage efter utført silketraadslyngesutur over en 2½ cm. lang defekt ingen rykning i m. gastrocnemius, mens der paa det andet ben, hvor der var gjort autoplastisk transplantation, kom rykning i m. gastrocnemius ved anvendelse av akkumulator 2 volt og sek.rulleavstand 6,5 cm.

Hos K. p. 65 og K. p. 156 fandtes ved autopsi 80 og 90 dage efter utført katgutslyngesutur over en defekt paa 3 og 2,5 cm. ingen rester av

katguttraaden tilbage og ingen makroskopisk nervøs eller bindevævsagtig forbindelse mellem de to nerveender.

Hos K. 153 fandtes ved elektrisk undersøkelse 105 dage efter utført katgutslyngesutur over en defekt paa 3 cm. ingen rykning i m. gastrocnemius. Katguttraaden var væk, og der saaes ingen makroskopisk nervøs forbindelse mellem de to nerveender. Paa det andet ben, hvor en likestor (3 cm. lang) defekt var dækket ved homoplastisk transplantation, var der god rykning ved elektrisk irritation saavel *paa*, som *ovenfor* og *nedenfor* transplantatet.

Resultaterne av disse forsøk med suture à distance er altsaa absolut negative.

Kap. 7. Slutning.

Den diskussion om nerveregenerationsprocesserne, som Bethes angrep paa den monogenistiske teori vakte i 1903 og følgende aar, er efterhaanden stilnet av, og utvoksningslæren var i 1907—10 igjen saagodtsom almindelig anerkjendt, idet Cajals og Perroncitos histologiske arbeider hadde git den et solid grundlag.

Ziegler, som i sin tid tilhørte dens motstandere, anførte i 1896 mot utvoksningslæren bl. a. følgende: »Thatsächlich haben weder Ranvier noch Vanlair das *Auswachsen* des Achsencylinders an mikroskopischen Bildern nachweisen können«, og før dette blev demonstrert, kunde man efter Zieglers opfatning ikke akseptere denne teori.

Det bevis, som Ziegler forlangte, og som dengang ikke kunde leveres, har den eksperimentelle metode, som indførtes av BRAUS, HARRISON og NAGEOTTE, kunnet gi. Nageottes transplantationer av spinalganglier og Harrisons forsøk med dyrkning av froskens nervesystem betegner derfor en ny epoke i denne forskning, og spørsmålet om nerveregenerationen maa nu ansees som løst i sine hovedtræk.

Burrows, Lewis og Lewis og Marinesco og Minea fandt ved dyrkningsforsøk utvoksning av nervefibre i plasma. I mine egne eksperimenter har jeg efter nerveoverskjæringer in vivo fra aksecylindrene i den centrale stump fundet de samme histologiske utvoksningsfænomener, som er paavist av Cajal og Perroncito. Og ved mine kulturforsøk har jeg paavist en overensstemmelse mellem disse histologiske regenerationsfænomener og regenerationsfænomenerne fra spinalganglier in vitro, der tillater den slutning, at de representerer identiske processer. Dermed er man naadd frem til det bevis, som Ziegler forlangte for at kunne akseptere utvoksningslæren.

Mine forsøk med dyrkning av nervefibre in vitro gav mig, ved siden av overskjæringsforsøkene paa levende dyr, grundlaget for min udelte tilslutning til utvoksningslæren. Paa et saadant grundlag begyndte jeg mine transplantationsforsøk. Forkjæmpere for læren om den autogene regenera-

tion av perifere nerver vil sandsynligvis føle liten opfordring til at gjøre transplantationsforsøk, som efter alt, hvad vi vet om transplantation, vilde være frugtesløse, hvis det var rigtig dette, at regeneration av aksecylindren i den perifere nerve foregaar paa stedet i og av den degenererte nerve. Ti naar vi fra det sidste decenniums arbeider inden transplantationskirurgien vet, at benvæv, transplantert fra et individ til et andet av samme art, som regel avdør og kun rent undtagelsesvis overlever hos den nye vert, skulde man paa forhaand tro, at det litet vilde nytte at transplantere det langt høiere organiserte og mindre robuste nervevæv, og at et transplantert segment i ethvert fald ikke kunde indskytes i en nervedefekt og her bidra til retablering av funktionen ved autokton regeneration av aksecylindere.

Studiet av de arbeider, der tidligere var gjort over nervetransplantation, gav en følelse av uvisshet om betydningen og rækkevidden av denne operation, da resultaterne ofte var smaa, undertiden uklare, og alt i alt indbyrdes litet overensstemmende; dette gjaldt like meget de forskjellige forfatteres anskuelser om transplantatets skjæbne som om dets betydning for regeneration og funktion.

Resultaterne av Ranviers forsøk fra 1878 gik i den retning, at auto- og homoplastiske transplantater har chancer for at overleve transplantationen, idet de gjennomgaar den Wallerske degeneration, mens heteroplastiske transplantationer nekrotiserer. I motsætning hertil fandt senere Huber, Verga og Macabruni en Wallersk degeneration i heteroplastiske transplantater, og kun Merzbachers resultater stemmer overens med Ranviers.

Mine undersøkelser over transplantatets skjæbne bekrefter Ranviers og Merzbachers fund. I de auto- og homoplastiske transplantater paaviste jeg en Wallersk degeneration, der skrider frem paa samme maate, men *noget langsommere* end i det perifere avsnit av en overskaaret nerve; jeg fandt proliferation av de Schwannske kjerner og indvandring av fagocytter. Efter 20 dage var de Schwannske kjerner i de homoplastiske transplantater bleke og degenererte, og antallet av indvandrede celler var meget stort, — større end i autoplastiske transplantater og større end i det perifere avsnit av en overskaaret nerve. De heteroplastiske transplantater fandtes derimot nekrotiske med svære rundcelleansamlinger.

Disse resultater forklarer paa den ene side, hvorfor dækning av nervedefekter med heteroplastisk materiale mislykkes, og de viser paa den anden side, at der mellem auto- og homoplastiske transplantater, der begge gjennomgaar den Wallerske degeneration, dog er den forskjell, at homoplastikerne blir rikeligere rundcelleinfiltrert, og at autoplastikerne derfor bør foretrekkes til dækning av en nervedefekt.

Den rolle, transplantatet her spiller under regenerationen, har ogsaa været opfattet paa forskjellig maate. Gluck antar, at transplantationen hindrer en del av nervefibrene i det perifere avsnit i at degenerere, og at den derved paaskynder retablering av funktionen. Men Gluck anfører intet til bevis for denne antagelse, og vi vet nu, at den ikke holder stik.

BALLANCE og STEWART fandt, at transplantatet degenererer og dør, og at det passivt gjennomvokses av Schwannske celler fra den centrale stump, hvorefter — i overensstemmelse med disse forskeres polygenistiske standpunkt — aksecylindre utdifferentieres fra det Schwannske protoplasma.

Forssmans indgaaende undersøkelser over orienteringsmekanismen under nerve regeneration resulterte i hans hypotese om neurotropisme, der er akseptert av Cajal. Forssmans eksperimenter viste, at et overveiende antal av de fra den centrale stump utvoksende nervefibriller trængte ind i et transplantert nervesegments hilus, selv om dette var dislocert fra den centrale stump, saa nervefibrene for at naa derhen maatte gjøre en bøining paa 90° — 180° , og Forssman forklarer dette ved kemo-taktiske paavirkninger fra transplantatet.

Efter Forssmans smukke eksperimenter er det umulig at benegte eksistensen av en saadan indflydelse, som ifølge Cajal skal utgaa fra de Schwannske celler i den degenererte perifere stump; disse celler, der av monogenisterne var prisgit dyp obskuritet, er derved paa en maate blit rehabilitert.

Men det maa ikke glemmes, at disse kemotaktiske paavirkninger er hypotetiske. Og jeg er ikke sikker paa, at nervefibrener orientering under regeneration ikke like godt lar sig forklare uten den hypotetiske neurotropisme.

Ranvier og Vanlair har hævdet det *mekaniske princip*s fundamentale betydning for de utvoksende nervefibres orientering, og Vanlair har iredt lagt en del materiale til bevis for denne »Ranviers lov«. Stroebe og v. Büngner slutter sig til Vanlairs opfatning, og mine undersøkelser bringer mig til at indta samme standpunkt.

Mine grunde herfor er følgende:

Vi vet, at de fra den centrale stump kommende nervefibre under sin indvoksning i det perifere avsnit eller ind i et transplantert nervesegment ikke foretrækker de Schwannske protoplasmabaand fremfor rummene mellem disse, men endog i stor utstrækning vokser *mellem* de Schwannske skeder.

Jeg fandt, at de utvoksende aksecylindre med samme impetus styrter sig ind i et homoplastisk transplantat, hvis celler var dræpt ved ophetning, som ind i et overlevende transplantat, og at der histologisk ikke er nogen

forskjel mellem regenerationsfænomenerne i det levende og det dræpte transplantat.

Ved kulturforsøkene er det paavist, at nervefibre med betydelig energi vokser ut i plasma, hvor der ikke forekommer Schwannske celler, og hverken i Harrisons eller i Burrows eksperimenter lot disse fibre sig paaviselig kemotaktisk paavirke av tilstedeværende cellulære elementer.

Som en viktig faktor under utvoksningen anser jeg nervefibrener positive stereotropisme. Den positive stereotropisme d. v. s. nervefibrener følsomhet for substratets aggregattilstand, der gir sig uttrykk i deres tilbøielighet til under sin vekst at smyge sig langs faste eller relativt faste legemers overflate, opdagedes av Harrison ved dyrkning av nervefibre i medier, hvori var utspændt spindelvæv. Ved dyrkning av embryonale nervefibre i saltopløsning fandt Lewis og Lewis det samme; i deres kulturer krøp nervefibrener ved amøboide bevægelser langs glassets overflate. Den positive stereotropisme, som nervefibre deler med andet voksende dyrisk protoplasma (paavist av Carrel og Burrows for *bindevævscellers vedkommende*), maa derfor ansees som sikkert konstatert.

I lyset av disse kjendsgjæringer er det mulig at forstaa nervefibrener orientering under regeneration, og at forklare den ut fra mekaniske forhold, og jeg antar, at ogsaa resultaterne av Forssmans eksperimenter lar sig forklare paa denne maate. — Forssmans eksperimenter viste som bekjendt, at et overveiende antal av de fra den centrale ende av en overskaaret nerve utvoksende nervefibre trængte ind i et transplantert nervesegment, der var anbragt med sin hilus litt centralt for den centrale stump og parallelt denne, saa nervefibrener for at trængte ind i transplantatet maatte gjøre en boining paa op til 180° .

Nu vet vi, at der altid sker en desorientering av en del av de fra den centrale stump utvoksende, og særlig av de kortikale, nervefibre, hvorav en del endog vender tilbake i retrograd retning parallelt den centrale stump. Og et nervesegment, som er transplantert hit, kan let gjennomtrænges av disse fibre ogsaa uten kemotaktisk paavirkning. I Forssmans eksperimenter var dog antallet av de i transplantatet indvokste fibre saa stort, at der maatte være kommet til en anden faktor. Dette var sandsynligvis det fra transplantatet i retning av den centrale stumps hilus utvokste Schwannske syncytium. Ved mine forsøk med kultur av perifere nerver i plasma har jeg fundet rikelig vekst av Schwannsk protoplasma. En saadan utvoksning fra transplanterte nervesegmenter er ikke paavist i organismen; men de Schwannske cellers multiplikation inde i auto- og homoplastiske transplantater er sikkert konstatert, og det er da overmaade sandsynlig, at det ogsaa vokser ut i omgivelserne fra enden av de overskaarne nervefibre. Jeg

antar, at en saadan buket av Schwannsk protoplasma vokser ut fra enden av det transplanterte segment ind mot de fra den centrale stumps hilus kommende nervefibre, som saa at si indfanges av det Schwannske syncytium, idet nervefibrene i dettes interstitier finder de bedste fysikalske forhold for sin videre vekst, der mekanisk dirigeres ind mot transplantatet.

Dette spiller efter min opfatning en ganske passiv rolle under regenerationen. Dets betydning ligger deri, at det danner et stillas med gunstige vilkaar for aksecylindrenes vekst, som i den degenererte nerve efter den Wallerske degeneration og dannelsen av de Büngnerske cellebaand finder de bedste strukturforhold og — muligens — ernæringsforhold. Da der i baade auto- og homoplastiske transplantater indtræder en Wallersk degeneration, og da der i begge dannes Büngnerske baand, bydes der ogsaa i disse transplantater de unge utvoksende aksecylindre et godt substrat, hvad de derimot ikke finder i de *heteroplastiske* transplantater, hvori Wallersk degeneration ikke forekommer.

Mine resultater stemmer her i det væsentlige overens med Forssmans, som dog tyder sine fund paa en noget anden maate, idet han antar, at den uteblevne regeneration i heteroplastiske transplantater skyldes manglende positiv neurotropisme. I Forssmans eksperimenter er der dog nogen forskjel mellem de forskjellige heteroplastiske transplantater indbyrdes, idet kaninens nervefibriller i nogen grad formaar at vokse ind i et nervesegment fra en due, men ikke i et fra frosk eller marsvin transplanteret stykke. Forssman antar, at der fra marsvin- og froskesegmenter utskilles en substans, som hindrer saavel granulationsvæv som nervefibre i at vokse ind.

En bekræftelse av dette tror jeg findes i mine forsøk med transplantation av *dræpte* heteroplastiske segmenter. Heller ikke i dræpte heteroplastiske segmenter fandt jeg nogen regeneration av nervefibre, men vel en rikelig indtrængen av fagocyter. Grunden til den uteblevne regeneration kan ikke ligge i strukturforhold, ti i dræpte homoplastiske segmenter er der rikelig regeneration. Den kan heller ikke tilskrives mangel paa positivt kemotaktisk indvirkning i almindelig forstand, ti transplantatet var rikelig rundcelleinfiltrert. Det er da rimelig at anta, at de heteroplastiske transplantater paa forhaand i biokemisk henseende er differente for de utvoksende aksecylindre, saa disse enten ikke kan trænge ind i dem, eller opløses efter at være trængt ind i dem; da disse biokemiske forskjelligheter kommer tilsyne saavel i de overlevende som i de dræpte heteroplastiske transplantater, er det sandsynlig, at de forekommer pr formert i nerven og ikke skyldes en aktiv virksomhet i transplantatets celler. Men man maa ogsaa erindre den mulighed, at de talrike indvandrede celler, som fandtes i alle mine heteroplastiske transplantater, kan spille en rolle i disses

immunitet mot de utvoksende nervefibriller. Forssmans resultater taler dog paa den anden side ikke til gunst herfor, ti Forssman fandt ved sine eksperimenter ingen indtrængen av leukocyter i de heteroplastiske transplantater.

Dette interessante spørsmaal kræver videre undersøkelse.

Ved min undersøkelse av de i litteraturen refererte kliniske resultater av nervetransplantationer fandt jeg, som det vil erindres, 1 autoplastisk, 3 homoplastiske og 10 heteroplastiske nervetransplantationer med efterundersøkelse, der viste 1 godt resultat i hver kategori, d. v. s. 100 % vellykkede autoplastiker, 33 % vellykkede homoplastiker og 10 % vellykkede heteroplastiker. — Det vil vistnok indrømmes, at disse tal er altfor smaa til, at man derav tør bedømme nervetransplantationens terapeutiske værdi.

Ved mine auto- og homoplastiske nervetransplantationer paa kaniner haaber jeg at ha vist, at denne metode kan anvendes til dækning av en nervedefekt. I *alle* mine undersøkte auto- og homoplastiker fandtes fra 13de dag efter transplantationen histologisk en begyndende regeneration i transplantatet, og 3—4 maaneder efter transplantationen kom der funktion i nervens utbredningsgebet.

Som før nævnt bør den autoplastiske transplantation gives fortrinnet fremfor den homoplastiske, og det spørges da, om dette lar sig gjennomføre paa mennesker.

DEAN, som utførte den første — og hittil eneste — vellykkede autoplastik paa mennesker, dækket en 3 tommer lang defekt i n. radialis efter et overarmsbrud ved implantation av et stykke fra den overfladiske (sensible) radialisgrens perifere avsnit, med den følge, at patienten 5 aar senere hadde fuld motorisk funktion i alle av n. radialis innerverte muskler. Kilvington har foreslaat at anvende stykker av den sensible og derfor relativt overflødige n. saphenus fra patientens laar til dækning av defekter i andre viktigere nerver.

Jeg skulde tro, det vilde være endnu hensigtsmessigere at anvende patientens *interkostalnerver* i dette øiemed. Patienten vil sandsynligvis ikke engang merke det, om 2 eller 3 interkostalnerver sættes ut av funktion, og hver enkelt av dem er i ethvert fald mindre viktig end nogen ekstremitetsnerve. Interkostalnerverne har desuten den fordel, at de er noksaa tykke. Ved dækning av defekter i de store ekstremitetsnerver bør man tilstræbe at gi det transplanterte stykke nogenlunde samme tykkelse som nervestammen paa begge sider av defekten. Dette kan opnaaes ved at lægge flere nervesegmenter paralelt ved siden av hinanden; jo tyndere disse er, desto flere maa der da til, men av patientens egne interkostalnerver tror jeg man som regel kan skaffe sig nok materiale. Skulde dette

mot formodning ikke la sig gjøre, staar den utvei aapen at gjøre homoplastisk transplantation. Hertil kan anvendes interkostalnerver fra andre individer, eller nerver fra amputerte ekstremiteter eller fra friske lik. Jeg har ved mine forsøk vist, at disse taaler en konservering paa is i vaselin eller Ringers væske paa op til 6 dage.

Efter mine dyreforsøk er jeg ikke i tvil om, at den auto- og homoplastiske nervetransplantation langt sikrere end tubulærsutur og suture à distance beforder regeneration i en nervedefekt. I *nerveanastomosen* har transplantationen derimot en konkurrent, og hvilken av disse bør gives fortrinnet, tør man vel endnu ikke avgjøre. Det kan først ske, efterat nervetransplantationen har været tilstrækkelig prøvet i den kliniske kirurgi. Man maa da yderligere søke at forbedre metoderne og fastslaa indikationerne, og der er mange interessante spørsmåal i nervetransplantationernes fysiologi, som venter paa sin løsning i kliniken, hvor denne metode fortjener at optages.

Hvis jeg har kunnet bidra hertil, har dette arbeide ikke været forgjæves.

Litteratur.

- ALBERT: Wiener med. Presse. 1885, nr. 39. Ref. efter Sherren.
- ASSAKY, G.: De la suture des nerfs à distance. — Archives gén. de méd. 1886, pag. 529.
- ATKINSON, E.: Remarks on nervegrafting. — Brit. med. Journal. 1890, vol. 2, pag. 624.
- V. AUFFENBERG: Ueber Nervennaht u. Nervenlösung. — Archiv für klin. Chir. Bd. 82, pag. 622.
- BALLANCE and STEWART: Healing of nerves. — London 1901.
- and STEWART: Le processus de réunion des nerfs. Travaux de neurologie chirurgicale et orthopédique. 1902, pag. 145.
- BETHE, A.: Allgemeine Anatomie u. Physiologie des Nervensystemes. Leipzig 1903.
- Neue Versuche über die Regeneration der Nervenfasern. — Archiv für die gesammte Physiologie. Bd. 116. 1907, pag. 385.
- BOWLBY: Injuries of nerves. — The Lancet. 1902, vol. 2, pag. 197.
- BRADLEY: Nerve grafting for injury. — The Lancet. 1896, vol. 1, pag. 1592.
- BRAUS: Münch. med. Wochenschrift. 1911, pag. 2237.
- BROWN-SEQUARD: Compt. rend. de la Soc. Biol. 1849, vol. 1, pag. 136.
- BRUCH, C.: Ueber die Regeneration durchschnittener Nerven. — Zeitschr. für wiss. Zoologie. Bd. 6. 1855, pag. 135. Cit. efter Cajal.
- V. BÜNGNER, O.: Ueber die Degenerations- und Regenerationsvorgänge an Nerven nach Verletzungen. — Beitr. zur Patholog. Anatomie u. Allg. Pathologie. Bd. 10. 1891, pag. 321.
- BURROWS, M. T.: The cultivation of tissues of the chick embryo outside of the body. — Journ. of Exp. Zool. Vol. 10. 1911, pag. 63.
- CAJAL, RAMON Y.: Studien über Nervenregeneration, Leipzig 1908.
- À quelle époque apparaissent les expansions des cellules nerveuses de la moelle épinière des poulets. Anat. Anzeiger. 1890. Bd. 5. Cit. efter R. Harrison.
- La rétine des Vertébrés. La Cellule. Tome 9. 1892. Cit. efter Harrison.
- Nervesystemets struktur hos mennesket og hvirveldyr. — Madrid 1899. Bd. 1. Cit. efter R. Harrison.
- CARREL, A.: Latent life of Arteries. — Journ. of Exp. med. Vol. 12. 1910, pag. 460.
- Results of double nephrectomy and the replantation of one kidney. Journ. of Exp. med. 1911. Vol. 14, pag. 124.
- Technique for the cultivation of a large quantity of tissue. Journ. of Exp. med. 1912. Vol. 15, pag. 393.
- On the permanent life of tissues outside of the organism. — Journ. of Exp. med. 1912. Vol. 15, pag. 516, og La Presse médicale, 20. septbr. 1913.

- CARREL, A.: Artificial activation of the growth in vitro of connective tissue. — Journ. of Exp. med. 1913. Vol. 17, pag. 14.
- CARREL and BURROWS: Cultivation of sarcoma outside the body. — Journ. of Am. med. Ass. Vol. 55. 1910, pag. 1554.
- and BURROWS: Cultivation of adult tissues and organs outside the body. — Journ. of Am. med. Ass. Vol. 55. 1910, pag. 1376.
- and BURROWS: Cultivation of tissues in vitro and its technique. — Journ. of Exp. med. Vol. 13. 1911, pag. 387.
- and BURROWS: The effects of the dilution of the medium on the growth of the spleen. — Journ. of Exp. med. Vol. 13. 1911, pag. 562.
- and BURROWS: Cultivation in vitro of malignant tumors. — Journ. of Exp. med. Vol. 13. 1911, pag. 572.
- and BURROWS: Cultivation in vitro of the thyroid gland. — Journ. of Exp. med. Vol. 13. 1911, pag. 416.
- and BURROWS: An addition to the technique of the cultivation of tissues in vitro. — Journ. of Exp. med. Vol. 14. 1911, pag. 244.
- CARREL and INGEBRIGTSEN: The production of antibodies by tissues living outside of the organism. — Journ. of Exp. med. Vol. 15. 1912, pag. 287.
- CHAMPY: Compt. rend. de la Soc. de Biol. Vol. 25. 1913, pag. 532, et vol. 26. 1914, pag. 31.
- CHIPAULT: État actuel de la chirurgie nerveuse. —
- CUNNINGHAM: American Journal of Physiology. 1898, vol. 1. Cit. efter Sherren.
- DELEZENNE: Recherches sur la coagulation du sang chez les oiseaux. Archives de phys. norm. et pathol. 1897. 5 series, t. 9, pag. 333.
- DENK: Ueber Schussverletzungen der Nerven. (Balkankrieg). — Beitr. zur Klin. Chir. Bd. 91, 1—2. 1914, pag. 217.
- DESPRÉS: Gazette Hebdomadaire de Méd. — Paris 1876, pag. 67.
- DROBNIK: Cit. efter Chipault: État actuel de la Chir. nerveuse. Tome 2, pag. 189.
- DUN: Brit. med. Journ. 1911, vol. 2, pag. 1536.
- DUROUX: Greffes nerveuses expérimentales. — Lyon chirurgical. 1911. Tome 6, pag. 537.
- Résultats cliniques des greffes nerveuses. — Lyon chirurgical. 1912, tome 8, pag. 562.
- EBELING, A.: The permanent life of connective tissue outside of the organism. Journ. of Exp. med. 1913. Vol. 17, pag. 273.
- EBERTH und SCHIMMELBUSCH: Die Trombose nach Versuchen und Leichenbefunden. 1888.
- EDINGER: Verhandl. der Deutschen Orthopädischen Gesellschaft Berlin, februar 1916.
- EHRMANN: Contribution à l'étude de la suture des nerfs à distance. — Gazette Hebdomadaire de méd. 1897, nr. 11. — Ref. Centralblatt für Chir. 1897, pag. 254.
- FALKENHEIM: Zur Lehre von der Nerven-naht u. der Prima Intentio Nervorum. Deutsche Zeitschrift f. Chir. Bd. 16, pag. 31, 1882.
- FAURE et FURET: Sur le traitement chir. de la paralysie faciale etc. L'anastomosie de faciale et de la branche trapézienne du spinal. Gazette hebdomadaire de Méd. et de Chir. 1898, februar.
- FLATAU u. SAWICKI: Zur experimentellen Nerven-chirurgie. — Centralblatt f. allg. Pathologie u. patholog. Anatomie. 1901, nr. 6.
- FLEIG: Survie et réviviscence des spermatozoïdes en quelques milieux artificiels. — Compt. rend. de la Soc. de Biol. Tome 67, nr. 26, pag. 162.
- FLOURENS: Annales de sciences nat. — Paris, 1828, pag. 113, ref. efter Sherren.

- FOERSTER: Verhandl. der deutschen orthopädischen Gesellschaft. Berlin, Februar 1916.
- FORAMITTI: Zur Technik der Nervennaht. — Archiv f. klin. Chir. 1904. Bd. 73. H. 3.
- FORSSMAN, J.: Ueber die Ursachen, welche die Wachstumsrichtung der peripheren Nervenfasern bei der Regeneration bestimmen. — Beiträge zur Pathol. Anatomie u. allg. Pathologie. 1898. Bd. 24, pag. 56.
- Zur Kenntniss des Neurotropismus. — Beiträge zur Pathol. Anat. u. allg. Pathologie. 1900. Bd. 27, pag. 407.
- VAN GEHUCHTEN: Archives internat. de Physiologie. 1904. Cit. efter Cajal.
- GLUCK, TH.: Ueber Neuroplastik auf dem Wege der Transplantation. — Archiv f. klin. Chir. 1880. Bd. 25.
- Demonstration eines Präparates von Nervenregeneration nach Resektion und Implantation. — Berlin. Klin. Wochenschrift. 1895, nr. 28.
- GLUCK u. BERNHARDT: Heilung einer Radialislähmung in Folge eines traumatischen Nervendefectes durch sekundäre suture nerveuse à distance. — Berliner Klin. Wochenschrift. 1888, pag. 901.
- GOLDMANN: Ueber das Fehlen von Funktionsstörungen nach Resektion von periferen Nerven. — Beitr. zur Klin. Chir. Bd. 51. 1906, pag. 183.
- GUNN: Nervenresektion u. Nervennaht. — Centralblatt für Chir. 1886, pag. 723.
- HACKENBRUCH: Zur Behandlung der Spinalen Kinderlähmung durch Nervenpropfung. Deutsch. med. Wochenschr. 1905. Bd. 1, pag. 986.
- HADDA: Die Kultur lebender Körperzellen. — Berlin. Klin. Wochenschrift. 1912. Bd. 49, pag. 11.
- HAHN: Ueber Nervennaht u. Nervenplastik. Inauguraldissertation. Leipzig 1897. Ref. Jahresbericht für Chir. 1897.
- HARBITZ, F.: Om svulster i nerverne og multipel neuro-fibromatose. — Norsk Mag. f. Lægev. 1909, h. 2—4.
- HARRISON, DAMER: Trans. of Clin. Soc. 1892. Vol. 25, pag. 106.
- HARRISON, ROSS: Observations on living developing nerve fibers. — Proceedings of Soc for exp. biol. and med. 1907. Vol. 4, pag. 140.
- ROSS: The outgrowth of the nerve fiber as a mode of protoplasmic movement. — Journ. of Exp. Zool. 1910. Vol. 9, pag. 787.
- HASHIMOTO u. TOKUOKA: Ueber Schussverletzungen periferer Nerven u. ihre Behandlung. — Archiv f. klin. Chir. Bd. 84. 1907, pag. 354.
- HEAD and SHERREN: The consequences of Injury to the peripheral nerves in man. — Brain. 1905, pag. 116.
- HEATH: A case of Nerve suturing and one of Nerve grafting. — The Lancet. 1893, vol. 1, pag. 1194.
- HELD, H.: Die Entwicklung des Nervengewebes bei den Wirbeltieren. — Leipzig 1909.
- HENRIKSEN, P.: Nervesutur og Nerveregeneration. — Norsk Mag. f. L.v. 1903, nr. 1 og 2.
- Nyere undersøgelser over nerveregeneration. — Norsk Mag. f. L.v. 1913. Tillægshäfte.
- HENSEN, V.: Ueber das Auswachsen der Nerven im Embryo. — Münch. med. Wochenschrift. 1903, pag. 995.
- HIRSCHEL: Erfahrungen über Schussverletzungen der Nerven und die Verwendung von Präparierten Kalbsarterien zu ihrer Umhüllung: — Deutsch. Zeitschr. f. Clin. Chir. Bd. 132. H. 5—6, pag. 567. 1915.
- v. HOFMEISTER: Ueber doppelte und mehrfache Nervenpropfung bei Schussverletzungen d. Nerven. — Beitr. zur Klin. Chir. 1915. Bd. 96. 3. (3. Kriegschir. Heft, pag. 329.)
- HUBER, G. C.: A study of the operative treatment for loss of nerve substance in peripheral nerves. — Journ. of Morphology. 1895. Vol. 11, pag. 629.

- INGEBRIGTSEN, R.: The Influence of Isoagglutinins on the final results of homoplastic transpl. of arteries. — Journ. of Exp. med. Vol. 15. 1912, pag. 169.
- Studies upon the Characteristics of different Culture media. — Journ. of Exp. med. Vol. 16. 1912, pag. 421.
 - Studies of the degeneration and regeneration of axiscylinders in vitro. — Journ. of Exp. med. Vol. 17. 1913, pag. 182.
 - Regeneration of axiscylinders in vitro. — Journ. of Exp. med. Vol. 18. 1913, pag. 412.
 - Homoplastisk Nyretransplantation. — Norsk Mag. f. L v. 1914, nr. 10.
- ITO U, SOYESIMA: Zur Behandlung der Facialislähmung durch Nervenpropfung. Deutsche Zeitschr. f. Chir. 1907. Bd. 90, pag. 205.
- JOHNSSON, E. G.: Om nervesutur och nervetransplantation. Nord. med. archiv. 1882, nr. 27, pag. 65.
- JOLLY: Sur la durée de la vie et de la multiplication des cellules animales en dehors de l'organisme. — Compt. rend. de la Soc. de Biol. 1903. 55, pag. 1266.
- Ibid. Bd. 69. 1910, pag. 86, 295, 470, 608.
- KAUFMANN: Revue des sciences méd. 1884. Ref. efter Sherren.
- KEEN: Six cases of secondary operation for wrist-drop from injury to the musculo-spiral nerve by fracture of the humerus. — Med. chron. Manchester 1900. Cit. efter Auffenberg og Powers.
- KENNEDY: On the restoration of coordinated movements after nerve crossing etc. — Proceedings of the royal society nombr. 1900.
- KILVINGTON, BASIL: An investigation on the regeneration of nerves. — Brit. med. Journ. 1905, 29 april, 16 september.
- An investigation of the regeneration of nerves with regard to surgical treatment of certain paralyses. — Brit. med. Journ. 1908, pag. 1414.
- KIRSCHNER: Ueber Schussverletzungen d. per. Nerven. — Deutsche med. Wochenschr. 1915, nr. 11, pag. 313.
- KOELLIKER, TH.: Jahresbericht f. Chir. 1896, pag. 282.
- KREDEL: Ueber des Verhalten der auf oper. Schussverletzten Nerven überpflanzten Fascienlappen. — Centralblatt f. Chir. 1915, nr. 13.
- KÜSTER: Verhandl. d. Deutschen Gesellschaft f. Chir. 5 Congress, pag. 113.
- KÜTTNER: Zwei Fälle von Resektion der Humerusdiaphyse zwecks direkter Nervenvereinigung bei grossen traumatischen Defekten der Oberarmnerven. Centralblatt f. Chir. 1909, nr. 4.
- KULIABKO: Weitere Studien über die Wiedererlebung des Herzens. Wiedererlebung d. Menschlichen Herzens. — Pflügers Archiv. 1903. Bd. 97, pag. 539.
- LAMBERT: The production of foreign body giant cells in vitro. — Journ. of Exp. med. 1912. Vol. 15, pag. 510.
- The Character of growth in vitro with special reference to cell division. — Journ. of Exp. med. 1913. Vol. 17, pag. 499.
 - and HANES: Characteristics of growth of sarcoma and carcinoma cultivated in vitro. — Journ. of Exp. med. 1911. Vol. 13, pag. 495.
 - and HANES: A study of cancer immunity by the method of cultivating tissues outside the body. — Journ. of Exp. med. 1911. Vol. 13, p. 505.
 - and HANES: The cultivation of tissue in plasma from alien species. — Journ. of Exp. med. 1911. Vol. 14, pag. 129.
 - and HANES: The cultivation of tissue in vitro as a method for the study of cytotoxins. — Journ. of Exp. med. 1911. Vol. 14, pag. 453.
- LANDERER: Einheilung eines Kaninchennerven in einen Defekt des Nervus Radialis. — Deutsch. Zeitschr. f. Chir. 1889. Bd. 28, pag. 604.
- LANGE, F.: Verhandl. d. deutsch. Gesellschaft f. Chir. 1882, pag. 55.
- LANGLEY: Journ. of Physiol. Vol. 23, nr. 3.

- LANGLEY and ANDERSON, H. K.: Observations on the regeneration of nerve-fibers. — Journ. of Physiol. Vol. 29, 1903.
- LEEGAARD: Ueber die entartungsreaktion. — Deutsch. Archiv f. Klin. Med. Bd. 26, 1880, pag. 459.
- LEEUWENHOOK, A.: Epistolæ ad societatem regiam anglicam et alios illustres viros. — Batavia 1719. Cit. fra Verworn: Allgem. Physiologie, 5te utg. 1909, pag. 153.
- LÉTIÉVANT: Traité des sections nerveuses. — Paris 1873.
- LEWIS, W., and LEWIS, M.: The cultivation of sympathetic nerves from the intestine of chick embryos in saline solution. The anatomical record. 1912. Vol. 6, pag. 7, 195, 207.
- LJUNGGREN, C. A.: Von der Fähigkeit des Hautepithels ausserhalb des Organismus sein Leben zu behalten mit Berücksichtigung der Transplantation. Deutsche Zeitschr. f. Chir. 1898. Bd. 47, pag. 609.
- LOEB and FLEISCHER: Proceed. of Soc. Exp. Biol. and med. Vol. 8, pag. 133.
- LOEB, J.: Die Dynamik der Lebenserscheinungen. — Leipzig 1906.
— The Mechanistic Conception of life. — Chicago 1912.
- LÖBKER: Ueber die Kontinuitätsresektion der Knochen, behufs Ausführung sekundärer Sehnen- und Nervennaht. — Centralblatt f. Chir. 1884, pag. 841.
- LOTHEISEN: Zur Technik d. Nerven- u. Sehnennaht. — Archiv f. klin. Chir. Bd. 64, 1901, pag. 310.
- LUGARO: Zur Frage der autogenen Regeneration. Neurolog. Centralblatt. Bd. 24, pag. 1143, 1905. Bd. 25, pag. 786, 1906.
- MACABRINI: Der Degenerationsprocess der Nerven bei Homo- und Heteroplastischen Propfungen. — Folia neuro-biolog. 1911. Vol. 5, pag. 598.
- MCWHORTER and WHIPPLE: Anatom. Record. 1912. Vol. 6, pag. 121.
- MANASSE: Ueber Vereinigung des N. facialis mit dem N. accessorius. — Archiv f. klin. Chir. Bd. 62, 1900.
- MARINESCO: Le mécanisme de la régénérescence nerveuse. — Revue générale des sciences. 1907, pag. 145 og 190.
— La nature intime du processus de dégénérescence des nerfs. — Presse méd. 1907, nr. 7.
— Compt. rend. de la Soc. de Biol. 10 novbr. 1906.
— et MINEA: La culture des ganglions spinaux des mammifères in vitro. Revue neurologique no. 21, 15 novbr. 1912.
— et MINEA: Survivance des ganglions spinaux greffés à différents intervalles. — Compt. rend. de la Soc. de la Biol. 1903, pag. 86.
- MEDEA: Boll. d. Soc. Med. Chir. di Pavia. 1905. Cit. efter Cajal.
- MAYO ROBSON: Brit. med. Journ. 1889, vol. 1, pag. 244. Ref. av Atkinson: Remarks on nerve grafting. Brit. med. Journ. 1890, vol. 2, pag. 624.
— A case in which the spinal cord of a rabbit was successfully used as a graft in the median nerve of a man. — Brit. med. Journ. 1896, vol. 2, oct. 31.
- MERZBACHER: Zur Biologie der Nervendegeneration. — Neurolog. Centralblatt 1905. Bd. 24, pag. 150.
- MODENA: Die Degeneration und Regeneration des peripheren Nerven nach Läsion desselben. — Arbeiten aus dem Neurol. Institute herausgegeben von Prof. Obersteiner. Bd. 12 1905.
- MÖNCKEBERG and BETHE: Die Regeneration der Markhaltigen Nerven. — Archiv f. Mikroskop. Anatomie. Bd. 54. 1899.
- MOTT, HALLIBURTON and EDMONDS: Regeneration of nerves. — Proceed. of the Royal Soc. 1906. Bd. 78.
- MOUILLIN: A case of Nerve transplantation. — The Lancet. 1893, vol. 1, pag. 1516.
- MÜNZER und FISCHER: Gibt es eine autogene Regeneration der Nervenfasern? Neurolog. Centralblatt. 1906, pag. 253.

- MURPHY, JAMES B.: Factors of resistance to heteroplastic tissue grafting. — Journ. of Exp. Med. 1914. Vol. 19, pag. 513.
- MURRAY: Brit. med. Journ. 1911. Vol. 2, pag. 1536.
- NAGEOTTE, M. J.: Incisures de Schmidt-Lantermann et protoplasma des cellules de Schwann. — Compt. rend. de la Soc. de Biol. T. 68. 1910, pag. 32.
- Etude microscopique, sur le vif, de l'activité de la myéline au cours de la dégénération Wallérienne. — Compt. rend. de l'Académie des sciences. T. 150. 1910, pag. 557.
 - La mort du cylindraxe. Compt. rend. de la Soc. de Biol. T. 67. 1910, pag. 463.
 - Activité de la gaine de myéline dans les nerfs en état de survie. — Compt. rend. de l'Académie des sciences. T. 155. 1910, pag. 731.
 - Les étranglements de Ranvier et les espaces interannulaires des fibres nerveuses à myéline. — Compt. rend. de l'Assoc. des anatomistes. 12 réunion, Bruxelles 1910, pag. 30.
 - Action des métaux et de divers autres facteurs sur la dégénération des nerfs en survie. — Compt. rend. de la Soc. de Biol. T. 69. 1910, pag. 556.
 - Greffe de ganglions rachidiens. — Compt. rend. de la Soc. de Biol. T. 62, pag. 62, pag. 289 og pag. 381.
 - Note sur l'origine et la destinée des corps granuleux dans la dégénération Wallérienne des nerfs. — Compt. rend. de la Soc. de Biol. T. 71. 1911, pag. 300.
 - Le syncytium de Schwann et les gaines de la fibre à myéline dans les phases avancées de la dégénération Wallérienne. — Compt. rend. de la Soc. de Biol. T. 70. 1911, pag. 861.
- NUSSBAUM: Ueber die Teilbarkeit der lebendigen Materie. — Archiv f. Mikroskop. Anatomie. Bd. 26. 1886, pag. 485.
- OLLIER: Sur la production artificielle des os au moyen de la transplantation du périoste et des greffes osseuses. — Mém. de la Soc. de Biol. 1859.
- Traité des résections. — T. 1, pag. 383.
- OPPEL: Ueber die Kultur v. Säugetiergeweben ausserhalb des Organismus. — Anat. Anzeiger. 1912. Bd. 40, pag. 464.
- PAUL BERT: De la greffe animale, Paris 1863; — Journ. de l'Anat. et de la Physiol. 1864, vol. 1, pag. 69.
- PAYR: Beiträge zur Technik der Blutgefäss- u. Nervennaht nebst Mitteilung über die Verwendung eines resorbierbaren Metalles in der Chirurgie. — Verhandl. d. Deutsch. Gesellschaft f. Chir. 1900. Bd. 2, pag. 593.
- PECKHAM: American Journal of orthoped. surgery. 1904, pag. 32.
- PERAIRE et MALLY: De la résection du nerf médian à l'avant-bras. — Revue de Chir. 1900, vol. 2, pag. 655.
- PERRONCITO, A.: Die Regeneration der Nerven. — Beitr. zur pathol. Anat. u. allg. Pathol. Bd. 42. 1907, pag. 354.
- PETERSON, REUBEN: Peripheral nerve transplantation. — Am. Journ. of med. Sciences. 1899. Vol. 117, pag. 377.
- PHILPEAUX et VULPIAN: Recherches expérimentales sur la régénération des nerfs séparés des centres nerveux. — Mém. de la Soc. de Biol. 1859, pag. 343.
- et VULPIAN: Note sur des essais de greffe d'un tronçon du nerf lingual. — Archives de physiologie normale et pathol. T. 3. 1870, pag. 618.
- POMERANOW: Jahresbericht f. Neurologie u. Psychiatrie. Bd. 4, 1900, pag. 852.
- POTHERAT: Paralysie cubitale par section du nerf cubital. — Bull. et mém. de la Soc. de Chir. de Paris. Tome 32, pag. 50.
- POWERS: Bridging of nerves defects. — Annals of surgery. 1904, novbr.
- RANVIER: Leçons sur l'histologie du système nerveux. — Paris 1878.
- De la dégénérescence des nerfs après leur section. — Compt. rend. 1871. Ref. efter Cajal.

- RAWA: Ueber das Zusammenwachsen der Nerven verschiedener Bestimmungen u. verschied. Funktion. — Archiv f. Physiol. von du B.-R. Bd. 9. Leipzig 1885.
- REMAK: Ueber Wiedererzeugung von Nervenfasern. — Virchows Archiv. 1862. Bd. 23.
- RICHET: Section du nerf médian; conservation de la sensibilité tegumentaire. Gazette des Hôpitaux. 1867, pag. 519.
- RIETHUS: Ueber Verletzungen d. N. Radialis bei Humerusfracturen und ihre operative Behandlung. — Beitr. zur Klin. Chir. Bd. 24, 1899.
- ROEDER: Resektion grosser Nervenstämme ohne Lähmung. — Deutsch. med. Wochenschr. 1907, nr. 41.
- RUTH, E. S.: Cicatrization of Wounds in vitro. — Journ. of Exp. med. 1911. Vol. 13, pag. 422.
- SCHAEPI, T.: Kritische Bemerkungen zur Frage nach der Entstehung der Nerven. Anat. Anzeiger. Bd. 35, 1910, pag. 81.
- SCHIFF: Sur la régénération des nerfs. — Compt. rend. de l'Acad. de Sciences. 1854. Paris.
- Ueber die Regeneration der Nerven von C. Bruch. — Archiv des Vereins f. gemeinschaftliche Arbeiten. Bd. 2, pag. 410. Ref. efter Cajal.
- SCHÜTTE, E.: Die Degeneration und Regeneration peripherer Nerven nach Verletzungen. Centralblatt f. allg. Pathol. u. pathologische Anatomie. Bd. 15. 1904. pag. 917.
- SHERREN, J.: Some points in the surgery of peripheral nerves. — The Edinburgh medical Journ. 1906, pag. 297.
- SHERRINGTON: Examination of the peripheral Distribution of the Fibres of the posterior Roots of some spinal nerves. — Phil. Trans. Royal Soc. 1892. Vol. 184. Ser. B, pag. 641. — Phil. Trans. Royal Soc. 1898. Vol. 190. Ser. B, pag. 45.
- SICK und SÄNGER: Heilung einer in Folge traumatischen Defekts bedingten Lähmung des Radialis durch Vernähung des peripheren Endes dieses Nerven mit dem Medianus. — Archiv f. klin. Chir. 1897. Bd. 54, pag. 271.
- SPITZY: Zur Frage der Behandlung von Lähmungen mittels Nervenplastik. — Münchener med. Wochenschr. 1908, pag. 1423.
- STEFANI: Archiv f. Anatomie u. Physiol. 1886.
- STEIN: Neue Wege der Nervenplastik. — Münch. med. Wochenschr. 1912, pag. 1427, nr. 26.
- STEINTHAL: Die Deckung grösserer Nervendefekte durch Tubularnaht. — Beitr. zur Klin. Chir. 1915. Bd. 96, pag. 295.
- STIRLING: Primary suture of the median nerve; subsequent transplantation of the sciatic nerve of a dog. — Intercolonial med. Journ. of Australasia, march 1907. Ref. i Jahresbericht f. Chir. 1907.
- STOFFEL: Ueber Nervenüberpflanzung bei schlaffen Lähmungen. — Münchener med. Wochenschr. 1910, nr. 5, pag. 227.
- Ueber die Behandlung verletzter Nerven im Kriege. — Münch. med. Wochenschr. 1915, nr. 6.
- Ueber Nervenmechanik und ihre Bedeutung für die Behandlung der Nervenverletzungen. — Feldärztl. Beil. zur Münch. med. Wochenschr. 1915, nr. 26, pag. 889.
- STROEBE, H.: Experimentelle Untersuchungen über Degeneration und Regeneration peripherer Nerven nach Verletzungen. Beitr. zur patholog. Anat. u. allg. Pathol. Bd. 13. 1893, pag. 160.
- STÜBEL: Ultramikroskopische Studien über Blutgerinnung u. Trombocyten. Pflügers Archiv f. Physiol. 1914. Bd. 156, pag. 361.
- TAYLOR: Nervebridging. — The Journ. of Am. med. Assoc. 1908. Vol. 50.

- THÖLE: Kriegsverletzungen peripherer Nerven. — Beitr. zur. Klin. Chir. 1916. Bd. 98. H. 2, pag. 131.
- TIZZONI: Zur Pathologie des Nervengewebes. — Centralblatt f. d. med. Wissenschaften. 1878. Jahrg. 16, pag. 225.
- TUBBY: Surgical treatment of infantile paralysis. — Brit. med. Journ. 1908, vol. 2, pag. 903.
- VANLAIR: De la régénération des nerfs périphériques par le procédé de la suture tubulaire. — Archives de biol. T. 3. 1882, pag. 379.
— Nouvelles recherches expérimentales sur la régénération des nerfs. — Archives de Biol. T. 6. 1887.
- VERGA: Ref. i Jahresbericht f. Chir. 1910.
- VOELCKER: Operative Befunde bei Schussverletzungen peripherer Nerven. — Deutsche Zeitschr. f. Chir. Bd. 133. H. 1, 1915, pag. 65.
- VOLPINO: The culture of cancer cells in vitro. — Journ. of Am. med. Assoc. 1911, 56, pag. 138.
- VUCETIC, N.: Allg. Wiener med. Zeitung. 1892, pag. 142. Cit. efter R. Peterson.
- WALLER: Sur la reproduction des nerfs et sur la structure et les fonctions des ganglions spinaux. Müllers Archiv. 1852, pag. 392.
- WALTON: Survival and transplantability of adult mammalian tissue in vitro. — Journ. of Exp. med. 1914. Vol. 19, pag. 121.
- WEIR MITCHELL: Injuries of nerves. 1872. Cit. efter Peterson.
- WENTSCHER: Experimentelle Studien über das Eigenleben Menschlicher Epidermiscellen ausserhalb des Organismus. — Beitr. zur Path. Anat. u. allg. Pathologie. 1898. Bd. 24, pag. 101.
- WREDE: Ueberbrückung eines Nervendefekts mittels Seidennaht und lebenden Venenstückes. — Deutsche med. Wochenschr. 1909, pag. 1125.
- ZIEGLER: Untersuchungen über die Regeneration des Achsencylinders durchtrennter peripheren Nerven. — Archiv f. klin. Chir. 1896. Bd. 51, pag. 796.

Plancheforklaring.

Planche I.

- Fig. 1—2. Wallersk degeneration 1 døgn efter overskjæring av n. ischiadicus. Nervefibre fotograferte efter dissociation i saltvand. — Hyperplasi av det Schwannske protoplasma.
- Fig. 3. Wallersk degeneration in vitro. Nervefiber efter 24 timers ophold i Lockes væske av 38⁰. Fotografert direkte efter dissociation. Myelinskeden og aksecylindren er segmentert. De Schwannske kjerner faldt ind mot fiberens centrum.
- Fig. 4. Wallersk degeneration. Nervefibre 3 døgn efter overskjæring, fotografert efter dissociation i saltvand. Myelinskeden og aksecylindren er segmentert, ovoiderne dannede.

Planche II.

- Fig. 5—6. Wallersk degeneration 4 døgn efter overskjæring. Rikelige ovoider. I fig. 5 sees en Schwannsk kerne i fiberens centrum.
- Fig. 7—8. Wallersk degeneration 7 og 12 døgn efter overskjæringen.

Planche III.

- Fig. 9. Sideknopper med nerveringe.
- Fig. 10. Regenerationsfænomener fra aksecylindrene i den centrale stump 2 døgn efter overskjæring lige ved stumpen. Terminale knoppe med vekstkøller og T-formede delinger.
a. en degenerert nervefiber med en liten sideknop.
b. en nervefiber med opsvulmet ende (degenerationskolbe) og med sidegrene. Solvimpregnation.
- Fig. 11. Regenerationsfænomener fra aksecylindrene i den centrale stump 3 døgn efter overskjæring lige ved stumpen. Sidegrene og endegrene. a. en degenerert nervefiber, der ender i en knop. Solvimpregnation.
- Fig. 12. Regenerationsfænomener fra den centrale stump 3 døgn efter overskjæring. I midten en tyk aksecylinder med terminal knopskytning, mange grene. Til høire en utvoksende aksecylinder med vekstkolbe, hvorfra en ny aksecylinder igjen vokser ut. Fotografi. Solvimpregnation.

Planche IV.

- Fig. 13. Regenerationsfænomener fra den centrale stump 7 dage efter overskjæring. Sideknoppe og endeknoppe nydannede fra gamle aksecylindre. Flere av de unge nervefibre er utstyret med vekstkølber. Solvimpregnation.

Planche V.

- Fig. 14. Regenerationsfænomener fra den centrale stump 11 dage efter overskjæring. Vekstkolber.
Solvimpregnation. Fotografi.
- Fig. 15. 24 timer gammel levende (ufarvet) kultur fra hjernebarken av et 6 dage gammelt kyllingembryo. Hjernestykket nedad. Silketraad opad.

Planche VI.

- Fig. 16. 2 dage gammel levende (ufarvet) kultur av hjernebarken fra et 14 dage gammelt kyllingembryo. Kulturen er anlagt paa et silkeslør i plasma.

Planche VII.

- Fig. 17. 3 dage gammel levende (ufarvet) kultur av hjernebarken fra et 18 dage gammelt kyllingembryo. Anastomoserende protoplasmatraade med varikøse opsvulmninger og vekstkolber.
- Fig. 18. 2 dage gammel levende (ufarvet) kultur av spinalganglion fra en 9 maaneder gammel kanin. Nervefibre med endekøller. Ingen bindevævsceller.

Planche VIII.

- Fig. 19. 2 dage gammel kultur av spinalganglion fra en marsvinunge. Spinalgangliet mørkt, plasma lyst. Talrike nervefibre er vokset ut i plasma. Forgreninger, varikositeter og vekstkolber. Sølvimpregnation.

Planche IX.

- Fig. 20. 2 dage gammel plasma-kultur av spinalganglion fra et ungt marsvin. Spinalgangliet mørkt, plasmaet lyst brunt. Talrike nervefibre vokser ut i plasmaet. Forgreninger og vekstkolber. Pyridinfiksation. Sølvimpregnation.

Planche X.

- Fig. 21. 2 dage gammel kultur av spinalganglion fra en katunge. Spinalgangliet mørkt nedad, plasmaet lyst opad. Talrike, tildels forgrenede nervefibre med varikositeter og vekstkolber er vokset ut i plasmaet. Pyridinfiksation. Sølvimpregnation. Fotografi.

Planche XI.

- Fig. 22. 2 dage gammel kultur av spinalganglion fra en marsvinunge. Talrike nervefibre er vokset ut i plasmaet. Pyridinfiksation. Sølvimpregnation.
Fibren længst til høire er paa et litet stykke spiralsnodd. („Perroncito-spiral“).

Planche XII.

- Fig. 23. 2 dage gammel kultur av cerebellum fra en marsvinunge. Nervefibren er vokset ut i plasmaet som en direkte fortsættelse av en nervefiber i cerebellarfragmentet. Pyridinfiksation. Sølvimpregnation.

Planche XIII.

- Fig. 24. 2 dage gammel kultur av cerebellum fra en katunge. — Sølvimpregnation.
Fotografiene, der er tat med 2 forskjellige forstørrelser — det nederste 1300 diameter og det øverste 1900 diameter — viser en nervefiber, der er vokset ut i plasma. Den har en terminal vekstkolbe (som muligens er dannet ved en liten sløife av fibren).

Planche XIV.

- Fig. 25. 2 dage gammel kultur av cerebellum fra en marsvinunge. En enkelt nervefiber sees omgitt av tykke kornede anastomoserende protoplasma-(glia-)fibre.
Sølvimpregnation.

Planche XV.

- Fig. 26 A. Mikrofotografier indstillet paa 3 forskjellige plan i et præparat med et forgrenet og anastomoserende protoplasmasyncytium, der er vokset fra en stor neuroglia-celle i et stykke av cerebellum fra en katunge. 3 dage gammel kultur. — Sølvimpregnation.
- B. En tegning av det samme.

Planche XVI.

- Fig. 27. Forgrenet og anastomoserende syncytium utvokset i plasma fra et stykke av cerebellum av en hundehvalp. 2 dage gammel kultur. Formalinfiksation. Hæmatoxylin. Mikrofotografi, sterk forstørrelse. 1900 diameter.

Planche XVII.

- Fig. 29. Forgrenede kjerneholdige protoplasmatraade utvokset i plasma fra de overskaarne ender av et nervesegment uttat av det perifere avsnit av en overskaaret nerve 6 dage efter gjennemskjæring. Fiksert efter 5 dages vekst i termostat. Hæmatoksylin. Tegning (tegneokular).

Planche XVIII.

- Fig. 28. Mikrofotografi av protoplasmafibre (Schwannske syncytium) vokset ut i plasmaet fra de overskaarne nervefibres ender i et segment uttat av den perifere del av en gjennemskaaret nerve 5 dage efter overskjæring. Fiksert og farvet (hæmatoksylin efter 6 dages vekst i termostat). Pilen peger paa en protoplasmafiber med en kjerne (mørk) og en myelindraabe.
- Fig. 30. Mikrofotografi (liten forstørrelse) av protoplasmafibre utvokset i plasma fra de overskaarne ender av et nervesegment uttat fra det perifere avsnit av en overskaaret nerve 6 dage efter gjennemskjæring. — Pyridinfiksert efter 9 dages vekst i termostat. Solvimpregnation.
- Fig. 31. Tegning av protoplasmafibre fra samme præparat som fig. 30. Fibrenes længde er omkring 350 μ . Varikositeterne skyldes tilstedeværende Schwannske kjerner.

Planche XIX.

- Fig. 32. Mikrofotografi (svak forstørrelse) av protoplasmafibre utvokset i plasma fra overskaarne ender av et nervesegment uttat fra det perifere avsnit av en overskaaret nerve 13 dage efter gjennemskjæring. Fiksert efter 5 dages vekst i termostat. Hæmatoksylin.
- Fig. 33. Mikrofotografi (sterk forstørrelse) fra samme præparat som fig. 32.
- Fig. 34. Mikrofotografi (svak forstørrelse) av protoplasmafibre utvokset i plasma fra overskaarne ender av et nervesegment uttat fra det perifere avsnit av en overskaaret nerve 19 dage efter gjennemskjæring. Fiksert efter 6 dages vekst i termostat. Hæmatoksylin.
- Fig. 35. Mikrofotografi (sterk forstørrelse) fra samme præparat som fig. 34.

Planche XX.

- Fig. 36. Ultramikroskopisk (dunkelfelt) fotografi av fibrinnettet i plasma (fra hunde), fotografert under og like efter koagulationen i en kapillærspalte mellem 2 dækglass.
- Fig. 37. Ultramikroskopisk (dunkelfelt) fotografi av fibrinnettet i plasma (fra katte), fotografert under og like efter koagulationen i en kapillærspalte mellem 2 dækglass.

Planche XXI.

- Fig. 38. Ultramikroskopisk (dunkelfelt) fotografi av fibrinnettet i plasma (fra kaniner), fotografert under og like efter koagulationen i en kapillærspalte mellem 2 dækglass.
- Fig. 39-41. Nervefibre fra forskjellige dele av overskaarne nerver. Wallersk degeneration i forskjellige stadier.
- Fig. 39. Wallersk degeneration 4de dag.
- Fig. 40. Wallersk degeneration 7de dag.
- Fig. 41. Wallersk degeneration 14de dag. Multiplikation av de Schwannske kjerner; talrike indvandrede celler („corps granuleux“).
- Fig. 42. Nervefibre fra et autoplastisk transplantat 6 dage efter transplantationen. Multiplikation av de Schwannske kjerner.

Planche XXII.

- Fig. 43. Nervefibre fra et autoplastisk transplantat 16 dage efter transplantationen. Lange rader av Schwannske kjerner. Nogen indvandrede celler („corps granuleux“).
- Fig. 44. Nervefibre fra et autoplastisk transplantat 18 dage efter transplantationen. Multiplikation av de Schwannske kjerner. Reduktion av myelinovoiderne. Talrike indvandrede celler.
- Fig. 45. Nervefibre fra et homoplastisk transplantat 4 dage efter transplantationen. De Schwannske kjerner er faldt ind mot fiberens centrum indleiret i protoplasma.
- Fig. 46. Nervefibre fra et homoplastisk transplantat 10 dage efter transplantationen. Multiplikation av de Schwannske kjerner. Indvandrede celler med smaa mørktfarvede kjerner.

- Fig. 47. Nervefiber fra et homoplastisk transplantat 18 dage efter transplantationen. Multiplikation av de Schwannske kjerner (nedad i præparatet). Disse kjerner er bleke og svakt farvede. Der sees et stort antal indvandrede celler (opad i præparatet).
- Fig. 48. Nervefibre fra et heteroplastisk transplantat 10 dage efter transplantationen. Ingen celler sees. Fibrene har et nekrotisk utseende.

Planche XXIII.

- Fig. 49. Nyutvokste nervefibre i et autoplastisk transplantat 30 dage efter transplantationen. Paa suturstedet mellem transplantatet og den perifere nervestump. Der sees tykke bundter av parallele nervefibriller, hvorav enkelte er forsynet med varikositeter og vekstkolber. Til høire sees T-formede delinger. I de Schwannske kjerner er der smaa sølvimpregnerte korn. — Sølvimpregnation.

Planche XXIV.

- Fig. 50. Nyutvokste nervefibriller i et autoplastisk transplantat 50 dage efter transplantationen. Nervefibrillerne er rikelig forsynet med varikositeter. Sølvimpregnation.
- Fig. 51. Homoplastisk nervetransplantation. Transplantatet uttat 20 dage efter operationen. Tegningen viser i svak forstørrelse øvre sutursted med silketraaden i tversnit. Intet arvæv. Der sees rikelige bundter av parallele nervefibriller, som ubrutt passerer fra den centrale stump opad til transplantatet nedad. Imellem fibrillebundterne sees lyse ovale ansamlinger av ufarvede myelinklumper og smaa sortfarvede brokker, der repræsenterer fragmenter av de gamle aksecylindre. Sølvimpregnation.

Planche XXV.

- Fig. 52. Homoplastisk nervetransplantation. Transplantatet uttat 48 dage efter operationen. Tegningen viser en bundt nervefibriller med varikøse opsvulmninger, der passerer gjennom transplantatet, som har en svak gul farve uten struktur. Sølvimpregnation.

Planche XXVI.

- Fig. 53. Kanin 132 (løpe-nr. 37) 6 mndr. gl. Venstre ben autoplastik, høire ben homoplastik. Død 136 dage efter transplantationen. Høire m. gastrocnemius atrofisk. Venstre kraftig. Kontraktur av peroneerne paa høire side, ikke paa venstre.
- Fig. 54. Kanin p. 68 (løpe-nr. 15) 8 mndr. gl. Venstre ben autoplastik, høire ben homoplastik. Normal gang 120 dage efter transplantationen. Død 163 dage efter transplantationen. Intet decubitus, ingen kontraktur, ingen atrofi.

Planche XXVII.

- Fig. 55. Kanin 153 (løpe-nr. 36) 7 mndr. gl. Venstre ben homoplastik, høire ben suture à distance (katgut). Elektrisk undersøkelse 105 dage efter transplantationen gav rykning paa venstre side, ikke paa høire. Venstre m. gastrocnemius tyk, svulmende, høire atrofisk. Kontraktur av peroneerne paa høire side, ikke paa venstre.
- Fig. 56. Kanin 115 (løpe-nr. 40) 6 mndr. gl. Homoplastik. 3 cm. høire ben, reseksjon 3 cm. venstre ben. Efter 5 maaneder viste elektrisk undersøkelse komplet kontraktion av høire m. gastrocnemius, ingen kontraktion paa venstre side ved applikation av elektroderne ovenfor reseksjonsstedet. Venstre gastrocnemius ganske atrofisk, gul, høire gastrocnemius tyk, rød.



Fig. 4.



Fig. 3.



Fig. 2.

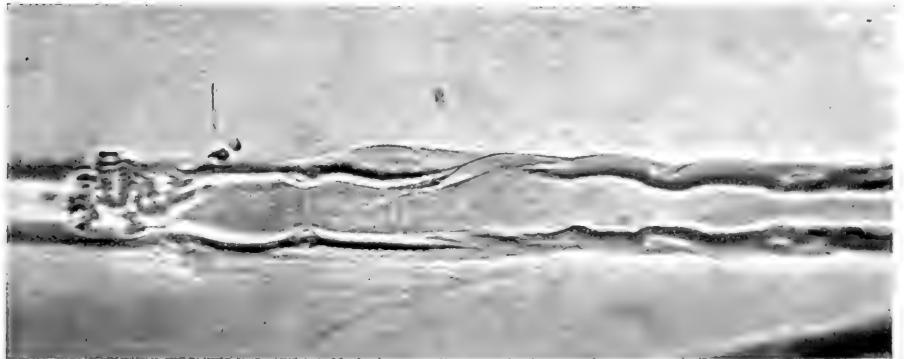


Fig. 1.



Fig. 8



Fig. 7.



Fig. 6.



Fig. 5.

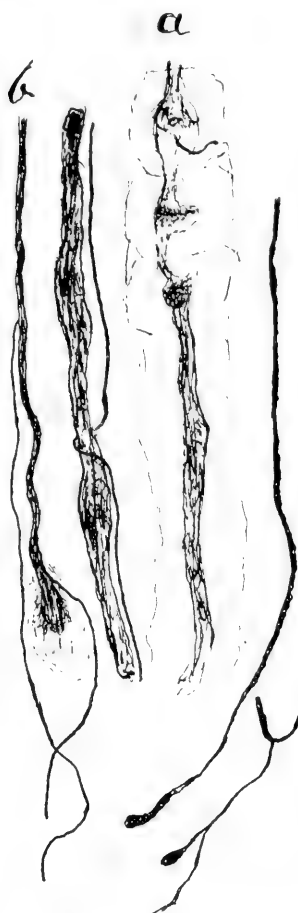


Fig. 9.

Fig. 10.

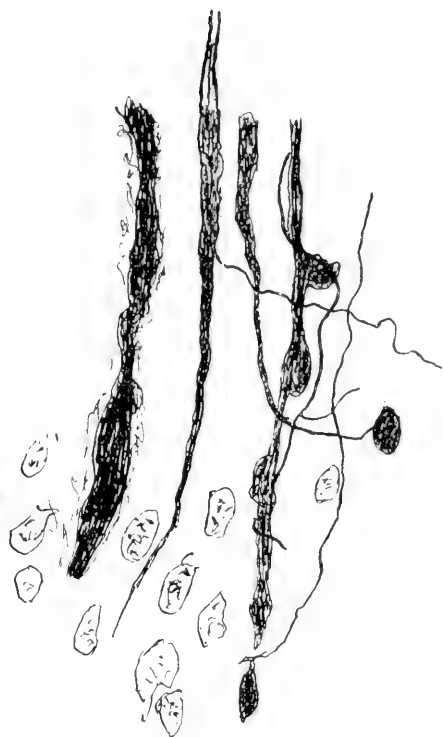


Fig. 11.

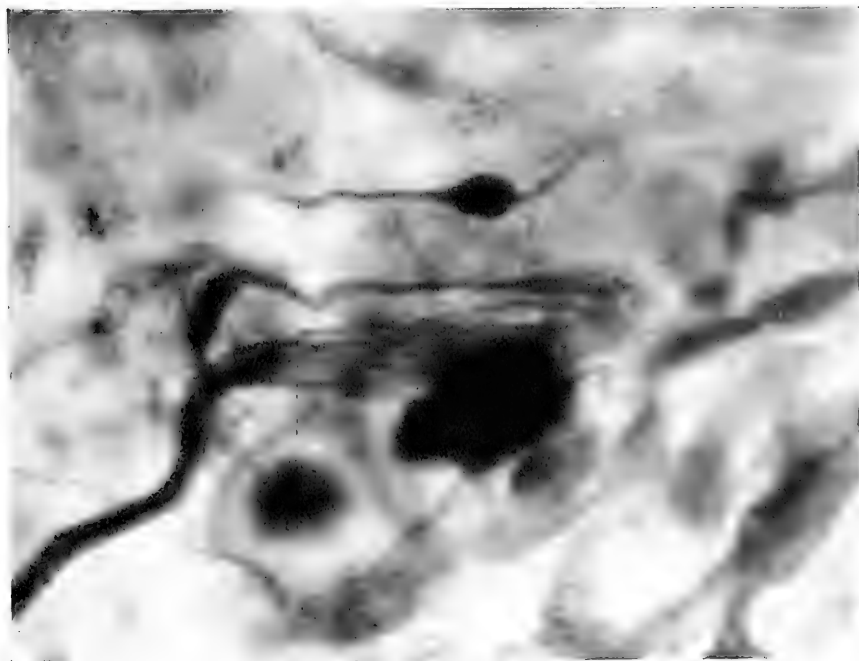


Fig. 12.



Fig. 13.



Fig. 14.

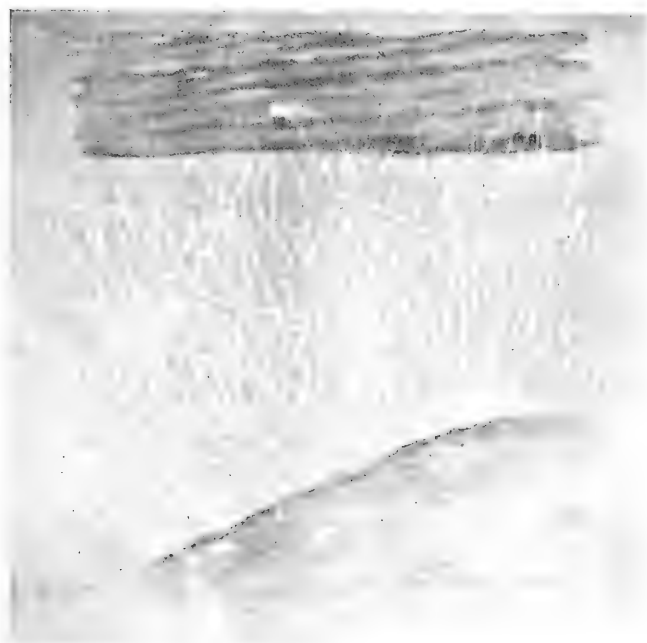


Fig. 15.

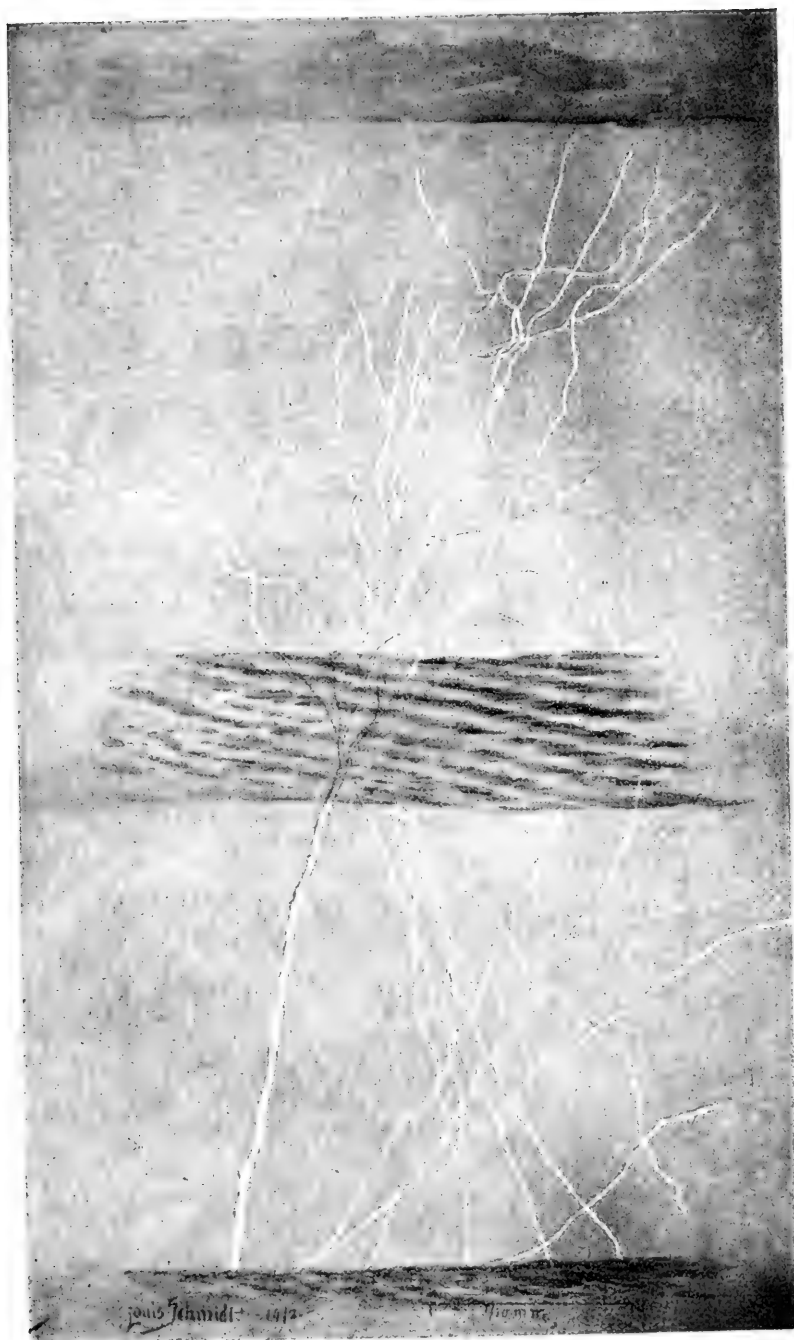


Fig. 16.



Fig 18.

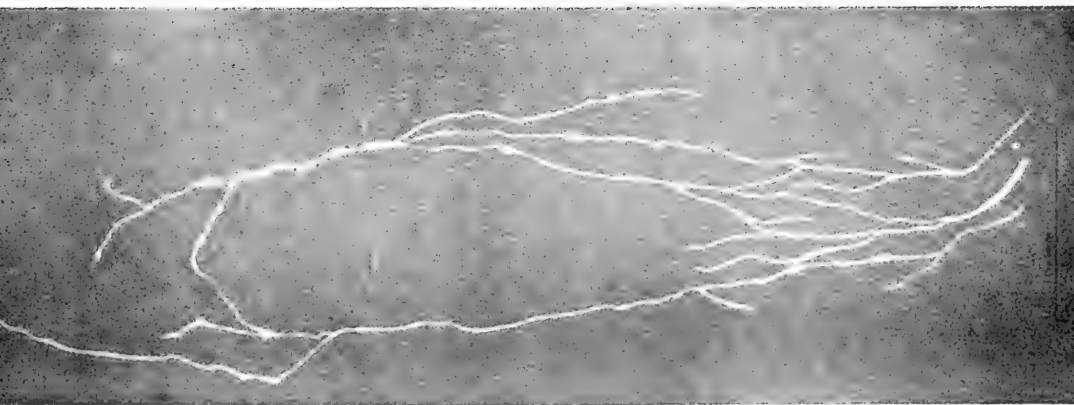




Fig. 19.

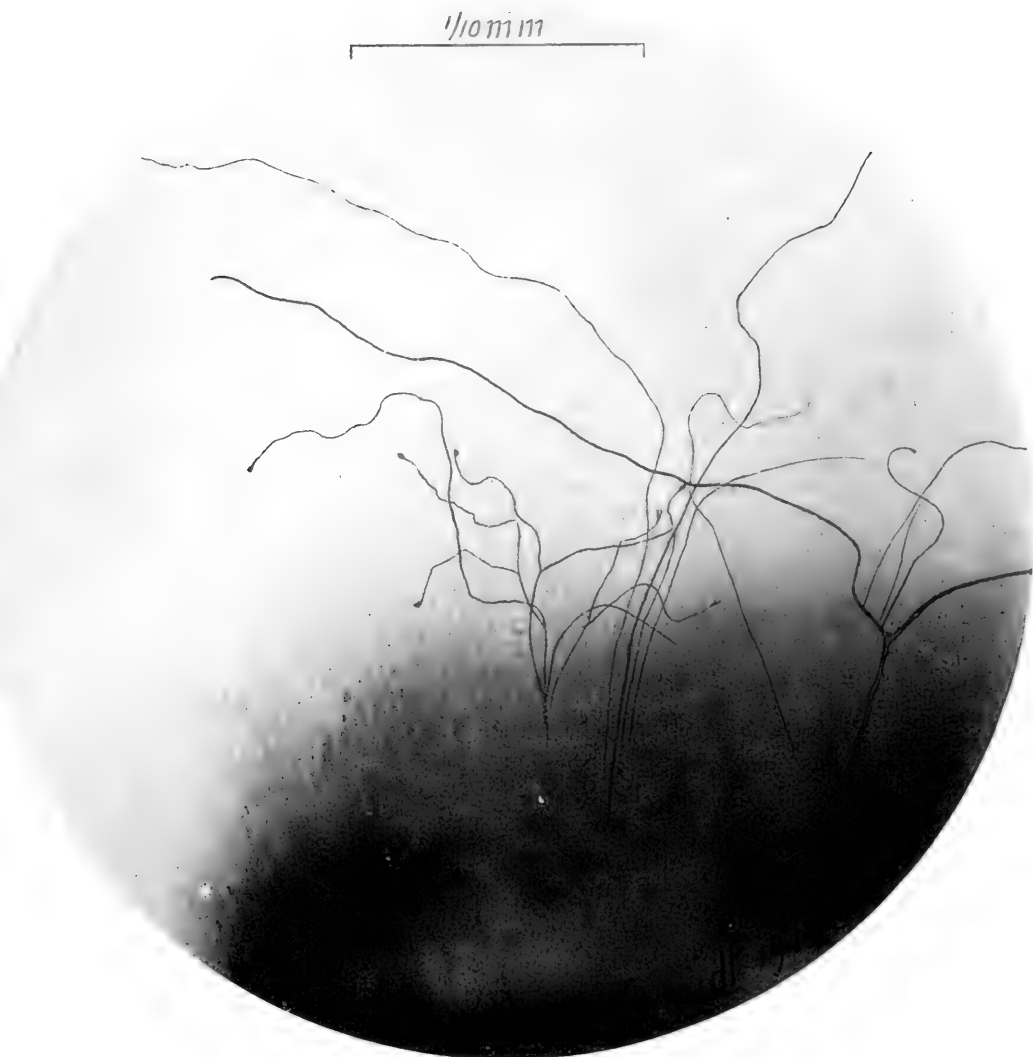


Fig. 20.

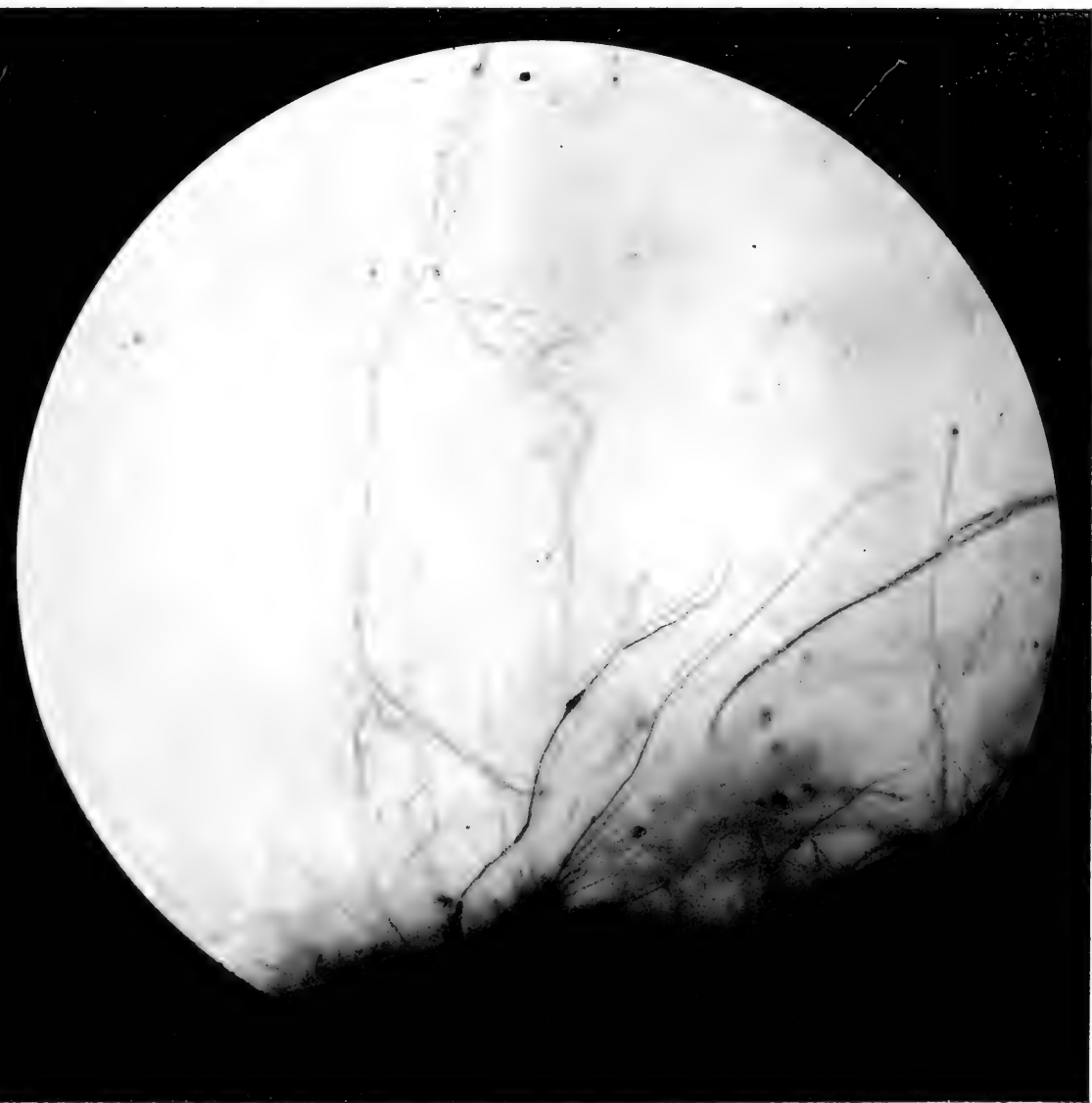


Fig. 21.



Fig. 22.



Fig. 23.

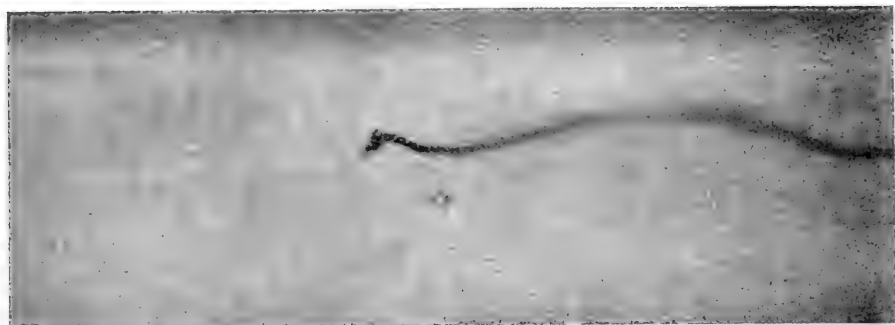


Fig. 24.



Fig. 25.



Fig. 26.



Fig. 27.





Fig. 29.



Fig. 28.

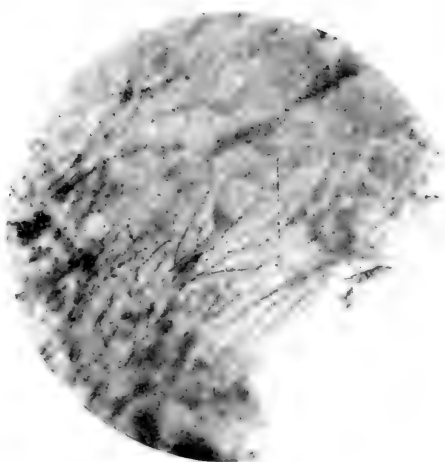


Fig. 30.



Fig. 31.



Fig. 32.



Fig. 34.



Fig. 33.

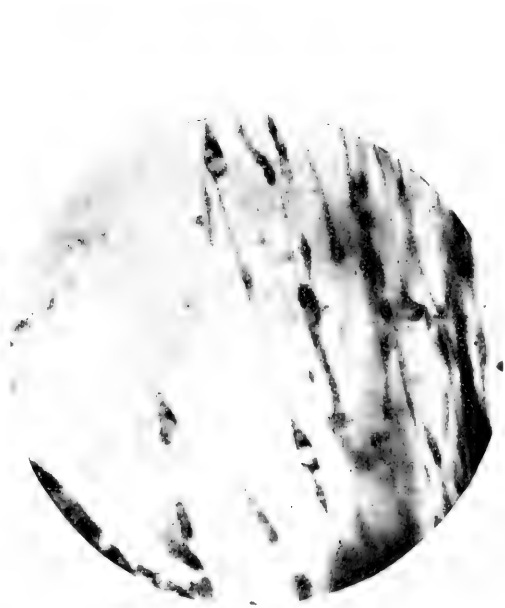


Fig. 35.

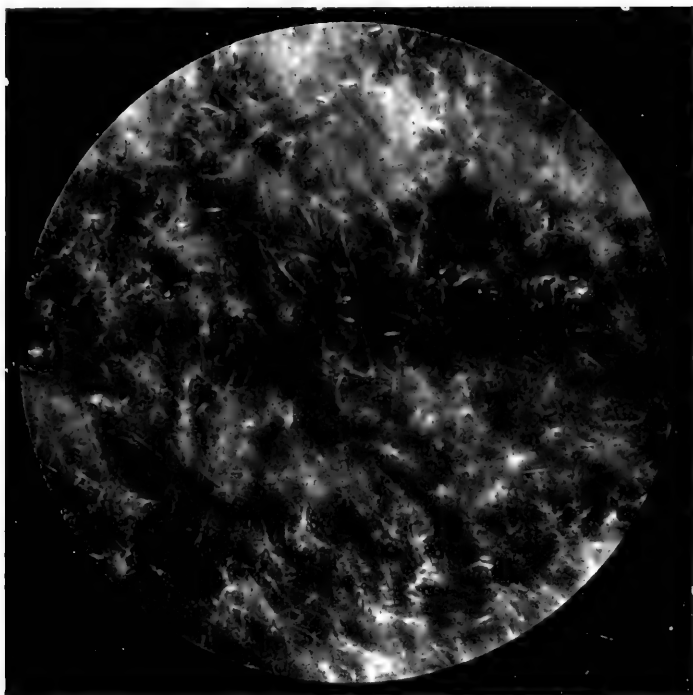


Fig. 36.

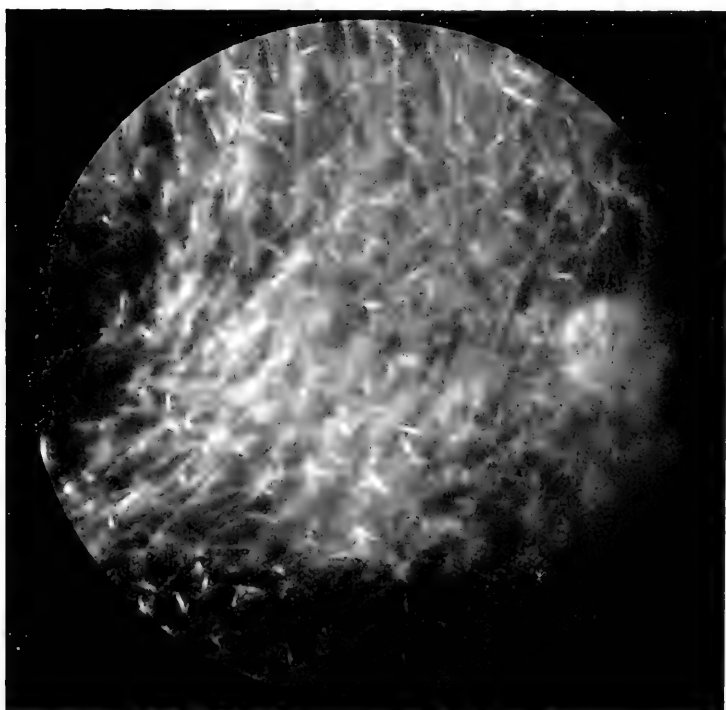


Fig. 37.



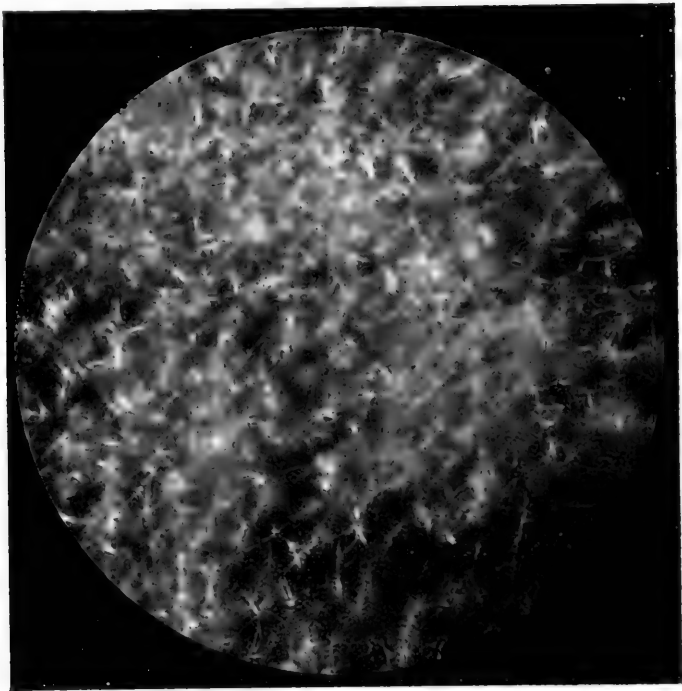


Fig. 38.



Fig. 39.



Fig. 40.



Fig. 41.

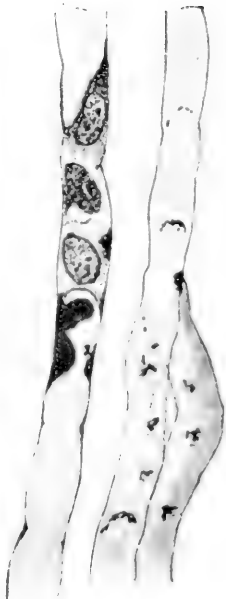


Fig. 42.



Fig. 43.

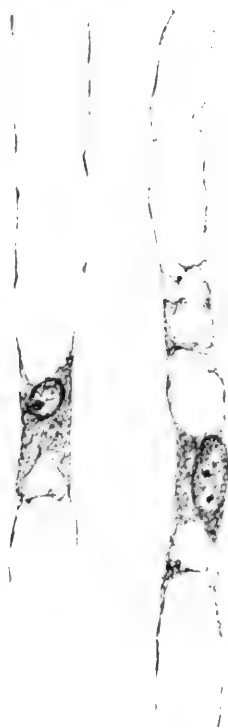


Fig. 45.



Fig. 44.

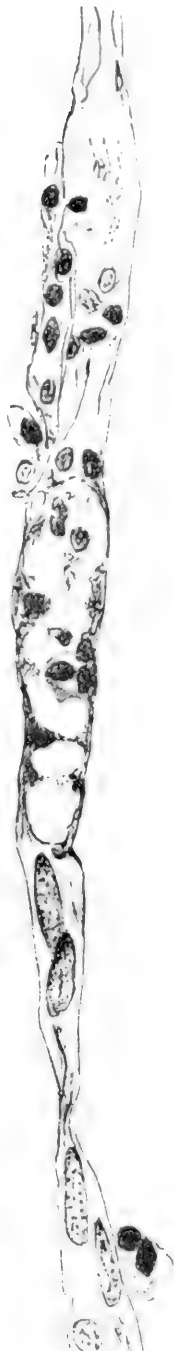


Fig. 47.



Fig. 48.

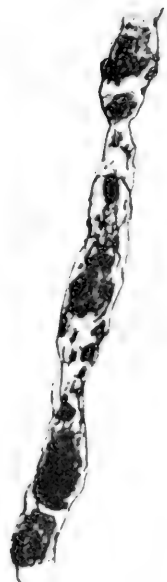


Fig. 40.

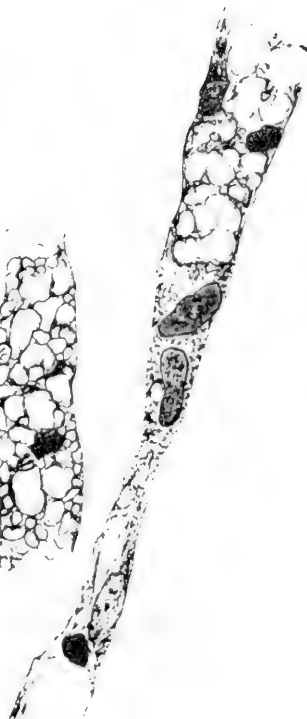




Fig. 49.



Fig. 50.



Fig. 51.

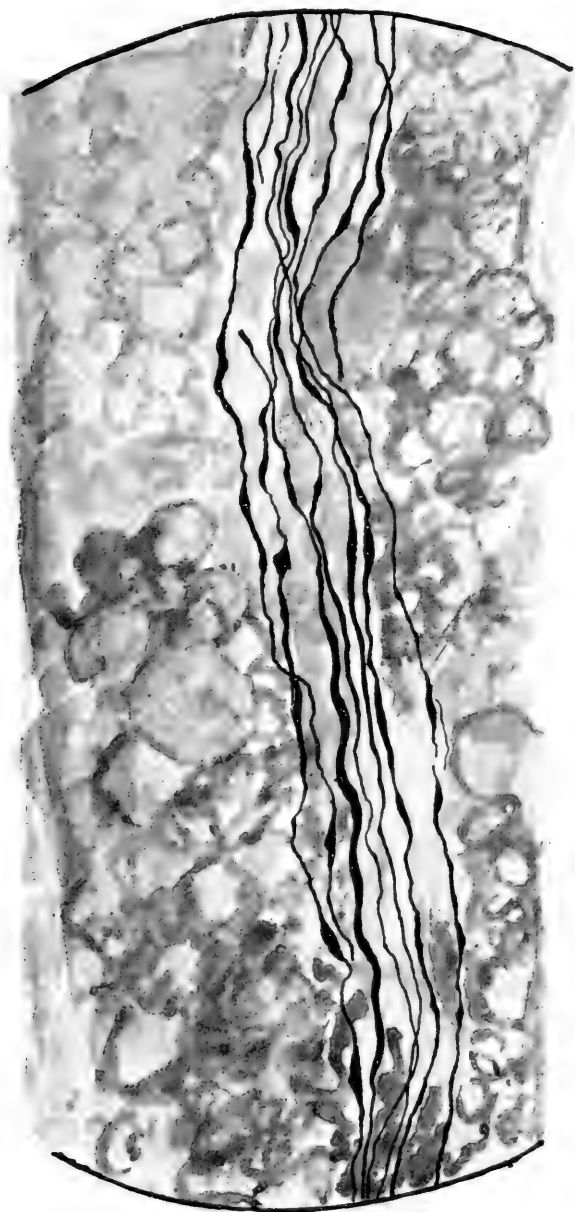


Fig. 52.



Fig. 54.



Fig. 53.





Fig. 56.



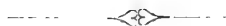
Fig. 55.

RECHERCHES SUR QUELQUES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES IMPORTANTS DANS LES APPLICATIONS

PAR

RICHARD BIRKELAND

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1917. No. 2)



CHRISTIANIA
EN COMMISSION CHEZ JACOB DYBWAD

1918

(Fremlagt i Fællesmøtet den 1ste dec. 1916 ved Axel Thue)

1. **Introduction.** -- Dans le présent travail nous allons d'abord développer (§ 2), par une méthode qui consiste seulement dans des intégrations par parties de certaines intégrales triple et double, quelques formules importantes dans les applications. Pour ce-là nous considérons trois fonctions u, v, w de x, y, z continues, uniformes avec leurs dérivées partielles du premier ordre dans un volume V limité par une surface S et nous obtenons les formules 2 (h). En posant dans ces formules $\nu = -1$ nous trouverons les déformations infiniment petites u, v, w en chaque point $M(x, y, z)$ du volume V par les valeurs que prennent dans V les six fonctions caractéristiques¹ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ et les déformations des éléments de la surface. Pour $\nu = 1$ nous avons les valeurs d'un vecteur $\bar{q}(u, v, w)$ en chaque point M par les valeurs que prennent dans le volume V les tourbillons et les divergences du vecteur \bar{q} et les valeurs de \bar{q} sur la surface².

Les formules subsistent encore dans le cas on il existe dans V des surfaces de discontinuité Σ pour les dérivées partielles de u, v, w ; mais si les surfaces Σ sont des surfaces de discontinuité pour u, v, w elles mêmes il faut ajouter des termes complémentaires.

Le cas $\nu = -1$ est important dans la théorie de l'élasticité, dans la théorie d'un mouvement lent permanent d'un fluide visqueux etc. Ici nous allons seulement traiter le cas $\nu = 1$ mais je me réserve de revenir plus tard au cas $\nu = -1$.

Le cas $\nu = 1$ est d'intérêt dans l'hydrodynamique, dans la théorie de l'électricité etc. lorsqu'il s'agit de trouver avec certaines conditions aux limites les valeurs d'un vecteur \bar{q} dans un volume V en connaissant dans

¹ PAUL APPELL, Traité de mécanique rationnelle, t. III, p. 509.

² Ce dernier problème est déjà traité par autres méthodes; voir par exemple PAUL APPELL loc. cit. p. 412-420 (le cas d'un volume infini) et p. 445-451 (le cas d'un volume fini, les divergences nulles et les valeurs des projections de \bar{q} sur les normales à chaque point de S égales à zéro). On voit les avantages considérables de ma méthode.

ce volume les tourbillons et les divergences du vecteur \vec{q} . Pour pouvoir appliquer les formules 2 (h) il faut en outre connaître les valeurs de $\vec{q}(u, v, w)$ sur la surface limite S ou ce que veut dire le même les valeurs de $q_n = u\alpha + v\beta + w\gamma$ et un vecteur $2\vec{H}$ de composantes $w\beta - v\gamma$, $u\gamma - w\alpha$, $v\alpha - u\beta$; les α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la normale intérieure au point considéré de la surface S . Ce sont des données surabondantes. Il suffit de connaître sur S seulement les valeurs de q_n ou de $2\vec{H}$. En connaissant $2\vec{H}$ il suffit de résoudre une équation intégrale linéaire de la forme 4 (d). Une telle équation intégrale admet un système de solutions et un seul. En connaissant, au contraire, les valeurs de q_n sur S on peut trouver directement les valeurs des composantes E, F, G de \vec{H} en résolvant trois équations intégrales linéaires avec trois inconnues (5 (g)). Ce système d'équations admet une solution et une seule.

Ce dernier problème (d'intérêt dans l'hydrodynamique) peut être résolu en résolvant le problème de Neumann; mais nous avons préférés de développer les trois équations intégrales 5 (g) pour résoudre le problème, car ces équations sont importantes dans la théorie des courants électriques superficielles que nous avons développée au chapitre II, car on rencontre (§ 6) ces équations intégrales quand il s'agit de déterminer les intensités et les directions des courants superficielles sur S en connaissant les forces magnétiques sur un côté de S .

Dans le cas de deux variable x, y nous obtenons des formules analogues aux formules 2 (h) pour trouver les valeurs d'un vecteur \vec{q} , de composantes u, v , dans une aire A limitée d'un contour C au moyen des valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ dans l'aire A et les valeurs de \vec{q} ou ce que veut dire le même les valeurs de $q_n = u\alpha + v\beta$ et $2G = v\alpha - u\beta$ sur C (8 (e)). Il suffit de connaître sur C une de ces quantités. Pour déterminer une de ces quantités en connaissant l'autre nous obtenons une équation intégrale exactement de même forme (9 (b) ou 10 (b)).

En échangeant dans les formules 8 (e) les quantités u et v et en introduisant la variable complexe $z = x + iy$ et $f(z) = u + iv$ nous obtenons une formule 11 (b) exprimant la valeur de $f(z)$ a un point quelconque z intérieur au contour C au moyen des valeurs de la même fonction tout le long de ce contour et les valeurs de $\mathcal{A} = \frac{\partial f}{\partial x}i - \frac{\partial f}{\partial y}$ dans l'aire A . Cette formule subsiste même dans le cas où il existe des lignes de discontinuité pour \mathcal{A} . Pour $\mathcal{A} = 0$ dans A nous obtenons la formule célèbre de Cauchy sur des fonctions de $z = x + iy$ holomorphes dans l'aire A .

Au dernier paragraphe (§ 12) nous appliquons nos résultats à l'étude du mouvement d'un fluide en mouvement dans des plans parallèles. En effet. Considérons un fluide en mouvement dans le plan des x, y et limité par un contour C dont la forme et la position peuvent varier avec le temps. Soient $\bar{q}(u, v)$ les vitesses à l'instant t . En supposant connus, à l'instant t , les tourbillons et les divergences dans l'aire A limitée par C et les valeurs de q_n sur C les vitesses sont déterminées par les formules 8 (e) en résolvant une équation intégrale de la forme 9 (b) ou 10 (b). Nous trouverons aussi exprimés par les mêmes quantités les équations des lignes de courant à l'instant t et les équations des lignes perpendiculaires aux lignes de courant. Dans les parties du fluide où les tourbillons sont nulles ces dernières lignes sont des lignes équipotentiellles.

2. **Formules importantes dans les applications.** — Soient u, v, w, z quatre fonctions de x, y, z continues, uniformes avec leurs dérivées partielles du premier ordre dans un volume V limité par une surface S et ν le nombre $+1$ ou -1 . Nous envisageons les intégrales triples et doubles

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_V \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \nu \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) z' d\tau, & Q_1 &= \int_V \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \nu \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) z' d\tau, & R_1 &= \int_V \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \nu \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) z' d\tau \\ P_2 &= \int_S (w' \beta' - \nu v' \gamma') z' d\sigma, & Q_2 &= \int_S (u' \gamma' - \nu w' \alpha') z' d\tau, & R_2 &= \int_S (v' \alpha' - \nu u' \beta') z' d\sigma \\ (a) \quad \Phi'_1 &= - \int_V \left(\nu \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) z' d\tau, & \Phi'_2 &= - \int_S (\nu u' \alpha' + v' \beta' + w' \gamma') z' d\sigma \\ P &= P_1 + P_2, & Q &= Q_1 + Q_2, & R &= R_1 + R_2, & \Phi' &= \Phi'_1 + \Phi'_2 \end{aligned}$$

étendues au volume V et à la surface S . Les notations u', v', w', z' désignent les valeurs de u, v, w, z dans l'élément de volume $d\tau = dx', dy', dz'$ de coordonnées x', y', z' et dans l'élément de surface $d\sigma$. Les α', β', γ' désignent les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$ dirigée vers l'intérieur du volume V . En intégrant par parties les intégrales triples il vient¹

¹ Nous appliquons les formules connues (PAUL APPELL, Traité de mécanique rationnelle, tome III, p. 4)

$$\int_V \frac{\partial F'}{\partial x'} d\tau = - \int_S \alpha' F' d\sigma, \quad \int_V \frac{\partial G'}{\partial y'} d\tau = - \int_S \beta' G' d\sigma, \quad \dots$$

$F'(x', y', z'), G'(x', y', z'), \dots$ étant des fonctions continues admettant des dérivées partielles du premier ordre. En posant par exemple $F' = u'z'$ il vient

$$\int_V \frac{\partial u'}{\partial x'} z' d\tau = - \int_S \alpha' u' z' - \int_V u' \frac{\partial z'}{\partial x'} d\tau, \quad \dots$$

Les autres formules appliquées s'obtiennent en permutant $u', v', w'; x', y', z'; \alpha', \beta', \gamma'$. On dit souvent qu'on a intégré par parties les intégrales triples.

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 \quad P &= - \int_V \left(w' \frac{\partial z'}{\partial y'} - v' \frac{\partial z'}{\partial z'} \right) d\tau \\
 Q_1 + Q_2 \quad Q &= - \int_V \left(u' \frac{\partial z'}{\partial z'} - v' \frac{\partial z'}{\partial x'} \right) d\tau \\
 (b) \quad R_1 + R_2 = R &= - \int_V \left(v' \frac{\partial z'}{\partial x'} - v' \frac{\partial z'}{\partial y'} \right) d\tau \\
 \Phi'_1 + \Phi'_2 = \Phi' &= \int_V \left(v' u' \frac{\partial z'}{\partial x'} + v' \frac{\partial z'}{\partial y'} + w' \frac{\partial z'}{\partial z'} \right) d\tau
 \end{aligned}$$

Désignons par $M(x, y, z)$ un point à l'intérieur ou à l'extérieur de V . Soit z' une fonction des différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ telle que $\frac{\partial z'}{\partial x'} = -\frac{\partial z'}{\partial x}$, $\frac{\partial z'}{\partial y'} = -\frac{\partial z'}{\partial y}$, ... Nous obtenons alors

$$\frac{\partial R}{\partial y} - v' \frac{\partial Q}{\partial z} = -v' \int_V u' \Delta z' d\tau - \frac{\partial}{\partial x} \int_V \left(v' u' \frac{\partial z'}{\partial x'} + v' \frac{\partial z'}{\partial y'} + w' \frac{\partial z'}{\partial z'} \right) d\tau$$

$\Delta z'$ étant le symbole de Laplace. En comparant avec 2 (b) il vient

$$(c) \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - v' \frac{\partial Q}{\partial z} = -v' \int_V u' \Delta z' d\tau$$

Nous obtenons de même manière les deux formules analogues

$$\begin{aligned}
 (d) \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - v' \frac{\partial R}{\partial x} &= -v' \int_V v' \Delta z' d\tau \\
 \frac{\partial \Phi'''}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - v' \frac{\partial P}{\partial y} &= -v' \int_V w' \Delta z' d\tau
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \Phi'' = \Phi'_1 + \Phi'_2, \quad \Phi'_1 &= - \int_V \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) z' d\tau, \\
 \Phi'_2 &= - \int_S (u' \alpha' + v' \beta' + w' \gamma') z' d\sigma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (e) \quad \Phi''' = \Phi''_1 + \Phi''_2, \quad \Phi''_1 &= - \int_V \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + v' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) z' d\tau, \\
 \Phi''_2 &= - \int_S (u' \alpha' + v' \beta' + v' \gamma') z' d\sigma
 \end{aligned}$$

Les formules 2 (c) et (d) ont lieu quel que soit le nombre des surfaces qui limitent le volume V . Il importe seulement dans les application de prendre toujours les cosinus directeurs de la normale intérieure au volume que l'on étudie. En particulier, si la fonction z' satisfait à l'équation de Laplace $\Delta z' = 0$ ces formules donnent immédiatement

$$(f) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \phi'}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - r \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \phi''}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - r \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \phi'''}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - r \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation de Laplace nous est donnée par

$$z' = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

mais cette solution n'est pas continue dans V si le point M est à l'intérieur de V . Dans ce cas, décrivons autour de $M(x, y, z)$ une petite sphère Σ et envisageons le volume V' compris dans le volume initial et extérieur à cette sphère. Le volume V' est limité par la surface S et la surface Σ de la sphère. Calculons d'abord dans la première des formules 2 (f) l'intégrale de surface étendue à la surface Σ de la petite sphère; cette intégrale sera

$$(g) \quad \begin{aligned} I &= \int_{\Sigma} \left[(v'u'a' + v'\beta' + w'\gamma') \frac{x-x'}{r^3} - (v'a' - v'u'\beta') \frac{y-y'}{r^3} + \right. \\ &\quad \left. + r(u'\gamma' - rw'a') \frac{z-z'}{r^3} \right] d\sigma = -\frac{v}{r^2} \int_{\Sigma} u' d\sigma \end{aligned}$$

car sur la sphère Σ nous avons

$$r = \text{constante}, \quad x-x' = -r\alpha', \quad y-y' = -r\beta', \quad z-z' = -r\gamma'$$

L'intégrale I devient donc lorsque le rayon r de la sphère tend vers zéro

$$-4\pi v u(x, y, z)$$

Les intégrales triples dans la première des formules 2 (f) tendent vers une limite déterminée lorsque le rayon de la sphère tend vers zéro. Les deux autres des formules 2 (f) donnent des résultats analogues, en résumé il vient

$$\begin{aligned}
 (h) \quad & \left. \begin{aligned} 4\pi v u(x, y, z) \\ 0 \end{aligned} \right\} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - v \frac{\partial Q}{\partial z} \\
 & \left. \begin{aligned} 4\pi v v(x, y, z) \\ 0 \end{aligned} \right\} = \frac{\partial \Phi''}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - v \frac{\partial R}{\partial x} \quad v = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \\
 & \left. \begin{aligned} 4\pi v w(x, y, z) \\ 0 \end{aligned} \right\} = \frac{\partial \Phi'''}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - v \frac{\partial P}{\partial y}
 \end{aligned}$$

suivant que le point $M(x, y, z)$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de V . Les $P, Q, R, \Phi', \Phi'', \Phi'''$ sont donnés de 2 (a) et (e) en posant $z' = \frac{1}{r}$.

Nous obtenons le même résultat avec une surface fermée quelconque entourant le point M au lieu de la sphère Σ . En effet. Soit s une petite surface fermée entourant le point M et ayant la sphère Σ à l'intérieur. Désignons par V'' le volume compris dans le volume initial V et extérieur à s , par I_s et I_s les intégrales de surface 2 (g) prises respectivement sur les surfaces s et S et par T' et T'' les intégrales triples dans la première des formules 2 (f) correspondantes aux volumes V' et V'' respectivement. Il vient alors en appliquant la première des formules 2 (f) aux volumes V' et V''

$$I_s + I + T' = 0, \quad I_s + I_s + T'' = 0$$

d'où

$$I - I_s = T'' - T'$$

Lorsque le rayon de la sphère Σ tend vers zéro et en même temps la surface s vers le point M la différence $T'' - T'$ tend vers zéro. L'intégrale I_s tend donc vers la même limite que I c'est à dire vers $-4\pi v u(x, y, z)$.

Les formules 2 (h) subsistent encore sans changement, s'il existe dans V des surfaces de discontinuité pour les dérivées partielles de u, v, w pourvu que le vecteur $q(u, v, w)$ soit continu. Si ce vecteur est discontinu il faut ajouter des termes complémentaires.

En effet. Soient Σ une surface de discontinuité divisant le volume V en deux parties a et b et $\bar{q}_1(u_1, v_1, w_1)$ et $\bar{q}_2(u_2, v_2, w_2)$ les valeurs de $\bar{q}(u, v, w)$ de part et d'autre de la surface de discontinuité, \bar{q}_1 étant les valeurs du côté du volume a (côté 1) et \bar{q}_2 les valeurs du côté du volume b (côté 2). Désignons par $P_3, Q_3, R_3, \Phi'_3, \Phi''_3, \Phi'''_3$ ce que devient $P_2, Q_2, R_2, \Phi'_2, \Phi''_2, \Phi'''_2$ respectivement en intégrant sur la surface de discontinuité Σ au lieu sur la surface S , en remplaçant u, v, w par $u_2 - u_1, v_2 - v_1, w_2 - w_1$ respectivement et α', β', γ' par les cosinus directeurs des normales aux points $d\sigma$ de Σ qui vont du côté 1 au côté 2.

En appliquant les formules 2 (h) aux volumes a et b respectivement nous obtenons en supposant le point $M(x, y, z)$ dans a

$$4 \pi \nu u(x, y, z) = \frac{\partial \Phi'_a}{\partial x} + \frac{\partial R_a}{\partial y} - \nu \frac{\partial Q_a}{\partial z}, \quad \dots$$

$$0 = \frac{\partial \Phi'_b}{\partial x} + \frac{\partial R_b}{\partial y} - \nu \frac{\partial Q_b}{\partial z}, \quad \dots$$

en désignant par les index a et b les valeurs de P, Q, R, Φ', \dots correspondantes aux volumes a et b respectivement. La surface Σ est commune pour les deux volumes a et b . Il vient donc en ajoutant

$$(i) \quad 4 \pi \nu u(x, y, z) = \frac{\partial(\Phi'_a + \Phi'_b)}{\partial x} + \frac{\partial(R_a + R_b)}{\partial y} - \nu \frac{\partial(Q_a + Q_b)}{\partial z}, \quad \dots$$

$P, Q, R, \Phi', \Phi'', \Phi'''$ étant donnés par les formules 2 (a) et (e). Les formules 2 (i) ont lieu quel que soit le nombre de surfaces de discontinuité Σ . Il importe seulement dans les applications de prendre toujours les cosinus directeurs de la normale à chaque point $d\sigma$ de Σ qui va du côté 1 ou côté 2 et désigner par \bar{q}_1 les valeurs de \bar{q} au côté 1 et par \bar{q}_2 les valeurs au côté 2. Les termes complémentaires sont nuls si on a $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$ sur les surfaces de discontinuité Σ .

Les formules 2 (h) sont importantes dans plusieurs applications.

1⁰. Pour $\nu = -1$ nous avons les formules donnant les déformations infiniment petites en chaque point $M(x, y, z)$ par les valeurs qui prennent dans le volume V les six fonctions caractéristiques¹

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

et les déformations des éléments de la surface S .

2⁰. Pour $\nu = 1$ nous avons les formules donnant les valeurs d'un vecteur $\bar{q}(u, v, w)$ en fonction des tourbillons et des divergences du vecteur q dans le volume V et les valeurs de \bar{q} sur la surface limite S . C'est ce cas seulement que nous allons traiter ici. Nous allons revenir au cas 1⁰ dans un autre travail. Pour $\nu = 1$ nous avons $\Phi' - \Phi'' = \Phi''' - \Phi$. Dans ce cas les formules 2 (h) s'écrivent avec les notations vectorielles

$$(k) \quad \left. \begin{matrix} 4 \pi \bar{q} \\ 0 \end{matrix} \right\} = \text{grad } \Phi + \text{curl } \bar{A}$$

¹ PAUL APPELL, loc. cit. p. 509.

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2, & \Phi_1 &= - \int_V \operatorname{div} \bar{q}' \frac{d\tau}{r}, & \Phi_2 &= - \int_S q'_n \frac{d\sigma}{r} \\ A &= A_1 + \bar{A}_2, & \bar{A}_1 &= \int_V \operatorname{curl} \bar{q}' \frac{d\tau}{r}, & \bar{A}_2 &= 2 \int_S \bar{H}' \frac{d\sigma}{r}\end{aligned}$$

A_1 étant un vecteur de composantes P_1, Q_1, R_1 et \bar{A}_2 un vecteur de composantes P_2, Q_2, R_2 . Les vecteurs $2\bar{H}$ et $2\operatorname{curl} \bar{q}$ ont pour composantes respectivement

$$\begin{aligned}2E &= w\beta - v\gamma, & 2F &= u\gamma - w\alpha, & 2G &= v\alpha - u\beta \\ 2\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, & 2\eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, & 2\zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale intérieure à un point de S . Dans les intégrales triples et doubles toutes les quantités relatives au point $d\tau$ de coordonnées x', y', z' et au point $d\sigma$ de S sont indiquées par les lettres accentuées. Nous désignons par $q'_n = u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma'$ la projection du vecteur \bar{q} au point $d\sigma$ sur la normale intérieure au même point. Le vecteur $\bar{H}(E, F, G)$ est à chaque point de S tangent à cette surface. En introduisant pour séparer les intégrales triples et doubles les notations

$$\begin{aligned}(l) \quad 4\pi \bar{f}_1 &= \operatorname{grad} \Phi_1 + \operatorname{curl} \bar{A}_1 \\ 4\pi \bar{f}_2 &= \operatorname{grad} \Phi_2 + \operatorname{curl} \bar{A}_2\end{aligned}$$

la formule 2 (k) devient

$$(m) \quad \left. \begin{matrix} q \\ 0 \end{matrix} \right\} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2$$

Nous allons interpréter les formules dans le cas $r=1$. On appelle ligne-tourbillon une ligne qui a pour tangente en chaque point le vecteur $\bar{\omega}$ de composantes ξ, η, ζ . La surface engendrée par une ligne-tourbillon qui se déplace le long d'une courbe fermée est un tube-tourbillon. Si on désigne par $d\sigma$ la section droite d'un tube-tourbillon infiniment déliée et par ω la grandeur de $\bar{\omega}$ l'expression

$$i_1 = 2\omega d\sigma$$

s'appelle l'intensité du tube; elle est constante le long du tube-tourbillon infiniment délié car le vecteur $\bar{\omega}$ est solénoïdal¹. Le volume Γ est donc

¹ PAUL APPELL, loc. cit. p. 397, 399.

composé de tube-tourbillons qui se ferment à l'intérieur ou s'étendent jusqu'à la surface S . Imaginons que chaque tube-tourbillon soit remplacé par un conducteur linéaire parcouru par un courant électrique d'intensité i_1 mais circulant en sens contraire du sens indiqué par le vecteur tangent ω .

Imaginons en outre une masse magnétique ayant pour densité $-\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} q$ aux divers points de V . En choisissant convenablement les unités la force totale¹ sur un pôle magnétique $+1$ placé au point $M(x, y, z)$ sera \bar{f}_1 .

Désignons par le nom: *lignes de courant superficielles* des lignes l sur S ayant le vecteur \bar{H} pour tangent en chaque point et *raie de courant* la partie de S entre deux lignes l infiniment voisines. Soit ds la largeur du raie à un point et appelons l'intensité i_2 au point considéré le produit

$$i_2 = 2 H ds$$

Imaginons les raies parcourues par des courants électriques superficiels d'intensité en chaque point de S égale à i_2 mais circulant en sens contraire du sens indiqué par le vecteur tangent \bar{H} . Le vecteur \bar{f}_2 est alors identique à la force magnétique sur un pôle magnétique $+1$ au point $M(x, y, z)$ due à ces courants et à une distribution magnétique superficielle d'intensité $-\frac{1}{4\pi} q_n$. La somme $\bar{f}_1 + \bar{f}_2$ est égale à nulle à l'extérieur de V .

3. Sur les courants intérieures et superficielles. — De la formule 2 (k) il vient

$$\left. \begin{array}{l} 4\pi \operatorname{curl} \bar{q} \\ 0 \end{array} \right\} = -\mathcal{A}\bar{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A}$$

L'expression $-\mathcal{A}\bar{A}$ est égale à $4\pi \operatorname{curl} \bar{q}$ ou à zéro suivant que le point $M(x, y, z)$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de V , d'où

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{A} = \text{constante}$$

à l'intérieur et à l'extérieur de V . Puisque $\operatorname{div} \bar{A}$ est nulle à l'infini nous avons

$$(a) \quad \operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

¹ PAUL APPELL, loc. cit. p. 423, 451.

à l'intérieur et à l'extérieur de V , car le saut brusque de cette expression en traversant la surface S sera proportionnel à¹

$$\alpha(w\beta - v\gamma) + \beta(u\gamma - w\alpha) + \gamma(v\alpha - u\beta) = 0$$

Mais nous avons² parce que le vecteur $\bar{\omega}$ est solénoïdal

$$(b) \quad \bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2, \quad \text{div } \bar{A}_1 = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} - \int_S \omega'_n \frac{d\sigma}{r},$$

ω'_n désignant la projection du vecteur $\bar{\omega}$ au point $d\sigma$ de S sur la normale intérieure. S'il y a dans V des surfaces de tourbillon qui sont des surfaces de discontinuité pour les dérivées partielles les intégrales de surface correspondantes

$$\int_S \omega'_n \frac{d\sigma}{r}$$

sont nulles car sur ces surfaces nous avons $\omega_n = 0$.² En comparant avec 3 (a) il vient

$$(c) \quad \text{div } \bar{A}_2 = \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z} = - \int_S \omega'_n \frac{d\sigma}{r}$$

Si la surface S est une surface de tourbillon (ou si le vecteur \bar{q} dérive d'un potentiel) nous avons à chaque point $\omega'_n = 0$, d'où $\text{div } \bar{A}_2 = 0$. Celà posé. De la seconde des formules 2 (l) il vient

$$(d) \quad 4\pi \text{curl } f_2 = -\Delta \bar{A}_2 + \text{grad div } \bar{A}_2 = \text{grad div } \bar{A}_2$$

Donc: Si la surface S est une surface de tourbillon (ou si le vecteur \bar{q} dérive d'un potentiel) l'action des courants superficielles dérive d'un potentiel. Nous avons dans le même cas: L'action des courants intérieures sur un point à l'extérieur de V dérive d'un potentiel. En effet. D'après 2 (m) le vecteur f_1 est, à l'extérieur de V , égal et directement opposé du vecteur \bar{f}_2 qui dérive d'un potentiel.

¹ H. POINCARÉ: Théorie du potentiel newtonien, p. 117.

² PAUL APPELL, loc. cit. p. 419.

Inversement: Si l'action des courants intérieures sur un point à l'extérieur de V dérive d'un potentiel la surface S est une surface de tourbillon. En effet. De 3 (d) et 2 (m) nous avons d'après l'hypothèse

$$\text{grad div } \bar{A}_2 = 0, \quad \text{div } \bar{A}_2 = - \int_S \omega_n' \frac{d\sigma}{r} = 0$$

à l'extérieur de V car $\text{div } \bar{A}_2$ est nulle à l'infini. La même quantité est donc aussi nulle sur S elle est en outre harmonique à l'intérieur de S ; elle est par conséquent nulle à l'intérieur de S , d'où $\omega_n = 0$ sur S q. e. d.

Les deux vecteurs \bar{q} et \bar{f}_1 ont à l'intérieur de V les mêmes divergences et les mêmes tourbillons si la surface S est une surface de tourbillon. En effet. Nous obtenons parce que $\text{div } \bar{A}_1 = 0$

$$4\pi \text{curl } \bar{f}_1 = -\Delta \bar{A}_1 + \text{grad div } \bar{A}_1 = -\Delta \bar{A}_1 = \begin{cases} 4\pi \text{curl } \bar{q} \\ 0 \end{cases}$$

suivant que le point est à l'intérieur ou à l'extérieur de V . Nous avons aussi

$$4\pi \text{div } \bar{q} = \Delta \Phi = \Delta \Phi_1, \quad 4\pi \text{div } \bar{f}_1 = \Delta \Phi_1$$

Désignons par \bar{f}_2^0 l'action des courants superficielles et la densité superficielle correspondantes au vecteur \bar{f}_1 . En appliquant la formule 2(k) au vecteur \bar{f}_1 nous obtenons parce que ce vecteur et le vecteur \bar{q} ont les mêmes tourbillons et les mêmes divergences dans V si S est une surface de tourbillon

$$\left. \begin{matrix} 4\pi \bar{f}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 4\pi \bar{f}_1 + 4\pi \bar{f}_2^0$$

d'où

$$\bar{f}_2^0 = \begin{cases} 0 \\ -\bar{f}_1 \end{cases}$$

suivant que le point considéré est à l'intérieur ou à l'extérieur de V .

4. Equation intégrale pour déterminer les valeurs de q_n sur S .

— La formule 2 (k) fait connaître la valeur du vecteur \bar{q} en un point quelconque $M(x, y, z)$ à l'intérieur de V en connaissant les tourbillons et les divergences de \bar{q} à l'intérieur de V et les valeurs de \bar{q} sur S . Ce sont

des données surabondantes; il suffit¹ de connaître sur S seulement les valeurs de q_n ou de \bar{H} . Les quantités q_n et \bar{H} sont donc sur la surface S liées les unes aux autres; nous allons trouver certaines équations intégrales linéaires qui servent à déterminer une de ces quantités en connaissant l'autre. Proposons nous d'abord de déduire les valeurs de q_n en connaissant \bar{H} sur S .

Supposons d'abord $\bar{H} = 0$ sur S . Nous avons alors en posant dans les formules préliminaires 2 (f) $\nu = 1$: $P_2 = Q_2 = R_2 = 0$. Soit $t(x, y, z)$ un point de la surface S et supposons qu'il existe à chaque point de S un plan tangent déterminé. Désignons d'une manière générale par $\varphi(t)$ une fonction φ des coordonnées d'un point $t(x, y, z)$; nous avons au point t

$$q_n(t) = u(t)\alpha(t) + v(t)\beta(t) + w(t)\gamma(t)$$

$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ étant les cosinus directeurs de la normale intérieure au point t .

Posons dans les formules 2 (f) $z = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

et appliquons les formules au volume V_1 compris dans le volume V et

¹ Soient \bar{q} et \bar{q}_1 deux vecteurs ayant à l'intérieur de V les mêmes tourbillons et les mêmes divergences. Nous avons alors

$$q = \bar{q}_1 + \text{grad } \varphi$$

φ étant une fonction harmonique à l'intérieur de V . Si les deux vecteurs sont en outre à chaque point de S les mêmes composantes sur la normale intérieure nous devons avoir

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma = 0 \quad (\text{sur } S)$$

La fonction harmonique φ est donc constante dans V (PAUL APPELL, loc. cit. pag. 90) d'où $\bar{q} = \bar{q}_1$. Au contraire. Si les deux vecteurs ont sur S les mêmes vecteurs \bar{H} nous devons avoir

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda \quad (\text{sur } S)$$

λ étant une fonction de x, y, z . En appliquant la formule 2 (k) au vecteur $\bar{q} - \bar{q}_1 = \text{grad } \varphi$ nous obtenons en vertu de la condition précédente

$$\bar{A} = 0, \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = - \int_S \lambda' \frac{d\sigma}{r}$$

λ' étant la valeur de λ au point $d\sigma$ de S . Donc

$$4\pi \text{ grad } \varphi \Big|_0 = \text{grad } \phi_2$$

suivant que le point considéré est à l'intérieur ou à l'extérieur de V . La fonction ϕ_2 est donc nulle à l'extérieur de V , car elle est nulle à l'infini. Elle est donc aussi nulle sur la surface S . A l'intérieur de S elle est harmonique; elle est donc aussi nulle au volume V (voir PAUL APPELL, loc. cit. p. 86).

extérieur à une petite sphère Σ autour de t . Cette sphère partage la surface S en deux parties S_1 et s_1 , la partie s_1 étant à l'intérieur de la sphère. La surface limitant le volume V_1 est donc composée de S_1 et de la partie Σ_1 de la sphère Σ qui est à l'intérieur du volume V . Des formules 2(f) où $r=1$ il vient en multipliant par $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ respectivement et en ajoutant

$$(a) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \alpha(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \beta(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \gamma(t) + D(t) = 0$$

en écrivant pour abrégé

$$(b) \quad D(t) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \alpha(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \beta(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \gamma(t) + \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) \alpha(t) + \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) \beta(t) + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \gamma(t)$$

car nous avons d'après l'hypothèse $A_2 = 0$. Dans la formule 4 (a) nous avons une intégrale de surface prise sur Σ_1 et une intégrale prise sur S_1 . Considérons d'abord la première. En opérant comme au § 2, formule 2 (g), cette intégrale devient

$$-\frac{\alpha(t)}{r^2} \int_{\Sigma_1} u' d\sigma - \frac{\beta(t)}{r^2} \int_{\Sigma_1} v' d\sigma - \frac{\gamma(t)}{r^2} \int_{\Sigma_1} w' d\sigma$$

L'angle solide sans lequel du point t on voit la surface Σ_1 tend vers 2π lorsque le rayon r de la sphère tend vers zéro; la limite de l'intégrale précédente sera donc lorsque r tend vers zéro égale à $-2\pi q_n(t)$. L'intégrale de surface

$$\int_{S_1} q'_n \left[\frac{x-x'}{r^3} \alpha(t) + \frac{y-y'}{r^3} \beta(t) + \frac{z-z'}{r^3} \gamma(t) \right] d\sigma$$

prise sur la surface S_1 , a un sens lorsque le rayon de la sphère Σ tend vers zéro. En effet. Désignons par ψ l'angle entre la normale intérieure au point t et la droite joignant ce point avec le point $\sigma(x', y', z')$ dans $d\sigma$. Il vient

$$(c) \quad -\cos \psi = \frac{x-x'}{r} \alpha(t) + \frac{y-y'}{r} \beta(t) + \frac{z-z'}{r} \gamma(t)$$

Lorsque σ tend vers t cette quantité tend vers zéro; nous avons donc en tout point σ de S

$$\left| q'_n \frac{\cos \psi}{r^2} \right| < \frac{K}{r^m}, \quad m < 2$$

K étant une quantité positive. L'intégrale de surface considéré a donc un sens lorsque S_1 tend vers S .¹ La formule 4 (a) devient donc lorsque le rayon de la sphère tend vers zéro

$$(d) \quad 2 \pi q_n(t) = D(t) - \int_S q_n(\sigma) \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma$$

$D(t)$ étant donné de 4 (b) lorsque V_1 tend vers V . Nous avons donc obtenus pour déterminer les valeurs de q_n sur S une équation intégrale linéaire de la forme qu'on rencontre dans le problème de Neumann. Il existe donc un système de solutions de l'équation 4 (d) et un seul.

L'équation intégrale 4 (d) n'est développée qu'en supposant $\bar{H} = 0$ sur S . Traitons maintenant le cas général. Soit $\bar{p}(\lambda, \mu, \nu)$ un vecteur satisfaisant aux conditions

$$(f) \quad \nu \beta - \mu \gamma = 2 E, \quad \lambda \gamma - \nu \alpha = 2 F, \quad \mu \alpha - \lambda \beta = 2 G \quad (\text{sur } S)$$

E, F, G étant les composantes connues du vecteur \bar{H} . Il existe évidemment une infinité de vecteurs \bar{p} satisfaisant à ces conditions. Nous choisissons un de ces vecteurs et considérons le vecteur

$$\bar{m} = q - \bar{p}$$

Les tourbillons et les divergences de ce vecteur sont connues dans V . Le vecteur \bar{H} déduit de ce vecteur est nul sur S en vertu de 4 (f). Nous obtenons donc pour déterminer les valeurs inconnues $m_n(t)$ des projections de \bar{m} sur la normale intérieure à chaque point t de S une équation intégrale de la forme 4 (d). Une fois $m_n(t)$ trouvé nous avons

$$q_n(t) = m_n(t) + p_n(t)$$

$p_n(t)$ étant la projection de \bar{p} au point t sur la normale intérieure. Si nous avons choisis un autre vecteur \bar{p} satisfaisant à 4 (f) nous avons pourtant obtenus les mêmes valeurs de q_n (voir la note au commencement de ce paragraphe).

¹ H. POINCARÉ: Théorie du potentiel newtonien, Paris 1899, p. 64.

5. Les équations intégrales définissant les valeurs de \overline{H} . — Supposons qu'on connaisse à l'intérieur de V les tourbillons et les divergences du vecteur \overline{q} et sur la surface S les valeurs de q_n . Proposons nous des trouver les valeurs de \overline{H} sur S . On peut ramener ce problème au problème de Neumann¹. Nous préférons de déterminer les composantes E, F, G directement par un système de trois équations intégrales linéaires avec trois inconnues, car ces équations sont importantes dans la théorie des courants superficielles que nous allons développer au chapitre suivant.

Supposons d'abord $q_n = 0$ sur S . Les valeurs de E, F, G au point $t(x, y, z)$ de S sont

$$\begin{aligned} 2 E(t) &= w(t) \beta(t) - v(t) \gamma(t), & 2 F(t) &= u(t) \gamma(t) - w(t) \alpha(t), \\ 2 G(t) &= v(t) \alpha(t) - u(t) \beta(t) \end{aligned}$$

¹ On peut procéder de la manière suivante. Soit x_0, y_0, z_0 un point dans V et p la fonction $2 \int_{z_0}^z \xi(x, y, z) dz$. Le vecteur $L(a, b, c)$ déterminé par

$$\begin{aligned} a &= u + 2 \int_{y_0}^y \zeta(x, y, z) dy + \int_{y_0}^y \frac{\partial p}{\partial x} dy, & b &= v + 2 \int_{z_0}^z \xi(x, y, z) dz, \\ c &= w + 2 \int_{x_0}^x \eta(x, y_0, z) dx \end{aligned}$$

dérive d'un potentiel. En effet. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} &= 2 \xi(x, y, z) - 2 \xi(x, y, z) \equiv 0 \\ \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} &= 2 \eta(x, y, z) + 2 \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dy - 2 \eta(x, y_0, z) \equiv 0 \\ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} &= 2 \zeta(x, y, z) + 2 \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dz - 2 \zeta(x, y, z) \equiv 0 \end{aligned}$$

Nous connaissons les divergences et les tourbillons de ce vecteur. Le vecteur

$$\overline{N} \equiv \overline{L} + \text{grad} \frac{1}{4\pi} \int_V \text{div } \overline{L}' \frac{d\tau}{r}$$

dérive d'un potentiel φ qui est fonction harmonique à l'intérieur de V . Soient N_n les valeurs sur S des projections de N sur la normale intérieure. Nous avons

$$N_n = \frac{d\varphi}{dn} = \text{quantité connue sur } S$$

car les valeurs de q_n sont données sur S . Pour trouver la fonction φ il faut donc résoudre le problème de Neumann.

En multipliant la troisième des formules 2 (f), appliquées au volume V_1 (§ 4), par $\beta(t)$ et la seconde par $-\gamma(t)$ et en ajoutant il vient parce que $\Phi_2 = 0$ d'après l'hypothèse

$$(a) \quad \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) \beta(t) - \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) \gamma(t) + 2 A(t) = 0$$

en écrivant pour abrégé

$$(b) \quad 2 A(t) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \beta(t) - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) \gamma(t)$$

Posons $\kappa' = \frac{1}{r}$ et calculons dans la formule 5 (a) l'intégrale de surface étendue à la partie Σ_1 de Σ (§ 4). La limite de cette intégrale lorsque le rayon de la sphère Σ tend vers zéro est égale à

$$- 2 \pi [w(t) \beta(t) - v(t) \gamma(t)] = - 4 \pi E(t)$$

L'intégrale de surface dans 5 (a) prise sur la surface S_1 (§ 4) a un sens lorsque le rayon de la sphère tend vers zéro. En effet. Cette intégrale sera

$$- \int_{S_1} \left[\left(F' \frac{x - x'}{r^3} - E' \frac{y - y'}{r^3} \right) \beta(t) - \left(E' \frac{z - z'}{r^3} - G' \frac{x - x'}{r^3} \right) \gamma(t) \right] d\sigma$$

En introduisant dans cette intégrale l'angle ψ définie par 4 (c) nous obtenons

$$- \int_{S_1} E' \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma - \int_{S_1} [E' \alpha(t) + F' \beta(t) + G' \gamma(t)] \frac{x - x'}{r^3} d\sigma$$

ou

$$(c) \quad - \int_{S_1} E' \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma - \int_{S_1} [E'(\alpha(t) - \alpha') + F'(\beta(t) - \beta') + G'(\gamma(t) - \gamma')] \frac{x - x'}{r^3} d\sigma$$

parce que le vecteur \bar{H} est tangent à la surface S à chaque point. Supposons la surface S telle que pour une valeur positive du nombre m on a

$$(d) \quad \alpha(t) - \alpha' = r^m a, \quad \beta(t) - \beta' = r^m b, \quad \gamma(t) - \gamma' = r^m c$$

a, b, c restant finis lorsque la distance r entre les points t et σ (x', y', z') tend vers zéro. La valeur absolue des quantités sous les deux signes \int_{S_1}

est donc en tout point de S inférieure à $K \cdot r^{-m'}$, K et m' étant positifs et $m' < 2$. L'intégrale de surface précédente a donc un sens lorsque S_1 tend vers S .¹ La formule 5 (a) devient donc

$$(e) \quad 4 \pi E(t) = 2 A(t) + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) \beta(t) - \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) \gamma(t)$$

Nous obtenons de même manière les formules analogues

$$(f) \quad \begin{aligned} 4 \pi F(t) &= 2 B(t) + \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) \gamma(t) - \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) \alpha(t) \\ 4 \pi G(t) &= 2 C(t) + \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) \alpha(t) - \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) \beta(t) \end{aligned}$$

en désignant par $B(t)$ et $C(t)$ les quantités obtenues de $A(t)$ [5 (b)] en permutant x, y, z ; $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$; P_1, Q_1, R_1 . On peut écrire les équations intégrales 5 (e) et (f) de la manière suivante:

$$\begin{aligned} 2 \pi E(t) &= A(t) - \int_S E(\sigma) \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma \\ &\quad - \int_S [E(\sigma) \alpha(t) + F(\sigma) \beta(t) + G(\sigma) \gamma(t)] \frac{x - x'}{r^3} d\sigma \\ 2 \pi F(t) &= B(t) - \int_S F(\sigma) \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma \\ (g) \quad &\quad - \int_S [E(\sigma) \alpha(t) + F(\sigma) \beta(t) + G(\sigma) \gamma(t)] \frac{y - y'}{r^3} d\sigma \\ 2 \pi G(t) &= C(t) - \int_S G(\sigma) \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma \\ &\quad - \int_S [E(\sigma) \alpha(t) + F(\sigma) \beta(t) + G(\sigma) \gamma(t)] \frac{z - z'}{r^3} d\sigma \end{aligned}$$

En posant dans ces équations $A(t) = B(t) = C(t) = 0$ nous obtenons un système d'équations intégrales homogènes qui ne peut admettre que la solution banale $E = F = G = 0$.

¹ H. POINCARÉ, loc. cit. p. 64.

En effet. Désignons par i et e deux points infiniment voisins de t , le point i étant à l'intérieur et le point e à l'extérieur et par λ, μ, ν les composantes du vecteur $\text{curl } \bar{A}_2$. Dans le cas $A(t) = B(t) = C(t) = 0$ nous avons de 2 (k)

$$\begin{aligned} h) \quad & 8\pi E(i) = \nu(i)\beta(t) - \mu(i)\gamma(t), \quad 8\pi F(i) = \lambda(i)\gamma(t) - \nu(i)\alpha(t), \quad \dots \\ & 0 = \nu(e)\beta(t) - \mu(e)\gamma(t), \quad 0 = \lambda(e)\gamma(t) - \nu(e)\alpha(t), \quad \dots \end{aligned}$$

car dans le cas d'un point extérieur et intérieur la formule 2 (k) est valable. Le vecteur $\text{curl } \bar{A}_2$ est donc perpendiculaire à S à chaque point extérieur. Soit S_1 une surface extérieure à S et infiniment voisine de S . Soit a une aire de S_1 limitée par une courbe fermée c . D'après le théorème de Stokes¹ nous avons

$$\int_c \lambda dx + \mu dy + \nu dz = \int_a A_n d\sigma = \int_a \frac{d \operatorname{div} \bar{A}_2}{dn} d\sigma$$

A_n étant la composante de

$$A = \text{curl curl } \bar{A}_2 = -\Delta \bar{A}_2 + \text{grad div } \bar{A}_2 = \text{grad div } \bar{A}_2$$

sur la normale n à chaque point $d\sigma$ de l'aire a . Lorsque S_1 est infiniment voisine de S l'intégrale curviligne est nulle car le vecteur $\text{curl } \bar{A}_2$ est perpendiculaire à S à chaque point extérieur et continu ainsi que les dérivées partielles à l'extérieur de S . La courbe c étant quelconque nous avons $A_n = 0$ sur S_1 . La fonction $\operatorname{div} \bar{A}_2$ est harmonique à l'extérieur de V , nulle à l'infini et a ses dérivées en suivant les normales à S nulles sur S_1 . Elle est donc nulle à l'extérieur de V . Elle est aussi harmonique dans V et nulle sur le côté intérieur de la surface S car le saut brusque³ de $\operatorname{div} \bar{A}_2$ en traversant S est proportionnel à $E\alpha + F\beta + G\gamma = 0$; $\operatorname{div} \bar{A}_2$ est donc aussi nul à l'intérieur de V .² Le vecteur $\text{curl } \bar{A}_2$ dérive donc d'une fonction harmonique φ . Désignons par φ_i les valeurs de φ à l'intérieur et par φ_e les valeurs de φ à l'extérieur de V . La dérivée suivant la normale a un point de S

$$\frac{d\varphi_i}{dn} = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

est continue en traversant S , car le saut brusque³ est proportionnel à

¹ PAUL APPELL, loc. cit. p. 9.

² PAUL APPELL, loc. cit. p. 86.

³ H. POINCARÉ, loc. cit. p. 117.

$(G\beta - F\gamma)\alpha + (E\gamma - G\alpha)\beta + (F\alpha - E\beta)\gamma = 0$. La fonction φ peut donc être exprimée comme un potentiel de double couche. Sur le côté extérieur de S nous devons avoir $\varphi_e = \text{constante}$, car en vertu de 5 (h) nous avons

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \varphi_e}{\partial z}$$

sur le côté extérieur de S . Désignons par k cette constante et par V_1 le volume entre S et une sphère S_1 de centre à l'origine et de rayon R_0 très grand tel que la surface S est à l'intérieur de S_1 . Nous avons alors¹

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \left[\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau &= - \int_S \varphi_e \frac{d\varphi_e}{dn} d\sigma - \int_{S_1} \varphi_e \frac{d\varphi_e}{dn} d\sigma = \\ &= -k \int_S \frac{d\varphi_e}{dn} d\sigma - \int_{S_1} \varphi_e \frac{d\varphi_e}{dn} d\sigma \end{aligned}$$

$\frac{d\varphi_e}{dn}$ étant la dérivée en suivant la normale au point $d\sigma$ vers l'intérieur du volume V_1 , et²

$$\int_S \frac{d\varphi_e}{dn} d\sigma + \int_{S_1} \frac{d\varphi_e}{dn} d\sigma = 0$$

Mais φ_e est le potentiel d'une double couche étalée sur S . Les produits $R_0^2 \varphi_e$, $R_0^3 \frac{\partial \varphi_e}{\partial x}$, $R_0^3 \frac{\partial \varphi_e}{\partial y}$, $R_0^3 \frac{\partial \varphi_e}{\partial z}$ restent donc finis quand x, y, z deviennent infinis, R_0 ayant la valeur $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Les intégrales

$$\int_{S_1} \frac{d\varphi_e}{dn} d\sigma, \quad \int_{S_1} \varphi_e \frac{d\varphi_e}{dn} d\sigma$$

tendent donc vers zéro quand R_0 tend vers infini. Nous obtenons donc des deux formules précédentes quand R_0 devient infini

$$\int_{V_\infty} \left[\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0$$

l'intégrale triple étant étendue au volume infini extérieur à S . Il faut donc que

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} = 0 \quad (\text{dans } V_\infty)$$

¹ PAUL APPELL, loc. cit. p. 90 et p. 7.

² PAUL APPELL, loc. cit. p. 84.

q_e est donc constante dans V_x . La dérivée normale est donc aussi nulle sur le côté extérieur de S et par conséquent sur le côté intérieur de S car le saut brusque de cette quantité est nul en traversant S . La fonction q_i est donc constant à l'intérieur de V .¹ Mais cela n'est possible que dans le cas où $E = F = G = 0$ sur S [voir 5 (h)] q. e. d.

D'autre part. On peut écrire

$$2\pi E(t) = A(t) - \int_S E(\sigma) \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma \\ - \int_S [E(\sigma)(\alpha(t) - \alpha(\sigma)) + F(\sigma)(\beta(t) - \beta(\sigma)) + G(\sigma)(\gamma(t) - \gamma(\sigma))] \frac{x - x'}{r^3} d\sigma$$

- - - - -

car $E(\sigma)\alpha(\sigma) + F(\sigma)\beta(\sigma) + G(\sigma)\gamma(\sigma) = 0$ sur S . Les coefficients de $E(\sigma)$, $F(\sigma)$, $G(\sigma)$ deviennent donc infinies comme $\frac{1}{r^{m_1}}$ au point t , m_1 étant positif et plus petit que 2 [voir l'hypothèse 5 (d)]. D'autre part. Nous avons démontrés: Les équations intégrales homogènes obtenues en posant $A(t) = B(t) = C(t) = 0$ ont seulement la solution $E = F = G = 0$. Nous pouvons donc conclure d'après une proposition bien connue de M. Fredholm: *Le système d'équations intégrales 5 (g) admet un système de solutions et un seul.*

Les équations intégrales ne sont valables que dans le cas où $q_n = 0$ sur S . Considérons maintenant le cas général. Soit $\bar{p}(\lambda, \mu, \nu)$ un vecteur tel que

$$p_n = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = q_n \quad (\text{sur } S)$$

Il est évidemment possible de trouver une infinité de vecteurs satisfaisant à cette condition. Cela posé; considérons le vecteur $\bar{m} = \bar{q} - \bar{p}$. Les divergences et les tourbillons de ce vecteur sont connues à l'intérieur de V et les projections sur les normales sont nulles à chaque point de S . Les équations fonctionnelles précédentes sont donc applicables au vecteur \bar{m} .

Dans le cas où la surface S est composée de plusieurs surfaces fermées il faut procéder de la manière suivante: Pour fixer les idées supposons que la surface S limitant le volume V soit composée de deux surfaces fermées distinctes s_1 et s_2 , la surface s_2 étant à l'intérieur de s_1 . Sur ces deux surfaces nous connaissons les valeurs de q_n et à l'intérieur de V les

¹ PAUL APPELL, loc. cit. p. 90.

tourbillons et les divergences du vecteur \bar{q} . Soit \bar{p}_i un vecteur tel que le vecteur $\bar{m}_i = \bar{q} - \bar{p}_i$ a ces projections sur les normales à chaque point de s_i ($i = 1, 2$) égales à zéro. Les deux vecteurs \bar{m}_1 et \bar{m}_2 sont, en général, différents. Choisissons dans V une surface fermée Σ entourant la surface s_2 et considérons dans V un vecteur \bar{m} qui dans l'espace entre s_1 et Σ se confond avec le vecteur \bar{m}_1 entre Σ et s_2 avec le vecteur \bar{m}_2 . La surface Σ devient une surface de discontinuité pour ce vecteur \bar{m} . Nous connaissons la différence entre les valeurs de \bar{m}_1 et \bar{m}_2 de part et d'autre de la surface Σ car le vecteur \bar{q} est continu dans V et les vecteurs \bar{p}_1 et \bar{p}_2 connus. Il faut donc en appliquant l'équation 5 (a) au vecteur \bar{m} , une fois pour un point de s_1 et une autre fois pour un point de s_2 , tenir compte des termes complémentaires correspondants à la surface de discontinuité Σ . Avec les deux surfaces s_1 et s_2 nous obtenons de cette manière six équations intégrales linéaires avec six inconnues savoir les trois composantes du vecteur H déduit de \bar{m} sur s_1 et s_2 .

II. Sur des courants superficiels.

6. **Sur l'action des courants superficiels.** — Soit S une surface fermée sur laquelle il existe des lignes l ayant un vecteur \bar{H} de composantes E, F, G pour tangent en chaque point. Désignons par le nom *lignes de courant superficiels* ces lignes l et par *raie de courant* la partie de la surface entre deux lignes de courant infiniment voisines (§ 2). Désignons par ds la largeur d'une raie de courant au point t et imaginons les raies parcourues par des courants électriques superficiels d'intensité en chaque point de S égale à

$$(a) \quad i = 2 H ds$$

(H étant la largeur du vecteur H au point t) mais circulant en sens contraire du sens indiqué par le vecteur \bar{H} au point t . En choisissant convenablement les unités l'action de ces courants sur un pôle magnétique $+1$ placé au point $M(x, y, z)$ sera (§ 2)

$$(b) \quad 4 \pi f(M) = \text{curl } \bar{A}_2$$

\bar{A}_2 étant un vecteur de composantes

$$P_2 = \int_S 2 E(\sigma) \frac{d\sigma}{r}, \quad Q_2 = \int_S 2 F(\sigma) \frac{d\sigma}{r}, \quad R_2 = \int_S 2 G(\sigma) \frac{d\sigma}{r}$$

r étant la distance du point M au point $\sigma(x', y', z')$ dans l'élément de surface $d\sigma$ sur S . Soient $\lambda(M)$, $\mu(M)$ et $\nu(M)$ les composantes de $\bar{f}(M)$. Sur la normale au point t nous marquons deux points i et e infiniment voisins de t ; le point i est à l'intérieur et le point e à l'extérieur de S . Nous obtenons alors de 6 (b)

$$(c) \quad 4\pi [\nu(i)\beta - \mu(i)\gamma] = \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\beta - \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x}\right)\gamma$$

x, y, z étant les coordonnées du point i . Les α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale intérieure au point t . Le saut brusque de l'expression à droite sera en traversant la surface¹

$$-8\pi [(F\alpha - E\beta)\beta - (E\gamma - G\alpha)\gamma] = 8\pi E$$

car $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ et $E\alpha + F\beta + G\gamma = 0$. Nous obtenons donc

$$(d) \quad (\nu(i) - \nu(e))\beta - (\mu(i) - \mu(e))\gamma = 2E(t)$$

D'une manière analogue nous obtenons de 7 (b)

$$(e) \quad \begin{aligned} (\lambda(i) - \lambda(e))\gamma - (\nu(i) - \nu(e))\alpha &= 2F(t) \\ (\mu(i) - \mu(e))\alpha - (\lambda(i) - \lambda(e))\beta &= 2G(t) \end{aligned}$$

Le vecteur \bar{H} est donc au point t perpendiculaire au plan passant par la normale et le vecteur $\bar{f}(i) - \bar{f}(e)$. Ce vecteur est donc perpendiculaire à la ligne de courant l passant par t . D'autre part. Le saut brusque de $\lambda(i)\alpha + \mu(i)\beta + \nu(i)\gamma$ est nul en traversant la surface S . Le vecteur $\bar{f}(i) - \bar{f}(e)$ est donc au point t tangent à la surface S .

En comparant les formules 6 (c) et (d) il vient

$$8\pi E(t) = -4\pi (\nu(e)\beta - \mu(e)\gamma) + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\beta - \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x}\right)\alpha$$

L'intégrale de surface à un sens quand le point x, y, z est sur la surface S (§ 5) et subit un saut brusque égal à $4\pi E$ en allant du point i au point t de S ; nous avons donc

$$(f) \quad 4\pi E(t) = -4\pi (\nu(e)\beta - \mu(e)\gamma) + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\beta - \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x}\right)\gamma$$

¹ H. POINCARÉ, loc. cit. p. 117.

en désignant maintenant par x, y, z les coordonnées du point t de S . De même manière nous obtenons les formules analogues

$$\begin{aligned} 4\pi F(t) &= -4\pi(\lambda(e)\gamma - \nu(e)\alpha) + \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)\gamma - \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\alpha \\ (g) \quad 4\pi G(t) &= -4\pi(\mu(e)\alpha - \lambda(e)\beta) + \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x}\right)\alpha - \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)\beta \end{aligned}$$

Nous avons donc pour déterminer les courants sur S trois équations intégrales exactement de la forme 5 (e) et (f). Ces équations intégrales admettent un système de solutions et un seul. *Le vecteur \bar{H} définissant sur S les lignes de courant superficielles est donc déterminé d'une manière unique en connaissant sur le côté extérieur de S les forces magnétiques.*

Le vecteur \bar{H} étant déterminé par les équations intégrales 6 (f) et (g) nous avons les forces magnétiques correspondantes par la formule 6 (b). Les premiers termes à droite dans les formules 6 (f) et (g) sont les composantes d'un vecteur perpendiculaire au plan passant par la normale au point t et le vecteur $f(e)$ et de grandeur $f(e)\sin\theta$, θ étant l'angle entre la normale intérieure et la force $\bar{f}(e)$. *Il suffit donc pour déterminer les courants superficiels complètement de connaître à chaque point t de S la grandeur et la direction de la projection de $\bar{f}(e)$ sur le plan tangent au point t . Car la grandeur de cette projection est égale à $f(e)\sin\theta$.*

Les formules 6 (d), (e) et les équations intégrales 6 (f) et (g) sont encore valables dans le cas où la surface S n'est pas fermée. Mais dans ce cas il faut encore démontrer que les équations intégrales admettent un système de solutions. Dans le cas particulier où la surface S est une partie d'un plan nous choisissons ce plan pour plan des y et le point e au dessus du plan.

Nous avons alors (voir les équations 5 (g))

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1$$

$$\cos\psi = 0, \quad G = 0$$

d'où

$$4\pi E(t) = -\mu(e)$$

$$4\pi F(t) = \lambda(e)$$

Les courants sont donc déterminées en connaissant $\mu(e)$ et $\lambda(e)$.

7. **L'action des courants superficielles dérive d'un potentiel.** — Dans le cas où l'action $\bar{f}(M)$ dérive d'un potentiel $\varphi(M)$ nous avons en désignant par $\frac{d\varphi(i)}{dn}$ et $\frac{d\varphi(e)}{dn}$ les dérivées aux points i et e respectivement dans le sens de la normale intérieure au point t

$$(a) \quad \frac{d\varphi(i)}{dn} = \frac{d\varphi(e)}{dn} \quad (\text{sur } S)$$

car la composante normale est continue en traversant S . La fonction φ étant harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de S elle doit en vertu de 7 (a) avoir la forme d'un potentiel de double couche étalée sur S

$$(b) \quad 4\pi \varphi(M) = \int_S \mu(\sigma) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma$$

r étant la distance du point M au point σ et $\mu(\sigma)$ la densité de la double couche au point $\sigma(x', y', z')$ dans l'élément de surface $d\sigma$.

Désignons par T une tangente quelconque à la surface S au point t , par θ l'angle entre cette tangente et le vecteur \bar{H} au même point et par $\frac{d\mu(t)}{dT}$ la dérivée au point t de la densité $\mu(t)$ en suivant la tangente T .

Nous allons démontrer

$$(c) \quad \frac{d\mu(t)}{dT} = 2 H \sin \theta$$

[Le long d'une ligne de courant nous avons $\theta = 0$ ou π ; la densité μ est donc constante le long d'une ligne de courant.] En effet. Prenons l'origine des coordonnées au point t , l'axe des z dans la direction de la normale intérieure et l'axe des x le long du vecteur \bar{H} au point t . Nous avons alors au point t

$$E = H, \quad F = G = 0$$

Soient $A, B, 0$ les cosinus directeurs de la tangente T . Nous avons alors en vertu de 6 (b) et 7 (b)

$$4\pi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} A + \frac{\partial \varphi}{\partial y} B \right) = \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) A + \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) B$$

x, y, z étant les coordonnées du point intérieur i . Les dérivées tangentielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ font en franchissant la surface S des sauts brusques respective-

ment égaux à $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ ¹; il vient donc en calculant aussi les sauts brusques à droite ²

$$\frac{\partial u}{\partial x} A + \frac{\partial u}{\partial y} B = 2 H B$$

qui est la formule cherchée parceque $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$.

III. Le cas de deux variable. Application aux fonctions complexes et au mouvement d'un fluide parallèle à un plan fixe.

8. Formules donnant les valeurs de u et v . — Soient u, v, z trois fonctions de x, y uniformes, continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans une aire A limitée d'une courbe fermée C . Nous envisageons les intégrales simples et doubles

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_A \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) z' dx' dy', & R_2 &= \int_C (v' \alpha' - u' \beta') z' ds, & R &= R_1 + R_2 \\ (a) \quad \Phi_1 &= - \int_A \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) z' dx' dy', & \Phi_2 &= - \int_C (u' \alpha' + v' \beta') z' ds, & \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 \end{aligned}$$

Les intégrales curvilignes sont prises dans le sens direct. Les notations u', v', z' désignant les valeurs de u, v, z au point $dx' dy'$ de coordonnées (x', y') ou sur l'arc ds de C . Les α', β' sont les cosinus directeurs de la normale intérieure au point ds ; nous avons donc

$$dx' = \beta' ds, \quad dy' = -\alpha' ds \quad (\text{sur } C)$$

Il vient alors en intégrant par parties

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 = R &= - \int_A \left(v' \frac{\partial z'}{\partial x'} - u' \frac{\partial z'}{\partial y'} \right) dx' dy' \\ (b) \quad \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi &= \int_A \left(u' \frac{\partial z'}{\partial x'} + v' \frac{\partial z'}{\partial y'} \right) dx' dy' \end{aligned}$$

¹ H. POINCARÉ, loc. cit. p. 254.

² Le saut brusque des dérivées normales $\frac{\partial P_2}{\partial z}$ est $4\pi E = 4\pi H$. Les sautes brusques des d'autres dérivées tangentielles $\frac{\partial R_2}{\partial y}, \frac{\partial R_2}{\partial x}$ sont nuls (H. POINCARÉ, loc. cit. p. 259).

Désignons par $M(x, y)$ un point déterminé à l'intérieur ou à l'extérieur de A et supposons que z' soit une fonction des différences $x - x'$ et $y - y'$ telle que

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = -\frac{\partial z'}{\partial x}, \quad \frac{\partial z'}{\partial y'} = -\frac{\partial z'}{\partial y}, \quad \dots$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} &= -\int_A u' \Delta z' dx' dy' - \frac{\partial}{\partial x} \int_A \left(u' \frac{\partial z'}{\partial x'} + v' \frac{\partial z'}{\partial y'} \right) dx' dy', \quad \Delta z' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2} \\ -\frac{\partial R}{\partial x} &= -\int_A v' \Delta z' dx' dy' - \frac{\partial}{\partial y} \int_A \left(u' \frac{\partial z'}{\partial x'} + v' \frac{\partial z'}{\partial y'} \right) dx' dy' \end{aligned}$$

En comparant avec 8 (b) il vient

$$(c) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} = -\int_A u' \Delta z' dx' dy', \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} = -\int_A v' \Delta z' dx' dy'$$

Ces formules ont lieu quelque soit le nombre des courbes C limitant l'aire A . Si la fonction z' dans l'aire A satisfait à l'équation de Laplace $\Delta z' = 0$ il vient

$$(d) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

Ces deux relations entre R et Φ montrent que, en désignant par i l'unité complexe $\sqrt{-1}$ la quantité

$$R + i\Phi$$

est une fonction de la variable complexe $z = x + iy$.

Une solution de l'équation de Laplace nous est donnée par

$$z' = \log \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Si le point $M(x, y)$ est à l'intérieur de A les formules 8 (d) ne sont plus applicables. Dans ce cas décrivons autour de M un petit cercle c et envisageons l'aire A' comprise dans l'aire initiale A et extérieur au cercle. Calculons dans la première des formules 8 (d) l'intégrale curviligne

$$I = \int_c \left[(u'\alpha' + v'\beta') \frac{x - x'}{r^2} - (v'\alpha' - u'\beta') \frac{y - y'}{r^2} \right] ds$$

le long du cercle c . Sur c nous avons

$$x - x' = -\alpha' r, \quad y - y' = -\beta' r, \quad r = \text{constante}$$

L'intégrale devient donc

$$I = -\frac{1}{r} \int_c u' ds$$

La limite de cette intégrale sera donc lorsque r tend vers zéro

$$-2\pi u(x, y)$$

Nous obtenons le même résultat avec une courbe fermée quelconque entourant le point M au lieu du cercle c (voir § 2). L'autre des formules 8 (d) donne un résultat analogue. En résumé il vient

$$(e) \quad \left. \begin{matrix} 2\pi u(x, y) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \left. \begin{matrix} 2\pi v(x, y) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}$$

suivant que le point x, y est à l'intérieur ou à l'extérieur de A . Ces formules subsistent sans changement s'il existe dans A des lignes de discontinuité pour les tourbillons ou les divergences pourvu que le vecteur $\bar{q}(u, v)$ soit continu. Mais s'il existe dans A des lignes de discontinuité Σ pour le vecteur \bar{q} il faut à droite dans les formules précédentes ajouter des termes complémentaires respectivement de la forme

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial R_3}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - \frac{\partial R_3}{\partial x}$$

$$\Phi_3 = - \int_{\Sigma} [\alpha(u_2 - u_1) + \beta(v_2 - v_1)] \log \frac{1}{r} ds$$

$$R_3 = \int_{\Sigma} [\alpha(v_2 - v_1) - \beta(u_2 - u_1)] \log \frac{1}{r} ds$$

Dans ces expressions il faut toujours prendre les cosinus directeurs α, β de la normale au point ds de Σ qui va du côté 1 au côté 2 et désigner par l'index 1 les valeurs de u et v au côté 1 et par l'index 2 les valeurs de ces quantités au côté 2 (pour la démonstration voir le § 2). Nous appliquerons les notations

$$(f) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q_1 = u\alpha + v\beta, \quad 2G = v\alpha - u\beta$$

Pour trouver les valeurs du vecteur \bar{q} à chaque point de A il suffit de connaître

1⁰. Les valeurs des tourbillons (ζ) et des divergences (θ) dans A .

2⁰. Les valeurs de q_n ou de G sur C .

Nous allons bientôt trouver une équation intégrale pour trouver une des quantités q_n ou G en connaissant l'autre¹.

9. Équation intégrale définissant les valeurs de q_n sur C . —

Supposons qu'on connaisse à l'intérieur de C les tourbillons et les divergences du vecteur \bar{q} et sur C les valeurs de G . Proposons nous d'en déduire les valeurs de q_n sur C .

Nous procédons comme au § 4. Supposons d'abord $G = 0$ sur C . Il vient alors de 8 (d)

$$(a) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \alpha(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \beta(t) + \frac{\partial R_1}{\partial y} \alpha(t) - \frac{\partial R_1}{\partial x} \beta(t) = 0$$

t étant le point x, y au contour C et $\alpha(t), \beta(t)$ les cosinus directeurs de la normale intérieure au point t . Posons $z' = \log \frac{1}{r}$, $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ et appliquons la formule à l'aire A_1 qui est l'aire initiale A moins la partie de l'aire d'un petit cercle c (autour de t) qui est à l'intérieur de A . Soit c_1 la partie du cercle c qui est à l'intérieur de A . Le cercle divise le contour C en deux parties C_1 et C_2 , la partie C_2 étant à l'intérieur de c . L'angle sous lequel du point t on voit l'arc c_1 tend vers π lorsque le

¹ On peut ramener le problème de trouver G en connaissant q_n au problème de Neumann de la manière suivante. Désignons par $\bar{f}_1 (\lambda_1, \mu_1)$ le vecteur suivant

$$2\pi \lambda_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial y}, \quad 2\pi \mu_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial R_1}{\partial x}$$

Les deux vecteurs \bar{q} et \bar{f}_1 ont dans l'aire A les mêmes tourbillons et les mêmes divergences. En effet nous avons

$$2\pi \operatorname{div} \bar{f}_1 = \Delta \Phi_1 = 2\pi \operatorname{div} \bar{q}, \quad 2\pi \operatorname{curl} \bar{f}_1 = -\Delta R_1 = 2\pi \operatorname{curl} \bar{q}$$

Nous avons donc

$$\bar{q} = f_1 + \operatorname{grad} f$$

f étant une fonction harmonique dans l'aire A . Sur le contour nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta = \frac{df}{dn} = q_n - (\lambda_1 \alpha + \mu_1 \beta)$$

qui est une quantité connue en supposant connu dans A les tourbillons et les divergences de \bar{q} et sur C les valeurs de q_n . La fonction harmonique f est donc complètement déterminée si l'aire A est à connexion simple.

rayon du cercle tend vers zéro en supposant que la courbe admette au point t un tangent déterminé. L'intégrale curviligne le long de c_1 dans la formule précédente tend donc vers

$$-\pi(u(t)\alpha(t) + v(t)\beta(t)) = -\pi q_n(t)$$

lorsque le rayon du cercle tend vers zéro. L'intégrale curviligne

$$\int q_n(s) \left[\frac{x-x'}{r^2} \alpha(t) + \frac{y-y'}{r^2} \beta(t) \right] ds$$

prise le long de C_1 a un sens lorsque C_1 tend vers C ; s est le point x', y' dans l'élément d'arc ds . En effet. Désignons par ψ l'angle entre la normale intérieure au point t et la droite joignant ce point avec le point s ; il vient alors

$$-\cos \psi = \frac{x-x'}{r} \alpha(t) + \frac{y-y'}{r} \beta(t)$$

L'intégrale curviligne a donc un sens à la limite parceque¹

$$\left| q_n(s) \frac{\cos \psi}{r} \right| < \frac{K}{r^m} \quad m < 1$$

K étant une quantité positive. La formule 9 (a) devient donc à la limite

$$(b) \quad \pi q_n(t) + \int_C q_n(s) \frac{\cos \psi}{r} ds = D(t)$$

en écrivant pour abrégier

$$D(t) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \alpha(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \beta(t) + \frac{\partial R_1}{\partial y} \alpha(t) - \frac{\partial R_1}{\partial x} \beta(t)$$

Cette équation intégrale, bien étudiée, admet une solution et une seule. Dans le cas particulier d'un cercle de rayon R nous avons sur le cercle

$$\cos \psi = \frac{1}{2} \frac{r}{R}, \quad \frac{\cos \psi}{r} = \frac{1}{2R}$$

d'où

$$(c) \quad \pi q_n(t) + \frac{1}{2R} \int_C q_n(s) ds = D(t)$$

¹ H. POINCARÉ, loc. cit. p. 63.

En multipliant dans cette formule par dt et en intégrant le long du cercle il vient

$$\pi \int_C q_n(t) dt + \pi \int_C q_n(s) ds = \int_C D(t) dt$$

parceque $\int_C dt = 2\pi R$. Nous obtenons donc

$$\int_C q_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_C D(t) dt$$

En introduisant cette valeur dans 9 (c) nous avons la solution cherchée dans le cas d'un cercle.

L'équation intégrale 9 (b) n'est développée qu'en supposant $G = 0$ sur C . Dans le cas général désignons par $\bar{p}(\lambda, \mu)$ un vecteur satisfaisant à la condition

$$\mu \alpha - \lambda \beta = 2G \quad (\text{sur } C)$$

Il est possible de trouver une infinité de vecteurs \bar{p} satisfaisant à cette condition. Celà posé. Considérons le vecteur

$$\bar{m} = \bar{q} - \bar{p}$$

Les tourbillons et les divergences de ce vecteur sont connues dans l'aire A ; sur le contour C la quantité correspondante $2G$ est nulle. Nous obtenons donc pour déterminer les valeurs des projections de \bar{m} sur les normales une équation intégrale de la forme 9 (b).

Il ne peut pas exister deux systèmes de solutions. En effet. Soient $\bar{q}(u, v)$ et $\bar{q}_1(u_1, v_1)$ deux systèmes de solutions correspondants aux mêmes tourbillons, mêmes divergences et aux mêmes valeurs de G sur C . Nous avons alors (voir la note du § 8)

$$\bar{q}_1 = \bar{q} + \text{grad } f$$

f étant une fonction harmonique dans l'aire A . Sur le contour C nous avons $\frac{\partial f}{\partial x} \beta - \frac{\partial f}{\partial y} \alpha = 0$, d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \beta \quad (\text{sur } C)$$

En appliquant la formule 8 (e) au vecteur $\text{grad } f$ nous obtenons

$$R = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = - \int_C \lambda \log \frac{1}{r} ds$$

d'où

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \operatorname{grad} f \\ 0 \end{array} \right\} = \operatorname{grad} \Phi_2$$

suivant que le point x, y est à l'intérieur ou à l'extérieur de A . La fonction Φ_2 est donc constante à l'extérieur de C et sur C ; elle est donc aussi constante à l'intérieur d'où $\operatorname{grad} f = 0$ et $\bar{q} = \bar{q}$.

10. Équation intégrale définissant les valeurs de G sur C . — Supposons qu'on connaisse sur le contour C les valeurs de q_n et dans l'aire A les tourbillons et les divergences du vecteur \bar{q} . Proposons nous d'en déduire les valeurs de G sur C .

Supposons d'abord $q_n = 0$ sur C . Avec les notations du paragraphe précédent nous obtenons de 8 (d)

$$(a) \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \alpha(t) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \beta(t) - \frac{\partial R}{\partial x} \alpha(t) - \frac{\partial R}{\partial y} \beta(t) = 0$$

parceque $\Phi_2 = 0$. Posons $z' = \log \frac{1}{r}$ et appliquons cette formule à l'aire A_1 . L'intégrale curviligne prise sur la partie c_1 du cercle c a pour limite lorsque le rayon r tend vers zéro (voir les paragraphes 8 et 9)

$$-\pi (v(t) \alpha(t) - u(t) \beta(t)) = -2\pi G(t)$$

L'intégrale curviligne

$$\int 2 G(s) \left[\frac{x - x'}{r^2} \alpha(t) + \frac{y - y'}{r^2} \beta(t) \right] ds$$

prise le long de C_1 a un sens lorsque C_1 tend vers C . Nous obtenons donc pour déterminer les valeurs de $G(t)$ une équation intégrale

$$(b) \quad \pi G(t) = E(t) - \int_C G(s) \frac{\cos \psi}{r} ds$$

où

$$2 E(t) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \alpha(t) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \beta(t) - \frac{\partial R_1}{\partial x} \alpha(t) - \frac{\partial R_1}{\partial y} \beta(t)$$

C'est une équation intégrale exactement de la forme 9 (b).

Dans le cas général ou $q_n \neq 0$ il faut déterminer un vecteur $\bar{p}(\lambda, \mu)$ par la condition

$$\lambda \alpha + \mu \beta = q_n \quad (\text{sur } C)$$

et considérer le vecteur $\bar{m} = \bar{q} - \bar{p}$. Il ne peut pas exister deux systèmes de solutions. En effet. Dans ce cas nous avons pour les deux vecteurs \bar{q}_1 et \bar{q} (§ 9)

$$\bar{q}_1 = \bar{q} + \text{grad } f$$

f étant fonction harmonique dans l'aire A . Sur C nous avons

$$q_{1n} = q_n$$

en désignant par q_{1n} les projections de \bar{q}_1 sur les normales intérieures. Nous avons donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta = \frac{df}{dn} = 0$$

sur C . La fonction harmonique f est donc constante dans l'aire A et par conséquence $\bar{q}_1 = \bar{q}$.

II. Application aux fonctions d'une variable complexe. — En échangeant dans les formules 8 (e) u et v il vient

$$(a) \quad \left. \begin{matrix} 2\pi u(x, y) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \left. \begin{matrix} 2\pi v(x, y) \\ 0 \end{matrix} \right\} = -\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$L_1 = \int_A \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \log \frac{1}{r} dx' dy', \quad L_2 = \int_C (u' \beta' + v' \alpha') \log \frac{1}{r} ds,$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$M_1 = - \int_A \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \log \frac{1}{r} dx' dy', \quad M_2 = - \int_C (u' \alpha' - v' \beta') \log \frac{1}{r} ds,$$

$$M = M_1 + M_2$$

car les fonctions R et Φ deviennent $-M$ et $-L$ respectivement. Soit $z = x + iy$ une variable complexe. Nous avons

$$i = \sqrt{-1}, \quad z' = x' + iy', \quad dz' = dx' + i dy', \quad \frac{1}{z - z'} = \frac{x - x'}{r^2} - i \frac{y - y'}{r^2}$$

Posons encore

$$f(z) = u + iv, \quad f(z') = u' + iv', \quad \frac{\partial f(z')}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} + i \frac{\partial v'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial f(z')}{\partial y'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + i \frac{\partial v'}{\partial y'}$$

Multiplions la première des formules II (a) par i la seconde par -1 et ajoutons. Le terme à gauche devient

$$2\pi i f(z)$$

A droite nous obtenons en introduisons $\beta' ds = dx'$, $\alpha' ds = -dy'$

$$\begin{aligned} & \int_C (u' dy + v' dx) \left(-i \frac{x-x'}{r^2} - \frac{y-y'}{r^2} \right) + (u' dx' - v' dy') \left(i \frac{y-y'}{r^2} - \frac{x-x'}{r^2} \right) + \\ & + \int_A \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \left(i \frac{x-x'}{r^2} + \frac{y-y'}{r^2} \right) + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \left(i \frac{y-y'}{r^2} - \frac{x-x'}{r^2} \right) \right] dx' dy' = \\ & = \int_C f(z') \frac{dz'}{z'-z} - \int_A \left(\frac{\partial f(z')}{\partial x'} i - \frac{\partial f(z')}{\partial y'} \right) \frac{dx' dy'}{z'-z} \end{aligned}$$

Les deux formules 11 (a) peuvent donc être écrites plus condensées de la manière suivante

$$(b) \quad 2\pi i f(z) \Big\{ \begin{matrix} 0 \end{matrix} \Big\} = \int_C f(z') \frac{dz'}{z'-z} - \int_A \left(\frac{\partial f(z')}{\partial x'} i - \frac{\partial f(z')}{\partial y'} \right) \frac{dx' dy'}{z'-z}$$

suivant que le point $z = x + iy$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de C . Cette formule ne suppose rien sur la continuité des dérivées partielles; c'est seulement la fonction $f(z)$ qu'il faut supposer continue. Si on a à l'intérieur de A

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

nous obtenons la formule célèbre de Cauchy

$$2\pi i f(z) \Big\{ \begin{matrix} 0 \end{matrix} \Big\} = \int_C f(z) \frac{dz'}{z'-z}$$

qui exprime la valeur de la fonction holomorphe $f(z)$ à un point quelconque z intérieur au contour C au moyen des valeurs de la même fonction tout le long de ce contour. Considérons ce cas dans ce qui va suivre.

Nous avons vus (§ 9 et 10) qu'il suffit de connaître sur C ou les valeurs de $u\beta + v\alpha$ ou de $u\alpha - v\beta$. Si les valeurs de $u\alpha - v\beta$ sont nulles sur C nous obtenons dans le cas actuel une équation intégrale homogène pour déterminer les valeurs de $u\beta + v\alpha = c$ sur C

$$\pi c(t) + \int_C c(s) \frac{\cos \psi}{r} ds = 0$$

Nous avons donc aussi $c(t) = 0$ sur C . La fonction holomorphe correspondante est donc identiquement nulle. La fonction holomorphe est aussi nulle si nous avons $u\beta + v\alpha = 0$ sur C . Nous allons appliquer ces remarques.

Soient $f_\varepsilon = u_\varepsilon + iv_\varepsilon$ ($\varepsilon = 1, 2, 3, \dots, n$) n fonctions de z holomorphes dans l'aire A et telles que

$$(c) \quad u_1\beta + v_1\alpha = \Sigma k_\varepsilon (u_\varepsilon\beta + v_\varepsilon\alpha) \quad (\text{sur } C)$$

le signe Σ indiquant une sommation depuis $\varepsilon = 2$ jusqu'à $\varepsilon = n$ et k_2, k_3, \dots, k_n des constantes. Nous avons alors identiquement dans l'aire A

$$f(z) = f_1(z) - \Sigma k_\varepsilon f_\varepsilon(z) = 0$$

En effet. Si nous posons $f(z) = u + iv$ nous avons en vertu de 11 (c) $u\beta + v\alpha = 0$ sur C . La fonction holomorphe $f(z)$ est donc nulle identiquement dans l'aire A .

Si nous avons sur le contour C

$$(d) \quad u_1\beta + v_1\alpha = \Sigma k_\varepsilon (u_\varepsilon\alpha - v_\varepsilon\beta)$$

nous avons identiquement dans l'aire A

$$f(z) = f_1(z) - i \Sigma k_\varepsilon f_\varepsilon(z) = 0$$

En effet. D'après 11 (d) nous avons $u\beta + v\alpha = 0$ sur C . La fonction holomorphe $f(z)$ est donc nulle identiquement sur C .

De la première de ces remarques nous pouvons conclure: Soit \bar{q} un vecteur de projections v et u sur l'axe des x et l'axe des y .

Désignons par $q_n = v\alpha + u\beta$ et $q_t = u\alpha - v\beta$ les projections de ce vecteur sur la normale et la tangente à un point quelconque du contour C et supposons que la fonction $u + iv$ soit holomorphe dans l'aire A .

Si nous augmentons les valeurs de q_n à chaque point de C dans le même rapport constant nous augmentons aussi les valeurs de q_t dans le même rapport et inversement.

Revenons à la formule 11 (b). Soit I' un cercle dans l'aire A . Supposons

$$\Delta(z') = \frac{\partial f(z')}{\partial x'} i - \frac{\partial f(z')}{\partial y'} = 0$$

intérieur au cercle mais différent de zéro dans le reste de l'aire A . La fonction $f(z)$ donnée par 11 (b) est alors holomorphe intérieure au cercle I' et peut-être représentée par un développement convergent suivant les

puissances de $z - a$, a étant le centre du cercle Γ , qui est le cercle de convergence pour la série. Cette série ne peut pas être prolongée au delà du cercle Γ . Nous pouvons donc former des séries ayant leur cercle de convergence comme coupure essentielle.

12. Application au mouvement d'un fluide. — Imaginons un fluide en mouvement dans des plans. Nous allons à l'aide des formules précédentes étudier le mouvement dans un de ces plans que nous choisissons comme plan des x, y . Supposons que le fluide soit dans le plan des x, y limité par une courbe C

$$(a) \quad f(x, y, t) = 0$$

dont la forme et la position peuvent varier avec le temps t . Proposons nous de calculer les vitesses \bar{q} de composantes u et v en connaissant les vitesses de dilatation θ (les divergences) et les tourbillons ζ . Un élément fluide de coordonnées x, y qui à l'instant t est sur la courbe C glisse le long de cette courbe. En exprimant cela on trouve¹

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Les projections q_n des vitesses \bar{q} sur les normales intérieures à l'aire A limitée de la courbe C seront

$$q_n = -\frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad h = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Ces projections sont donc connues en connaissant l'équation 12 (a) de la courbe limite. Pour trouver les valeurs de $\bar{q}(u, v)$ à chaque point du fluide nous avons les formules 8 (c) où tous les termes sont connus sauf les valeurs de

$$2G = v\alpha - u\beta \quad (\text{sur } C)$$

Mais nous pouvons trouver ces valeurs à l'instant t en résolvant une équation intégrale de la forme 10 (b). Une telle équation a une solution et une seule. Le problème est donc résolu complètement.

Introduisant l'angle ν' entre l'axe des x et la droite joignant le point $M(x, y)$ avec l'élément $dx'dy'$ de coordonnées x', y' ou avec l'élément ds . Nous avons

¹ PAUL APPÉL, loc. cit. p. 328

$$\operatorname{tg} v' = \frac{y - y'}{x - x'}, \quad v' = \arctan \left(\frac{y - y'}{x - x'} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{-\frac{y - y'}{(x - x')^2}}{1 + \left(\frac{y - y'}{x - x'} \right)^2} = -\frac{y - y'}{r^2} = -\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x - x'}}{1 + \left(\frac{y - y'}{x - x'} \right)^2} = \frac{x - x'}{r^2} = -\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x}$$

Cela posé. Considérons les expressions

$$P = - \int_A \theta' v' dx' dy' - \int_C q'_n v' ds$$

$$Q = \int_A 2 \zeta' v' dx' dy' + \int_C G' v' ds$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Les formules 8 (e) peuvent s'écrire

$$(b) \quad \left. \begin{matrix} 2\pi u(x, y) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial(R - P)}{\partial y}, \quad 2\pi v(x, y) = -\frac{\partial(R - P)}{\partial x}$$

ou

$$(c) \quad \left. \begin{matrix} 2\pi u(x, y) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial(\Phi + Q)}{\partial x}, \quad \left. \begin{matrix} 2\pi v(x, y) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial(\Phi + Q)}{\partial y}$$

Les lignes de courant, à l'instant t , sont définies par les équations différentielles

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}; \quad v dx - u dy = 0$$

En comparant avec 12 (b) il vient

$$\frac{\partial(R - P)}{\partial x} dx + \frac{\partial(R - P)}{\partial y} dy - d(R - P) = 0$$

Les équations des *lignes de courant* deviennent donc, à l'instant t

$$(d) \quad R - P = \text{constante}$$

Si la courbe C est fixe nous avons $q_n = 0$ sur C . Cette courbe est donc à chaque instant une ligne de courant et nous devons avoir $R - P$ con-

stante sur C . Les équations des *lignes perpendiculaires* aux lignes de courant, à l'instant t , deviennent d'après 12 (c)

$$(e) \quad \Phi + Q = \text{constante}$$

car nous avons en comparant 12 (b) et (c)

$$\frac{\partial(\Phi + Q)}{\partial x} \frac{\partial(R - P)}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi + Q)}{\partial y} \frac{\partial(R - P)}{\partial y} = 0$$

Dans les parties du fluide où les tourbillons ζ sont nulles les lignes 12 (e) deviennent des *lignes équipotentiels*.

Imprimé le 27 mars 1918

ON AURORAL DRAPERIES AND ON THE SIGN OF THE AURORA CORPUSCLES

A SHORT REPLY TO PROFESSOR BIRKELAND

BY

CARL STØRMER

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1917. No. 3)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

CHRISTIANIA

AT COMMISSION BY JACOB DYBWAD

1917

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 26de januar 1917.

At a meeting of the Videnskapsselskapet in Kristiania Jan. 28 1916 Prof. KR. BIRKELAND sent in for printing a treatise with the title: *Are the Solar Corpuscle Rays that penetrate into the Atmosphere of the Earth Negative or Positive Rays?*¹.

A literal translation of this work into French was previously sent by Prof. BIRKELAND to *Archives des Sciences physiques et naturelles* in Genf, where it was published in the issues of Jan. 15 and Febr. 15 1916.

As my complete answer to the attacks made by Prof. BIRKELAND in the above treatise will be published in the Genf Archives² I need here only give the results: —

- 1) Prof. BIRKELAND's criticism of the manner in which I imagine the auroral draperies may be formed, has no foundation in his experiments. On the contrary, the facts which he refers to, confirm the mathematical theory.
- 2) Prof. BIRKELAND's idea concerning the formation of auroral draperies seems to me to be poorly founded and highly improbable. As far as I can ascertain no research has yielded facts that permit the bold conclusions drawn by Prof. BIRKELAND.
- 3) As regards the question whether the Aurora Borealis is caused by positive or negative particles, my statement which has been so very severely criticized by Prof. BIRKELAND, was made with great caution, as I said no more concerning this special occurrence of Aurora Borealis on March 11 1913 than the following: *It thus appears to be proved that the Aurora was caused by positively charged electric particles.* I willingly admit the possibility of the action on the magnetic instruments being caused by corpuscle currents outside the atmosphere, and not by the Aurora, although Prof. BIRKELAND's arguments do not seem convincing to my mind. The conclusive decision can only be obtained by further research in more cases.

¹ Printed June 16, 1916 as No. 1 of Videnskapsselskabets Skrifter. Math. Naturv. Klasse 1916.

² *Sur les draperies d'Aurores boréales, Réponse à M. Kr. Birkeland* loc. cit. April 1917, 10 pages with one figure.

- 4) The lower boundary of 80—90 km. for the computed heights of 2500 chosen points of Aurora Borealis during my expedition in 1913, proves that the auroras observed cannot be due to such penetrating and rigid negative rays as Prof. BIRKELAND alleges are the cause of Aurora Borealis.
 - 5) Prof. BIRKELAND does not, as it seems, fully appreciate the utility of the mathematical theory concerning the trajectories of electric corpuscles in the field of an elementary magnet. He does not seem to know the methods developed by me, which permit a discussion of whole classes of orbits, without having previously found the coordinates as explicit functions of the time. In opposition to Prof. BIRKELAND, who considers the importance of this mathematical theory to be very slight indeed, I maintain that it is of a great significance not only for the prediction of experimental facts, but also as a guide to research and the thorough discussion of the experiments thus performed.
-

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE GLEICHUNG

$$f(a - b) c^m = a^n - b^n$$

VON

AXEL THUE

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1917. No. 4)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA

IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1917

Fremlagt i fællesmøte den 9de februar 1917.

Es bedeuten n eine beliebig gegebene ungerade positive Primzahl, m eine beliebig gegebene ganze positive Zahl und f eine beliebig gegebene ganze Zahl.

Wir wollen dann voraussetzen, daß drei ganze Zahlen a , b und c , die relative Primzahlen sind, existieren, für welche

$$f(a-b)c^m = a^n - b^n \quad \dots (1)$$

Wir können nun, wie bekannt, zwei solche ganze homogene Funktionen P und Q vom Grade $\frac{n-1}{2}$ in a und b und mit ganzen Koeffizienten bestimmen, so daß für jedes a und b :

$$4 \frac{a^n - b^n}{a - b} = P^2 + n(-1)^{\frac{n+1}{2}} Q^2 \quad \dots (2)$$

Oder nach (1)

$$4fc^m = P^2 + kQ^2 \quad \dots (3)$$

wo

$$k = n(-1)^{\frac{n+1}{2}}$$

Wie ich in einer früheren Abhandlung gezeigt habe, kann man solche ganze Zahlen p , q und r finden, daß

$$pP + qQ = rc \quad \dots (4)$$

wo

$$p^2 \leq |c|, \quad q^2 \leq |c| \quad \dots (5)$$

Aus (3) und (4) bekommt man

$$rcP = pP^2 + qQP - p[4fc^m - kQ^2] + qQP$$

oder

$$[qP - kpQ]Q = [rP - 4pfc^{m-1}]c$$

Bezeichnet λ der größte gemeinschaftliche Divisor von Q und c , so ergibt sich, daß

$$\lambda[qP - kpQ] = sc \quad \dots (6)$$

wo s eine ganze Zahl bedeutet.

Da die Funktionen P und Q verschiedene Wurzel haben müssen, während λ — nach (3) — auch einen Divisor von P^2 bilden wird, muß λ , da a und b relative Primzahlen sein sollen, einer kleinen Zahl gleich sein.

Aus (4) und (6) erhält man:

$$[q^2 + kp^2]\lambda Q = [\lambda r q - sp]c$$

oder

$$(q^2 + kp^2)\lambda^2 = hc \quad \dots (7)$$

wo h einer ganzen Zahl gleich wird.

Ferner wird

$$0 < |h| \leq (1+k)\lambda^2 \quad \dots (8)$$

Man kann nun eine solche ganze Funktion $F(x)$ von x mit ganzen Koeffizienten finden, daß für jedes x :

$$(px + q)^m = F(x)[x^2 + k] + Ax + B \quad \dots (9)$$

wo A und B ganze homogene Funktionen vom Grade m mit ganzen Koeffizienten in p und q bilden.

Aus (9) ergibt sich:

$$(p\sqrt{-k} + q)^m = A\sqrt{-k} + B \quad \dots (10)$$

$$(-p\sqrt{-k} + q)^m = -A\sqrt{-k} + B \quad \dots (11)$$

Oder

$$A = \frac{[q + p\sqrt{-k}]^m - [q - p\sqrt{-k}]^m}{2\sqrt{-k}} \quad \dots (12)$$

$$B = \frac{[q + p\sqrt{-k}]^m + [q - p\sqrt{-k}]^m}{2} \quad \dots (13)$$

$$B^2 + kA^2 = (q^2 + kp^2)^m \quad \dots (14)$$

oder nach (7)

$$\lambda^{2m}(B^2 + kA^2) = (hc)^m \quad \dots (15)$$

Nach (9) wird

$$\left(p \frac{P}{Q} + q\right)^m = F\left(\frac{P}{Q}\right) \left[\frac{P^2}{Q^2} + k\right] + A \frac{P}{Q} + B$$

oder nach (4) und (3)

$$(rc)^m = t(4fc^m) + (AP + BQ)Q^{m-1}$$

oder

$$\lambda^{m-1} [AP + BQ] = \alpha c^m \quad \dots (16)$$

wo α einer ganzen *kleinen* Zahl gleich wird.

Aus (16) und (3) ergibt sich ferner

$$\alpha c^m P = \lambda^{m-1} [AP^2 + BQP] = \lambda^{m-1} [A(4fc^m - kQ^2) + BQP]$$

Oder

$$\lambda^{m-1} [BP - kAQ] Q = [\alpha P - 4f\lambda^{m-1} A] c^m$$

oder

$$\lambda^m [BP - kAQ] = \beta c^m \quad \dots (17)$$

wo β einer ganzen *kleinen* Zahl gleich wird.

Aus (16) und (17) erhält man

$$\lambda^m [B^2 + kA^2] P = [\alpha \lambda k A + \beta B] c^m$$

$$\lambda^m [B^2 + kA^2] Q = [\alpha \lambda B - \beta A] c^m$$

oder nach (15)

$$h^m P = \lambda^m [\alpha \lambda k A + \beta B] \quad \dots (18)$$

$$h^m Q = \lambda^m [\alpha \lambda B - \beta A] \quad \dots (19)$$

oder ferner

$$h^{2m} [P^2 + kQ^2] = \lambda^{2m} [(\alpha \lambda k A + \beta B)^2 + k(\alpha \lambda B - \beta A)^2]$$

$$\lambda^{2m} [(\alpha \lambda k A)^2 + (\beta B)^2 + k(\alpha \lambda B)^2 + (\beta A)^2] = [B^2 + kA^2] [\beta^2 + k(\alpha \lambda)^2] \lambda^{2m}$$

oder schließlich nach (3) und (16)

$$\beta^2 + k(\alpha \lambda)^2 = 4fh^m \quad \dots (20)$$

Ist $n = 5$, $k = -5$, $m > 2$ und z. B.

$$a = b + 1$$

dann gibt es nur eine endliche Anzahl Paare von ganzen Zahlen a und b , die der Gleichung (1) Genüge leisten.

Hier wird nämlich

$$P = 2a^2 + ab + 2b^2$$

$$3Q = ab$$

oder

$$P - 5Q - 2(a - b)^2 = 2$$

oder nach (18) und (19):

$$2h^m = k^m [(5\beta - 5\alpha\lambda)A + (\beta - 5\alpha\lambda)B].$$

QUELQUES PROPOSITIONS DANS LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

PAR

RICHARD BIRKELAND

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1917. No. 5)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA

EN COMMISSION CHEZ JACOB DYBWAD

1918

Fremlagt i fællesmøte den 9de februar 1917 ved aktuar Palmstrøm.

1. *Introduction.* — Dans une communication précédente¹ j'ai donné des formules, exprimant les déformations infiniment petites en chaque point $M(x, y, z)$ d'un volume V limité par une surface S par les valeurs que prennent dans le volume V les six fonctions caractéristiques dans la théorie de l'élasticité et les déformations des éléments de la surface. Dans cette communication je me propose de donner des formules donnant dans le cas de l'équilibre élastique et un milieu élastique isotrope et homogène *les déformations infiniment petites de chaque point M intérieur au volume V et les efforts intérieurs par les forces extérieures sur les éléments de la surface S et les divers éléments du volume V et les déformations des éléments de la surface S .* J'ai aussi traité le cas d'un milieu élastique homogène isotrope en mouvement dans le cas où les déformations sont très petites. En introduisant dans mes formules préliminaires une fonction auxiliaire proposée par Kirchhoff j'ai pu obtenir *les déformations infiniment petites de chaque point M à un instant t en connaissant outre les forces extérieures et les déformations de chaque point de la surface S aussi le coefficient de dilatation cubique à chaque point de V .* Cependant nous pouvons dans ce cas trouver à chaque point M le vecteur tourbillon, à l'instant t , sans connaître les valeurs du coefficient de dilatation cubique.

2. *Quelques formules préliminaires.* — Soient u, v, w trois fonctions de x, y, z continues uniformes et possédant des dérivées partielles du premier ordre dans un volume V limité par une surface S ; dx un élément de volume de coordonnées x', y', z' ; $d\sigma$ un élément de surface et ν le nombre $+1$ ou -1 . Considérons les intégrales triples et doubles

¹ Voir: Vid.-Selsk. Skr. M.-N. Kl. 1917. No. 2.

$$P_1 = \int_V \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - r \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) z' d\tau, \quad P_2 = \int_S (w' \beta' - r v' \gamma') z' d\sigma, \quad P = P_1 + P_2$$

$$Q_1 = \int_V \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - r \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) z' d\tau, \quad Q_2 = \int_S (u' \gamma' - r w' \alpha') z' d\sigma, \quad Q = Q_1 + Q_2$$

$$R_1 = \int_V \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - r \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) z' d\tau, \quad R_2 = \int_S (v' \alpha' - r u' \beta') z' d\sigma, \quad R = R_1 + R_2$$

$$(a) \quad \phi_1^{(1)} = - \int_V \left(r \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) z' d\tau, \quad \phi_2^{(1)} = - \int_S (r u' \alpha' + v' \beta' + w' \gamma') z' d\sigma, \quad \Phi^{(1)} = \phi_1^{(1)} + \phi_2^{(1)}$$

$$\phi_1^{(2)} = - \int_V \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + r \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) z' d\tau, \quad \phi_2^{(2)} = - \int_S (u' \alpha' + r v' \beta' + w' \gamma') z' d\sigma, \quad \Phi^{(2)} = \phi_1^{(2)} + \phi_2^{(2)}$$

$$\phi_1^{(3)} = - \int_V \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + r \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) z' d\tau, \quad \phi_2^{(3)} = - \int_S (u' \alpha' + v' \beta' + r w' \gamma') z' d\sigma, \quad \Phi^{(3)} = \phi_1^{(3)} + \phi_2^{(3)}$$

étendues au volume V et à la surface S . La fonction z est une fonction uniformes et continues des différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, x , y , z étant les coordonnées d'un point M . Les u' , v' , w' désignent les valeurs de u , v , w respectivement dans l'élément de volume $d\tau$ ou dans $d\sigma$ et α' , β' , γ' les cosinus directeurs de la normale intérieure au point $d\sigma$ de S . Dans ma communication précédente j'ai trouvé les trois formules suivantes¹

$$(b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - r \frac{\partial Q}{\partial z} &= - r \int_V u' \Delta z' d\tau \\ \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - r \frac{\partial R}{\partial x} &= - r \int_V v' \Delta z' d\tau \\ \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - r \frac{\partial P}{\partial y} &= - r \int_V w' \Delta z' d\tau \end{aligned}$$

$\Delta z'$ étant le symbole de Laplace. En particulier: si nous choisissons pour z' la solution suivante de l'équation de Laplace $\Delta z' = 0$

$$z' = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

il faut dans le cas où le point $M(x, y, z)$ est à l'intérieur de V appliquer les formules 2(b) au volume V' compris dans le volume initial V et extérieur à une petite sphère autour de M . Lorsque le rayon de la petite

¹ loc. cit. formules 2 (c) et (d).

sphère tend vers zéro le volume V' tend vers le volume V et il vient à la limite¹

$$(c) \quad \left. \begin{aligned} 4\pi r u(x, y, z) \\ 0 \end{aligned} \right\} &= \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \nu \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \left. \begin{aligned} 4\pi r v(x, y, z) \\ 0 \end{aligned} \right\} &= \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \nu \frac{\partial R}{\partial x} \\ \left. \begin{aligned} 4\pi r w(x, y, z) \\ 0 \end{aligned} \right\} &= \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \nu \frac{\partial P}{\partial y}$$

suivant que le point $M(x, y, z)$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de V . Nous avons traité le cas $\nu = 1$ dans ma communication précédente; maintenant nous allons traiter le cas $\nu = -1$. Pour $\nu = -1$ les formules 2(c) donnent les déformations infiniment petites de composantes u, v, w en chaque point $M(x, y, z)$ par les valeurs que prennent dans le volume V les six fonctions caractéristiques²

$$(d) \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

et les déformations des éléments de la surface S . Rappelons qu'on appelle $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ les coefficients des dilatations linéaires des éléments issus de M et parallèles aux axes de coordonnées et les quantités $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les glissement parallèles aux plans de coordonnées. La somme des trois coefficients des dilatations linéaires est égale au coefficient de dilatation cubique θ au point M ³

$$(e) \quad \theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3.$$

Désignons par A, B, C trois fonctions de x, y, z définies par les formules

$$(f) \quad \begin{aligned} A &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \mathcal{A}u; & \mathcal{A}u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ B &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \mathcal{A}v; & \mathcal{A}v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ C &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \mathcal{A}w; & \mathcal{A}w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned}$$

¹ 1. cit. formules 2 (h).

² Paul Appell: *Traité de Mécanique rationnelle* t. III, 2^{ième} édition p. 262.

³ Paul Appell: *loc. cit.* p. 263.

en désignant par λ, μ deux constantes savoir les deux constantes qui caractérisent le milieu élastique isotrope homogène que nous allons considérer. Dans le cas de l'équilibre élastique d'un tel milieu nous avons pour A, B, C les expressions¹

$$(g) \quad A = -\varrho X, \quad B = -\varrho Y, \quad C = -\varrho Z$$

X, Y, Z étant les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse de densité ϱ au point M . Dans le cas d'un milieu élastique isotrope homogène en mouvement nous avons² pour A, B, C les expressions

$$(h) \quad A = -\varrho X + \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad B = -\varrho Y + \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad C = -\varrho Z + \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Désignons par $F_e d\sigma$ la force extérieure élémentaire qu'on fait agir sur la face extérieure de chaque élément $d\sigma$ de la surface S limitant le corps considéré, $X_e d\sigma, Y_e d\sigma, Z_e d\sigma$ les composantes de cette force. Nous avons alors³

$$(i) \quad \begin{aligned} -X_e &= (\lambda\theta + 2\mu\epsilon_1)\alpha + \mu(\gamma_3\beta + \gamma_2\gamma) \\ -Y_e &= (\lambda\theta + 2\mu\epsilon_2)\beta + \mu(\gamma_1\gamma + \gamma_3\alpha) \\ -Z_e &= (\lambda\theta + 2\mu\epsilon_3)\gamma + \mu(\gamma_2\alpha + \gamma_1\beta) \end{aligned}$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale *intérieure* au point considéré de la surface S .

Posons dans les formules préliminaires 2(b) $\nu = -1$ et désignons par t_x, t_y, t_z la somme des intégrales triples et par D_x, D_y, D_z la somme des intégrales double respectivement dans la première, la seconde et la troisième de ces formules

$$(k) \quad \begin{aligned} t_x &= \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial z}, & t_y &= \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{\partial R_1}{\partial x}, \dots \\ D_x &= \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_2}{\partial z}, & D_y &= \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial P_2}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial x}, \dots \end{aligned}$$

Les formules 2(b) deviennent

$$(l) \quad t_x + D_x = \int_V u' \Delta z' d\tau, \quad t_y + D_y = \int_V v' \Delta z' d\tau, \quad t_z + D_z = \int_V w' \Delta z' d\tau.$$

¹ Paul Appell: loc. cit. p. 517.

² Paul Appell: loc. cit. p. 516.

³ Paul Appell: loc. cit. les formules (22) p. 518 et les formules (18) p. 514.

Dans ce qui va suivre nous allons aussi appliquer les identités

$$(m) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\theta - 2\varepsilon_1)}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_3}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_2}{\partial z} &= -\Delta u \\ \frac{\partial(\theta - 2\varepsilon_2)}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_3}{\partial x} &= -\Delta v \\ \frac{\partial(\theta - 2\varepsilon_3)}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_2}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial y} &= -\Delta w \end{aligned}$$

3. *Une proposition dans la théorie de l'équilibre élastique.* — Nous allons transformer les formules préliminaires 2(b) où $\nu = -1$ pour obtenir quelques résultats qui me semble d'intérêt dans la théorie de l'équilibre élastique d'un milieu isotrope homogène. En intégrant par parties les intégrales triples t_x il vient¹:

$$\begin{aligned} t_x &= \int_V \left[(\theta' - 2\varepsilon'_1) \frac{\partial x'}{\partial x'} - \gamma'_3 \frac{\partial x'}{\partial y'} - \gamma'_2 \frac{\partial x'}{\partial z'} \right] d\tau = \\ &= \int_S [(2\varepsilon'_1 - \theta')\alpha' + \gamma'_3\beta' + \gamma'_2\gamma'] x' d\sigma + \int_V x' \Delta u' d\tau \end{aligned}$$

en vertu de la première des identités 2(m). En introduisant pour Δu l'expression $\frac{1}{\mu} A - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ d'après 2(f) il vient en vertu de la première des formules 2(i)

$$t_x = -\frac{1}{\mu} \int_S X'_e x' d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \int_S \theta' \alpha' x' d\sigma + \frac{1}{\mu} \int_V \left[A' - (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta'}{\partial x'} \right] x' d\tau$$

¹ Nous appliquons les formules bien connues

$$\int_V \frac{\partial F'}{\partial x'} d\tau = - \int_S F' \alpha' d\sigma, \quad \int_V \frac{\partial F'}{\partial y'} d\tau = - \int_S F' \beta' d\sigma, \quad \int_V \frac{\partial F'}{\partial z'} d\tau = - \int_S F' \gamma' d\sigma$$

(voir par exemple: Paul Appell: loc. cit. p. 4, α' , β' , γ' sont ici les cosinus directeurs de la normale intérieure au point $d\sigma$ de S) F' étant une fonction continue uniformes de x' , y' , z' admettant des dérivées partielles du premier ordre. En posant par exemple $F' = (\theta' - 2\varepsilon'_1) x'$ nous obtenons

$$\int_V (\theta' - 2\varepsilon'_1) \frac{\partial x'}{\partial x'} d\tau = - \int_S (\theta' - 2\varepsilon'_1) \alpha' x' d\sigma - \int_V \frac{\partial (\theta' - 2\varepsilon'_1)}{\partial x'} x' d\tau.$$

En posant dans la seconde et la troisième pour F' respectivement $\gamma'_3 x'$ et $\gamma'_2 x'$ nous obtenons des formules analogues.

X'_e , A' désignant les valeurs de X_e , A respectivement dans l'élément de surface $d\sigma$ et dans l'élément de volume $d\tau$. Nous avons

$$\int_V \frac{\partial \theta'}{\partial x'} z' d\tau = - \int_S \theta' \alpha' z' d\sigma + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad \Phi_1 = \int_V \theta' z' d\tau.$$

Il vient donc

$$(a) \quad t_x = T_x - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \quad \text{où} \quad T_x = - \frac{1}{\mu} \int_S X_e z' d\sigma + \frac{1}{\mu} \int_V A' z' d\tau.$$

Nous obtenons de même manière

$$(b) \quad \begin{aligned} t_y &= T_y - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \quad \text{où} \quad T_y = - \frac{1}{\mu} \int_S Y_e z' d\sigma + \frac{1}{\mu} \int_V B' z' d\tau \\ t_z &= T_z - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \quad \text{où} \quad T_z = - \frac{1}{\mu} \int_S Z_e z' d\sigma + \frac{1}{\mu} \int_V C' z' d\tau. \end{aligned}$$

En introduisant pour z' la solution particulière

$$\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

de l'équation de Laplace $\Delta z' = 0$ nous trouverons en procédant comme dans ma communication précédente

$$(c) \quad \begin{aligned} -4\pi u(x, y, z) \Big|_0 &= D_x + T_x - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ -4\pi v(x, y, z) \Big|_0 &= D_y + T_y - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ -4\pi w(x, y, z) \Big|_0 &= D_z + T_z - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \end{aligned}$$

suivant que le point $M(x, y, z)$ est à l'intérieur ou à l'extérieur du volume V . En dérivant la première de ces formules par rapport à x , la seconde par rapport à y , la troisième par rapport à z et en faisant la somme il vient parceque $\Delta \Phi_1 = -4\pi \theta(x, y, z)$

$$(d) \quad -4\pi \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \theta(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} (D_x + T_x) + \frac{\partial}{\partial y} (D_y + T_y) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z + T_z)$$

si le point $M(x, y, z)$ est à l'intérieur de V .

Imaginons maintenant le volume V rempli par un milieu élastique isotrope homogène dans l'état naturel, puis déformons le milieu en faisant agir des forces extérieures sur les éléments de la surface et sur les divers éléments du volume. Les composantes X_e, Y_e, Z_e des forces extérieures sur les éléments de surface sont déterminées par les formules 2(i). Les composantes X, Y, Z des forces extérieures sur les divers éléments de volume sont liées aux quantités A, B, C par 2(g).

En supposant $\lambda + 2\mu \geq 0$ les formules 3(d) et (c) donnent les déformations infiniment petites u, v, w en chaque point $M(x, y, z)$ du volume V limité par la surface S par

1^o. les forces extérieures sur les éléments de la surface et sur les divers éléments du volume

2^o. les déformations des éléments de la surface S .

Les déformations u, v, w étant connues en fonction de x, y, z les efforts intérieurs sont données par les formules ¹

$$\begin{aligned} N_1 &= -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_1, & T_1 &= -\mu\gamma_1 \\ N_2 &= -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_2, & T_2 &= -\mu\gamma_2 \\ N_3 &= -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_3, & T_3 &= -\mu\gamma_3 \end{aligned}$$

Ces quantités sont donc aussi connues lorsque les forces extérieures et les déformations des éléments de la surface limite sont connues.

Si l'on veut appliquer les formules 3(c) et (d) au cas d'un milieu élastique isotrope homogène en mouvement il faut pour pouvoir connaître les déformations u, v, w connaître outre les forces extérieures et les déformations des éléments de la surface limite aussi connaître $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ dans les divers éléments de volume. Dans ce cas nous pouvons développer autres formules plus comodes en introduisant pour z' au lieu de $\frac{1}{r}$ la fonction auxiliaire suivante

$$(e) \quad z' = \frac{1}{r} F\left(t + \frac{r}{c}\right), \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

F étant une fonction de $t + \frac{r}{c}$ où t est le temps et c une constante que nous allons choisir plus tard égale à $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, ρ étant la densité que nous supposons constante.

¹ Paul Appell: loc. cit. p. 514.

4. *Fonction auxiliaire.* — Dans les formules 2(l) nous supposons maintenant que les fonctions u , v , w et ces dérivées partielles dependent outre de x , y , z aussi du temps t . La fonction F dans la formule 3(e) est provisoirement une fonction quelconque de $t + \frac{r}{c} = \varepsilon$ et nous avons

$$(a) \quad \Delta z' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}.$$

Soit δ une quantité positive aussi petite qu'on veut. Nous choisissons la fonction $F(\varepsilon)$ telle qu'elle est continue et différente de zéro dans l'intervalle $(0, \delta)$ mais égale à zéro extérieure à cet intervalle et telle que¹

$$\int_0^\delta F(\varepsilon) d\varepsilon = 1$$

d'où

$$\int_a^b F(\varepsilon) d\varepsilon = 1$$

en supposons $a < 0$, $b > \delta$. Nous avons donc aussi

$$(b) \quad \int_{t_1}^{t_2} F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt = \int_{t_1 + \frac{r}{c}}^{t_2 + \frac{r}{c}} F(\varepsilon) d\varepsilon = 1$$

en choisissant t_1 et t_2 tels que

$$(c) \quad t_1 + \frac{r}{c} < 0, \quad t_2 + \frac{r}{c} > \delta.$$

Cela posé. Désignons par $f(x', y', z', t)$ une fonction continue uniforme de x' , y' , z' , t . Nous avons alors

$$\begin{aligned} (d) \quad \int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) z' dt &= \frac{1}{r} \int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt = \\ &= \frac{1}{r} \int_{t_1 + \frac{r}{c}}^{t_2 + \frac{r}{c}} f\left(x', y', z', \varepsilon - \frac{r}{c}\right) F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{r} f\left(x', y', z', \eta_1 - \frac{r}{c}\right) \int_{t_1 + \frac{r}{c}}^{t_2 + \frac{r}{c}} F(\varepsilon) d\varepsilon = \\ &= \frac{1}{r} f\left(x', y', z', \eta_1 - \frac{r}{c}\right) \end{aligned}$$

¹ Voir un article Kirchhoff: Ann. d. Phys. u. chem. 18 (1883) p. 663.

en vertu de la théorie de la moyenne; η_1 est une quantité entre 0 et δ ; donc très petite avec δ . Nous avons aussi

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \frac{\partial z'}{\partial t} dt = [f(x', y', z', t) z']_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} f'_t(x', y', z', t) z' dt.$$

Le premier terme à droite est nul en vertu de notre hypothèse sur la fonction $F(\epsilon)$ car t_1 et t_2 sont choisis tels que les inégalités 4 (c) soient satisfaites. Il vient donc en comparant avec la formule 4 (d):

$$(e) \quad \int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} dt = -\frac{1}{r} f'_t \left(x', y', z', \eta_2 - \frac{r}{c} \right)$$

η_2 étant une quantité entre 0 et δ . Nous obtenons aussi en intégrant par parties

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} dt = \left[f(x', y', z', t) \frac{\partial z'}{\partial t} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} f'_t(x', y', z', t) \frac{\partial z'}{\partial t} dt.$$

Le premier terme à droite est nul d'après l'hypothèse sur $F\left(t + \frac{r}{c}\right)$. L'intégrale à droite se calcule d'après 4 (e); il vient donc

$$(g) \quad \int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} dt = \frac{1}{r} f'_t \left(x', y', z', \eta_3 - \frac{r}{c} \right)$$

η_3 étant une quantité dans l'intervalle $(0, \delta)$. En supposant f, f'_t, f''_t continues par rapport à t nous pouvons écrire les formules 4 (d), (e) et (g)

$$(h) \quad \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) z' dt &= \frac{1}{r} f \left(x', y', z', -\frac{r}{c} \right) + \eta'_1 \\ \int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \frac{\partial z'}{\partial t} dt &= -\frac{1}{r} f'_t \left(x', y', z', -\frac{r}{c} \right) + \eta'_2 \\ \int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} dt &= \frac{1}{r} f''_t \left(x', y', z', -\frac{r}{c} \right) + \eta'_3 \end{aligned}$$

où $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3$ tendent vers zéro avec η_1, η_2, η_3 c'est à dire avec δ . Désignons par ψ et $\bar{\psi}$ les expressions

$$(i) \quad \psi = \int_V f(x', y', z', t) z' d\tau, \quad \bar{\psi} = \int_V f\left(x', y', z', -\frac{r}{c}\right) \frac{d\tau}{r}$$

x', y', z' étant les coordonnées de l'élément de volume $d\tau$. Nous avons alors d'après 4 (h)

$$(j) \quad \int_{t_1}^{t_2} \psi dt = \int_V \left[\int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) z' dt \right] d\tau = \bar{\psi} + \eta_1''$$

où η_1'' tend vers zéro avec δ . Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dt &= \int_V \left[\int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \frac{\partial z'}{\partial x} dt \right] d\tau = \\ &= - \int_V \left[\int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \left(\frac{x-x'}{r^3} F\left(t + \frac{r}{c}\right) - \frac{1}{c} \frac{x-x'}{r^2} F_t'\left(t + \frac{r}{c}\right) \right) dt \right] d\tau = \\ &= - \int_V \left[\int_{t_1}^{t_2} f(x', y', z', t) \left(\frac{x-x'}{r^2} z' - \frac{1}{c} \frac{x-x'}{r} \frac{\partial z'}{\partial t} \right) dt \right] d\tau. \end{aligned}$$

En appliquant la première et la seconde des formules 4 (h) il vient

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dt = - \int_V \left[f\left(x', y', z', -\frac{r}{c}\right) \frac{x-x'}{r^3} + \frac{1}{c} f_t'\left(x', y', z', -\frac{r}{c}\right) \frac{x-x'}{r^2} \right] d\tau + \eta_2''$$

où η_2'' tend vers zéro avec δ . Nous pouvons évidemment écrire cela

$$(k) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dt = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \eta_2''.$$

Nous obtenons de la même manière

$$(l) \quad \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} dt &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} + \eta_2''' \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi}{\partial z} dt &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + \eta_2'''' \end{aligned}$$

ou η_2''' et η_2'''' tendent vers zéro avec δ . Nous avons en outre

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V f(x', y', z', t) \Delta z' d\tau \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V f(x', y', z', t) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} d\tau \right] dt.$$

En vertu de la troisième des formules 4(h) il vient

$$(m) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V f(x', y', z', t) \Delta z' d\tau \right] dt = \frac{1}{c^2} \int_V f_t'' \left(x', y', z', -\frac{r}{c} \right) \frac{d\tau}{r} + \eta_2^v$$

ou η_2^v tend vers zéro avec δ . Les formules 4(k) et (l) subsistent évidemment aussi dans le cas des intégrales de surface \int_S au lieu des intégrales triples \int_V en supposant seulement que le point x, y, z ne soit pas sur la surface elle-même.

5. *Application au mouvement élastique.* — Nous appliquons les formules 2(l) au volume V' compris dans le volume initial V et extérieur à une petite sphère Σ autour de $M(x, y, z)$ et nous introduisons pour z' la fonction auxiliaire

$$z' = \frac{1}{r} F \left(t + \frac{r}{c} \right).$$

Ces formules subsistent pour toutes les valeurs de t . Nous pouvons donc multiplier par dt et intégrer par rapport à t depuis $t = t_1$ jusqu'à $t = t_2$; la première des formules 2(l) devient

$$(a) \quad \int_{t_1}^{t_2} D_x dt + \int_{t_1}^{t_2} t_x dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V'} u' \Delta z' d\tau \right] dt.$$

Désignons par $u_t'' \left(x', y', z', -\frac{r}{c} \right)$ la valeur de $\frac{\partial^2 u(x', y', z', t)}{\partial t^2}$ pour $t = -\frac{r}{c}$. L'intégrale à droite devient en vertu de 4(m) lorsque le rayon de la sphère Σ tend vers zéro:

$$\frac{1}{c^2} \int_{V'} u_t'' \left(x', y', z', -\frac{r}{c} \right) \frac{d\tau}{r} + \varepsilon_1$$

ou ε_1 tend vers zéro avec δ . En introduisant dans t_x (formules 3 (a)) au lieu de A l'expression $-\varrho X + \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ il vient en vertu de 4 (i), (k) et (m) en faisant tendre le rayon de la petite sphère Σ vers zéro

$$\int_{t_1}^{t_2} t_x dt = -\frac{1}{\mu} \int_S \bar{X}'_e \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{\mu} \int_V \varrho \bar{X}' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{\mu} \int_V \varrho \bar{u}''_t \frac{d\tau}{r} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial x} + \varepsilon_2$$

ou ε_2 tend vers zéro δ . Les \bar{X}'_e , \bar{X}' et \bar{u}''_t désignent les valeurs de X'_e , X' et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ lorsqu'on remplace t par $-\frac{r}{c}$ et $\bar{\Phi}_1$ la valeur de Φ_1 en remplaçant sous le signe \int_V le temps t par $-\frac{r}{c}$ et x' par $\frac{1}{r}$. Si nous choisissons pour c la valeur

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

nous obtenons (voir 5 (a))

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[t_x - \int_V u' \Delta x' d\tau \right] dt = -\frac{1}{\mu} \int_S \bar{X}'_e \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{\mu} \int_V \bar{X}' \frac{d\tau}{r} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial x} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

Cette expression est en vertu de 5 (a) égale à $-\int_{t_1}^{t_2} D_x dt$. Désignons par U_x la somme des trois premiers termes à droite. Écrivons les intégrales de surface D_x

$$D_x = D'_x + D''_x.$$

D'_x étant les intégrales de surface étendues à la surface S et D''_x les mêmes intégrales de surface étendues à la surface Σ de la petite sphère autour de $M(x, y, z)$. En vertu de 4 (k) et (l) nous obtenons

$$\int_{t_1}^{t_2} D'_x dt = \frac{\partial \bar{\Phi}_2^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial z} + \varepsilon_3$$

ou ε_3 tend vers zéro avec δ . La notation \bar{R}_2 , par exemple, désigne qu'on a dans R_2 (formules 2 (a)) remplacé sous le signe \int_S le temps t par $-\frac{r}{c}$ et x' par $\frac{1}{r}$. D'autre part nous avons

$$\int_{t_1}^{t_2} D_x'' dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Sigma} \left\{ (-u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma') \frac{\partial z'}{\partial x'} - (v'\alpha' + u'\beta') \frac{\partial z'}{\partial y'} - \right. \right. \\ \left. \left. - (u'\gamma' + w'\alpha') \frac{\partial z'}{\partial z'} \right\} d\sigma \right] dt.$$

Sur la sphère Σ nous avons $x - x' = -r\alpha'$, $y - y' = -r\beta'$, $z - z' = -r\gamma'$, $r = \text{constante}$. D'autre part nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{x - x'}{r^3} F\left(t + \frac{r}{c}\right) - \frac{1}{c} \frac{x - x'}{r^2} F_t'\left(t + \frac{r}{c}\right) = \frac{x - x'}{r^2} x' - \frac{1}{c} \frac{x - x'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t}$$

et des expressions analogues pour $\frac{\partial x'}{\partial y'}$ et $\frac{\partial x'}{\partial z'}$. Il vient donc

$$\int_{t_1}^{t_2} D_x'' dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Sigma} u' \left(x' - \frac{1}{c} \frac{\partial x'}{\partial t} \right) d\sigma \right] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Sigma} u' \left(r x' - \frac{1}{c} r^2 \frac{\partial x'}{\partial t} \right) d\omega \right] dt$$

$d\omega$ étant l'angle solide sous lequel du point $M(x, y, z)$ on voit l'élément $d\sigma$ de la sphère. À droite nous avons une somme de deux intégrales.

La seconde tend vers zéro avec le rayon r car $r^2 \frac{\partial x'}{\partial t}$ tend vers zéro. La première est, en vertu de 4(j), égale à $\int_{\Sigma} u \left(x', y', z', -\frac{r}{c} \right) d\omega + \eta_1$ où η_1

tend vers zéro avec δ . Nous avons donc à la limite lorsque r tend vers zéro

$$\int_{t_1}^{t_2} D_x'' dt = 4\pi u(x, y, z, o).$$

La formule 5(a) devient donc

$$-4\pi u(x, y, z, o) \Big\}_o = U_x + \frac{\partial \bar{\Phi}_2^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial z} + \eta$$

suivant que le point $M(x, y, z)$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de V . La quantité η tend vers zéro avec δ . Cette formule a lieu pour des valeurs de δ aussi petites qu'on veut; nous avons donc

$$4\pi u(x, y, z, o) \Big\}_o = U_x + \frac{\partial \bar{\Phi}_2^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial z}.$$

De la même manière nous obtenons de la première et la seconde des formules 2(1) des expressions analogues pour les valeurs de v et w au point $M(x, y, z)$ à l'instant $t = 0$. Cet instant peut être choisi à un temps quelconque; nous avons seulement dans la formule précédente de remplacer $-\frac{r}{c}$ par $t - \frac{r}{c}$. En appliquant la notation

$$[f] = f\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right)$$

pour l'indiquer q'on a remplacé le temps t par $t - \frac{r}{c}$, r étant la distance du point $M(x, y, z)$ au point x', y', z' et c la constante

$$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

nous obtenons les formules suivantes:

$$-4\pi u(x, y, z, t) \Big|_0 = U_x + \frac{\partial[\Phi_2^{(1)}]}{\partial x} + \frac{\partial[R_2]}{\partial y} + \frac{\partial[Q_2]}{\partial z}$$

$$-4\pi v(x, y, z, t) \Big|_0 = U_y + \frac{\partial[\Phi_2^{(2)}]}{\partial y} + \frac{\partial[P_2]}{\partial z} + \frac{\partial[R_2]}{\partial x}$$

$$-4\pi w(x, y, z, t) \Big|_0 = U_z + \frac{\partial[\Phi_2^{(3)}]}{\partial z} + \frac{\partial[Q_2]}{\partial x} + \frac{\partial[P_2]}{\partial y}$$

où

$$U_x = -\frac{1}{\mu} \int_S [X'_e] \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{\mu} \int_V \rho [X'] \frac{d\tau}{r} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial[\Phi_1]}{\partial x}, \quad [\Phi_1] = \int_V [\theta'] \frac{d\tau}{r}$$

$$U_y = -\frac{1}{\mu} \int_S [Y'_e] \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{\mu} \int_V \rho [Y'] \frac{d\tau}{r} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial[\Phi_1]}{\partial y}$$

$$U_z = -\frac{1}{\mu} \int_S [Z'_e] \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{\mu} \int_V \rho [Z'] \frac{d\tau}{r} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial[\Phi_1]}{\partial z}$$

De ces formules nous pouvons trouver les déformations infiniment petites u, v, w , et par conséquence les efforts intérieures, à chaque point $M(x, y, z)$ du volume V à l'instant t par

1°. les forces extérieures,

2°. les déformations des éléments de la surface S et le coefficient de dilatation cubique à chaque point intérieur.

Les valeurs des quantités 1^0 et 2^0 à un élément de volume ou à un élément de surface ne sont pas celles existant à l'instant considéré t , mais celles existant à cet élément à un instant antérieur $t - \frac{r}{c}$.

Le vecteur tourbillon $\bar{\omega}$ de composantes ξ, η, ζ

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

est donné des formules précédentes seulement en connaissant les forces extérieures et les déformations des points de la surface S , car la fonction $[\Phi_1]$ qui dépend des valeurs du coefficient de dilatation cubique à chaque point de V disparaît en calculant les composantes ξ, η, ζ de $\bar{\omega}$.

Trondhjem, janvier 1917.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER EINIGE KLASSEN KOMBINATORISCHER PROBLEME

VON
TH. SKOLEM

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1917. No. 6)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1917

Fremlagt i fællesmøtet den 3dje dec. 1915 ved prof. Sylow.

Die Kombinatorik ist ein Zweig der Mathematik, dem die Mathematiker gewöhnlich nur wenig Aufmerksamkeit gewidmet haben, wahrscheinlich weil er den meisten zu trivial und elementar erscheint, als daß etwas Nennenswerthes von Interesse daraus zu erhalten wäre. Und doch ist es unbestreitbar, daß mehrere der Theorien und Probleme, die in der Mathematik unabhängig von der Kombinatorik behandelt werden, trotzdem eigentlich der Kombinatorik angehören, und eine weitere Entwicklung der letzteren wird auch deshalb sicher nicht ohne Bedeutung sein. Man kann z. B. sagen, daß die ganze Substitutionentheorie nur ein Zweig der Kombinatorik ist. Sogar ein Problem wie, die Gruppen einer gegebenen Ordnungszahl zu finden, kann in einer weit näherliegenden Weise, als man gewöhnlich meint, als ein rein kombinatorisches aufgefaßt werden, wie ich näher erläutern will. Dieses Problem kann nämlich so ausgedrückt werden:

Es seien n Dinge a_1, a_2, \dots, a_n gegeben. Man wünscht zu wissen, wie viele Systeme von Variationen es zur dritten Klasse gibt, die folgenden Bedingungen Genüge leisten:

- 1) Wenn a und b zwei beliebige der n Dinge sind, so gibt es ein und nur ein Ding c , so daß (abc) eine der Variationen des Systems ist.
- 2) Wenn a und c zwei beliebige der n Dinge sind, so gibt es ein und nur ein Ding b , so daß (abc) eine der Variationen des Systems ist.
- 3) Wenn b und c zwei beliebige der n Dinge sind, so gibt es ein und nur ein Ding a , so daß (abc) eine der Variationen des Systems ist.
- 4) Wenn $(ab\alpha), (bc\beta), (a\beta\gamma), (ac\delta)$ vier Variationen des Systems sind, so sind γ und δ dasselbe Ding. (Dies ist das associative Gesetz).

Eine »Gruppe« kann also in dieser Weise als ein System von Variationen zur dritten Klasse, das vier Bedingungen genügt, definiert werden.

Eben den Teil der Kombinatorik, der von Systemen von Paaren, Tripeln, Quadrupeln u. s. w., die diesen oder jenen Bedingungen genügen, handelt, wird es deshalb von besonderer Bedeutung sein weiter zu ent-

wickeln und wenn möglich eine systematische Theorie darüber aufzustellen. Von diesem Standpunkte aus habe ich einige Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt, und werde im folgenden meine wichtigsten bisherigen Ergebnisse mitteilen.

§ 1.

Über Einteilungen von Systemen.

Im folgenden kommt oft ein allgemeines Prinzip zur Anwendung. Es ist dies folgendes:

Angenommen, daß wie m Systeme von Dingen, S_1, S_2, \dots, S_m , haben; daß diese aber Dinge gemeinsam haben können. Es sei $S_{r,s}$ der Inbegriff der Dinge, die S_r und S_s gemeinsam sind, weiter $S_{r,s,t}$ der Inbegriff aller Dinge, die S_r, S_s und S_t gemeinsam sind u. s. w. Dann kann die Anzahl N der Dinge, die überhaupt in den Systemen S_1, S_2, \dots, S_m vorkommen, so ausgedrückt werden:

$$N = N_1 - N_2 + N_3 - N_4 + \dots,$$

wenn N_1 die Summe der Anzahlen der Dinge der m Systeme S_r ist, N_2 die Summe der Anzahlen der Dinge der Systeme $S_{r,s}$ u. s. w., oder mit anderen Worten:

$$N_1 = n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

$$N_2 = n_{1,2} + n_{1,3} + \dots + n_{m-1,m}$$

$$\dots \dots \dots$$

wenn hier n_{r_1, r_2, \dots, r_p} die Anzahl der Dinge des Systems S_{r_1, r_2, \dots, r_p} ist.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, ist nur nötig zu zeigen, daß jedes Ding in dieser Weise wirklich ein und nur einmal gezählt wird. Wir betrachten dann ein Ding, das p von den Systemen S gemeinsam ist, sonst aber in keinem System vorkommt. Dann wird dieses Ding $\binom{p}{1}$ mal in N_1 gezählt, $\binom{p}{2}$ mal in N_2 u. s. w. bis $\binom{p}{p} = 1$ mal in N_p . Also wird es in dem Ausdruck für N im ganzen

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \dots$$

mal gezählt. Nun ist aber

$$0 = (1 - 1)^p = 1 - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \dots,$$

so daß man erhält

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \dots = 1.$$

Jedes Ding wird also einmal und nur einmal gezählt w. z. bw. w.

Ein besonders wichtiger Sonderfall dieses Prinzips ist der, daß die Zahlen n_1, n_2, \dots gleich sind und ebenso die Zahlen $n_{1,2}, n_{1,3}, \dots$ einander gleich u. s. w. Setzt man dann

$$n_{r_1, r_2, \dots, r_{\gamma'}} = N_{\gamma'},$$

so wird

$$N_{\gamma} = \binom{m}{\gamma} N_{\gamma'}$$

und

$$N = \sum_0^m {}_{\gamma'} (-1)^{\gamma'} \binom{m}{\gamma} N_{\gamma'}.$$

Mit Hülfe dieses Prinzips kann man in vielen Fällen leicht die Anzahl der Einteilungen von einem System von n Dingen in m Teile finden, welche gewissen Bedingungen genügen.

Erstens ist es leicht zu sehen, daß die Anzahl der Arten, auf welche überhaupt n Dinge, b_1, b_2, \dots, b_n , m anderen Dingen, a_1, a_2, \dots, a_m , so zugeordnet werden können, daß jedes von den n Dingen zu einem und nur einem der m Dinge gehört (während dagegen umgekehrt jedes der m Dinge zu mehreren oder auch keinem der n Dinge gehören kann), gleich

$$m^n$$

wird¹.

Wählt man eines der n Dinge, so kann dieses einem willkürlichen der m Dinge zugeordnet werden. Dies gibt also m Möglichkeiten. Diese Zuordnungen geschehen aber ganz unabhängig für die n Dinge, und folglich erhält man im ganzen m^n Möglichkeiten.

Dies ist also, wenn man es so ausdrücken will, die Anzahl der Paarsysteme, jedes Paar innerhalb eines beliebigen der Systeme von einem der m Dinge a_1, a_2, \dots, a_m und einem der n Dinge b_1, b_2, \dots, b_n bestehend, die so beschaffen sind, daß jedes der Dinge b in einem und nur einem der Paare des Systems vorkommt.

Man kann auch sagen, daß es die Anzahl der Arten ist, auf welche ein System von n Dingen in m Teile geteilt werden kann, wenn die Teile

¹ Dies ist in der CANTORSCHEN Mengenlehre sogar als Definition des Potenzbegriffes für Kardinalzahlen benutzt worden.

nach einander geordnet sein sollen, und wenn außerdem Einteilungen, wo ein oder mehr Teile verschwinden, d. h. kein Ding enthalten, mitgerechnet werden.

Um nun die Anzahl der Arten zu finden, auf die ein System von n Dingen in m Teile geteilt werden kann, wenn jeder Teil mindestens ein Ding enthalten soll, kann man das eben erwähnte Prinzip benutzen, wenn man bemerkt, daß die Anzahl der Einteilungen mit wenigstens r verschwindenden Teilen gleich $(m-r)^n$ ist. Die gesuchte Zahl wird dann, wenn die Teile geordnet gerechnet werden, gleich

$$\sum_0^m (-1)^r \binom{m}{r} (m-r)^n.$$

Soll dagegen die Reihenfolge der Teile gleichgültig sein, so wird die Anzahl der Einteilungen gleich

$$\sum_0^m (-1)^r \frac{(m-r)^n}{r! (m-r)!}.$$

Wir können uns gern so ausdrücken, daß

$$\sum_0^m (-1)^r \binom{m}{r} (m-r)^n$$

die Anzahl der Arten ist, auf welche n Dinge so an m Stellen gesetzt werden können, daß an jeder Stelle wenigstens ein Ding steht, und jedes Ding nur an einer Stelle steht.

Es ist weiter klar, daß, wenn jede von s der Stellen von eben 1 Ding besetzt ist, die Anzahl der möglichen Verteilungen der Dinge gleich wird

$$\binom{m}{s} \binom{n}{s} s! \sum_0^{m-s} (-1)^r \binom{m-s}{r} (m-r-s)^{n-s},$$

und folglich muß nach dem erwähnten allgemeinen Prinzip

$$\begin{aligned} \sum_0^m (-1)^s \binom{m}{s} \binom{n}{s} s! \sum_0^{m-s} (-1)^r \binom{m-s}{r} (m-r-s)^{n-s} = \\ = \sum_0^m \sum_0^{m-s} (-1)^{r+s} \frac{m!}{r! s! (m-r-s)!} \frac{n!}{(n-s)!} (m-r-s)^{n-s} \end{aligned}$$

die Anzahl der Arten sein, auf welche n Dinge so an m Stellen gesetzt werden können, daß jede Stelle von mindestens 2 Dingen besetzt ist (und natürlich fortwährend so, daß jedes Ding nur an einer Stelle steht). Wird diese Zahl durch $m!$ dividiert, so erhält man die Anzahl der Arten, auf welche ein System von n Dingen so in m Teile geteilt werden kann, daß jeder Teil wenigstens 2 Dinge enthält.

Sollen jetzt t der Stellen bei der Verteilung der Dinge von eben 2 Dingen besetzt sein, so wird die Anzahl der Möglichkeiten gleich

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{m}{t} n!}{2^t (n-2t)!} \sum_s^{m-t} \sum_r^{m-s-t} \frac{(-1)^{r+s} (m-t)!}{r! s! (m-r-s-t)!} \frac{(n-2t)!}{(n-s-2t)!} (m-r-s-t)^{n-s-2t} = \\ &= \sum_s^{m-t} \sum_r^{m-s-t} \frac{(-1)^{r+s} m!}{r! s! t! (m-r-s-t)!} \frac{n!}{2^t (n-s-2t)!} (m-r-s-t)^{n-s-2t}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung des generellen Prinzips erhält man hieraus die Anzahl der Weisen, auf welche n Dinge so an m Stellen gesetzt werden können, daß jede Stelle von mindestens 3 Dingen besetzt ist. Sie wird

$$\sum_t^m \sum_s^{m-t} \sum_r^{m-s-t} \frac{(-1)^{r+s+t} m!}{r! s! t! (m-r-s-t)!} \frac{n!}{2^t (n-s-2t)!} (m-r-s-t)^{n-s-2t}.$$

Im allgemeinen ergibt sich, daß die Anzahl der Arten, auf die n Dinge an m Stellen so gesetzt werden können, daß jede Stelle von mindestens γ Dingen besetzt ist, gleich

$$\sum_{r_1} \sum_{r_2} \cdots \sum_{r_\gamma} (-1)^{r_1 + \cdots + r_\gamma} \frac{m!}{r_1! \cdots r_\gamma! r_{\gamma+1}!} \frac{n! r_{\gamma+1}^{n'}}{(2!)^{r_3} (3!)^{r_4} \cdots (\gamma-1)! r_\gamma n'!}$$

sein muß, wenn die Summation über alle nicht-negativen ganzen Werte der Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_{\gamma+1}$, für welche die Summe $r_1 + r_2 + \cdots + r_\gamma + r_{\gamma+1}$ gleich m ist, ausgedehnt wird, und außerdem $n' = n - r_2 - 2r_3 - \cdots - (\gamma-1)r_\gamma$ ist.

In ähnlicher Weise kann man auch für die Anzahl der Verteilungen, bei denen γ_1 der Stellen von mindestens 1 Dinge, γ_2 der Stellen von mindestens 2 Dingen u. s. w. besetzt sein sollen, generelle Ausdrücke finden. Diese Ausdrücke werden natürlich komplizierter, und ich gehe nicht näher auf sie ein.

In diesen Aufgaben ist es immer so gewesen, daß verschiedene Stellen von nur verschiedenen Dingen besetzt waren, oder m. a. W. daß je zwei

verschiedene Teilsysteme kein Ding gemeinsam hatten. Es kann aber auch von Interesse sein die Fälle zu untersuchen, wo die Teilsysteme Dinge gemeinsam haben können. Man erhält in der Weise eine große Klasse neuer Aufgaben.

Zuerst können wir versuchen, die Anzahl der Weisen zu finden, worauf man von einem System von n Dingen m nacheinander geordnete Teilsysteme, die zusammen alle n Dinge enthalten, bilden kann, wenn jedes von p bestimmten dieser Systeme sowohl mit jedem anderen der p Systeme wie mit jedem der $m - p$ übrigen disjunkt¹ ist, und 3 beliebige dieser $m - p$ letzten Systeme kein Ding gemeinsam haben.

Werden zuerst die Fälle mitgerechnet, wo ein oder mehr Teilsysteme verschwinden, so wird die gesuchte Anzahl augenscheinlich

$$\left(\binom{m}{1} + \binom{m-p}{2} \right)^n.$$

Jedes Ding kann ja auf $\binom{m}{1}$ Arten so gestellt werden, daß es nur in einem der Teilsysteme vorkommt, weiter aber auch auf $\binom{m-p}{2}$ Arten in der Weise, daß es in zwei der Teilsysteme zu stehen kommt.

Die Anzahl der Arten, auf welche diese Teilsysteme so gewählt werden können, daß keines der letzteren $m - p$ Systeme verschwindet, wird

$$\sum_{s=0}^{m-p} (-1)^s \binom{m-p}{s} \left(\binom{m-s}{1} + \binom{m-p-s}{2} \right)^n.$$

Die Anzahl der Gruppierungen, bei denen kein Teilsystem verschwindet, wird folglich

$$\sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^{m-p} (-1)^{r+s} \binom{p}{r} \binom{m-p}{s} \left(\binom{m-r-s}{1} + \binom{m-p-s}{2} \right)^n.$$

Indessen werden bei vielen von diesen Gruppierungen 2 Teilsysteme einander gleich. Dagegen können niemals 3 von ihnen gleich werden. Es könnte dann auch von Interesse sein, die Anzahl der Gruppierungen zu finden, bei denen alle Teilsysteme voneinander verschieden sind.

Wenn es mindestens t mal eintreten soll, daß 2 Teilsysteme gleich werden, so wird, wie leicht zu sehen, die Anzahl der Möglichkeiten eben dieselbe, wie wenn man $m - t$ Teilsysteme haben soll, die

¹ Ich sage, daß zwei Systeme „disjunkt“ sind, wenn sie kein Ding gemein haben.

nach Belieben gleich oder verschieden sein können. Diese Zahl wird deshalb

$$\sum_0^{p+t} \sum_0^{m-p-2t} (-1)^{r+s} \binom{p+t}{r} \binom{m-p-2t}{s} M^n,$$

wo

$$M = \binom{m-r-s-t}{1} + \binom{m-p-s-2t}{2}.$$

Mit Hilfe des schon oft benutzten allgemeinen Prinzips findet man dann, daß

$$\begin{aligned} & \sum_t \frac{(-1)^t (m-p)!}{2^t \cdot t! (m-p-2t)!} \sum_0^{p+t} \sum_0^{m-p-2t} (-1)^{r+s} \binom{p+t}{r} \binom{m-p-2t}{s} M^n \\ &= \sum_t^{\left[\frac{m-p}{2}\right]} \sum_0^p \sum_0^{m-p-2t} (-1)^{r+s+t} \frac{(p+t)! (m-p)!}{r! (p+t-r)! s! t! (m-p-s-2t)! 2^t} M^n \end{aligned}$$

die Anzahl der Arten ist, aus n Dingen m Systeme so zu bilden, daß jedes Ding in mindestens einem der Systeme vorkommt, jedes System mindestens ein Ding enthält, 2 beliebige der Systeme verschieden sind, während außerdem jedes von gewissen p von ihnen sowohl mit jedem anderen der p als mit jedem der $m-p$ übrigen disjunkt ist, und kein Ding auf einmal in 3 dieser $m-p$ Systeme vorkommt.

Wird $p=0$ gesetzt, so ergibt sich, daß

$$\sum_t^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_0^t \sum_0^{m-2t} \frac{(-1)^{r+s+t} m!}{r! s! (t-r)! (m-s-2t)! 2^t} \left(\binom{m-r-s-t}{1} + \binom{m-s-2t}{2} \right)^n$$

die Anzahl der Weisen ist, auf die n Dinge so zu m verschiedenen nicht verschwindenden, nach einander geordneten Systemen zusammengestellt werden können, daß 3 beliebige unter ihnen kein Ding gemeinsam haben. Weiter ist dann natürlich

$$\sum_t^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_0^t \sum_0^{m-2t} \frac{(-1)^{r+s+t}}{r! s! (t-s)! (m-s-2t)! 2^t} \left(\binom{m-r-s-t}{1} + \binom{m-s-2t}{2} \right)^n$$

die Anzahl der möglichen Gruppierungen, wenn die Reihenfolge der m Systeme gleichgültig sein soll.

Beispiel: $m = 3$, $n = 7$. Dann ist

$$\sum_0^1 \sum_t^t \sum_0^{3-2t} \frac{(-1)^{r+s+t}}{r! s! (t-r)! (3-s-2t)! 2^t} \left(\binom{3-r-s-t}{1} + \binom{3-s-2t}{2} \right)^7$$

$$= \frac{1}{3!} \left(\binom{3}{1} + \binom{3}{2} \right)^7 - \frac{1}{2!} \left(\binom{2}{1} + \binom{2}{2} \right)^7 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{2} \cdot 2^7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 45500$$

die Anzahl der Arten aus 7 Dingen 3 verschiedene nicht-leere Systeme so zu bilden, daß jedes Ding in einem oder zwei der Systeme, nicht aber in allen drei, vorkommt.

Weiter ist

$$\sum_0^3 (-1)^s \binom{3}{s} \left(\binom{3-s}{1} + \binom{3-s}{2} \right)^7 = 6^7 - 3^8 + 3 = 273378$$

die Anzahl der Arten, auf die man von den zwei Reihen von Dingen

$$a_1, a_2, a_3$$

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$$

ein System von Paaren, jedes Paar aus einem a und einem b bestehend, bilden kann, so daß jedes a in mindestens einem der Paare und jedes b in mindestens einem und höchstens zwei der Paare vorkommt.

Als nächstes Problem nehme ich das: Die Anzahl der Arten zu finden, auf die n Dinge so zu m Systemen zusammengestellt werden können, daß 4 beliebige der Systeme kein Ding gemeinsam haben, außerdem 3 beliebige von gewissen m_1 der m Systeme kein Ding gemeinsam haben, und endlich je 2 von gewissen m_2 der m_1 Systeme kein Ding gemeinsam haben. (Dann muß natürlich $m_2 \leq m_1 \leq m$ sein).

Werden die Systeme nacheinander geordnet, und werden die Fälle mitgerechnet, da eines oder mehrere der Systeme leer sind, so wird die gesuchte Zahl

$$\left(\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m_2}{2} - \binom{m_1}{3} \right)^n.$$

Soll es aber kein leeres System geben, so wird, wie man in derselben Weise wie früher findet, die Anzahl gleich

$$\sum_{r,s,t} (-1)^{r+s+t} \binom{m-m_1}{r} \binom{m_1-m_2}{s} \binom{m_2}{t} M^n,$$

wenn der Kürze halber M statt $\binom{m-r-s-t}{1} + \binom{m-r-s-t}{2} + \binom{m-r-s-t}{3} - \binom{m_2-t}{2} - \binom{m_1-s-t}{3}$ geschrieben wird.

Ebenso findet man die Anzahl der Arten n Dinge so zu m nicht-leeren, nach einander geordneten Systemen zusammenzustellen, daß keins von p von ihnen mit einem andern der p oder mit einem der $m-p$ übrigen etwas gemein hat, 3 dieser $m-p$ Systeme nur dann etwas gemein haben, wenn sie unter gewissen $m-p-q$ Systemen vorkommen, und endlich kein Ding auf einmal in 4 dieser $m-p-q$ Systeme vorkommt. Diese Zahl wird

$$\sum_0^p r \sum_0^q s \sum_0^{m-p-q} t (-1)^{r+s+t} \binom{p}{r} \binom{q}{s} \binom{m-p-q}{t} M^n,$$

wo $M = \binom{m-r-s-t}{1} + \binom{m-p-s-t}{2} + \binom{m-p-q-t}{3}$.

Setzt man in dieser Formel $p=q=0$ oder in der vorhergehenden $m_1=m_2=0$, so erhält man in beiden Fällen

$$\sum_0^m r \binom{m}{r} \left(\binom{m-r}{1} + \binom{m-r}{2} + \binom{m-r}{3} \right)^n$$

als die Anzahl der Arten n Dinge so zu einer Reihe von m nicht-leeren Systemen zusammenzustellen, daß kein Ding auf einmal in 4 dieser Systeme vorkommt.

Man kann auch sagen, dies ist die Anzahl der Arten aus zwei Reihen von Dingen

$$a_1, a_2, \dots, a_m \\ b_1, b_2, \dots, b_n$$

ein System von Paaren so zu bilden, daß jedes Paar ein a und ein b enthält, während jedes a in mindestens einem der Paare und jedes b in mindestens 1 und höchstens 3 der Paare vorkommen.

Etwas leichter gestalten sich diese Aufgaben, wenn es gegeben ist, wie viele Dinge auf einmal in 2 oder 3 u. s. w. Systemen vorkommen. Sucht man z. B. die Anzahl der möglichen Gruppierungen von n Dingen zu einer Reihe von m Systemen, so daß je 2 von diesen eben 1 Ding gemeinsam haben, während 3 beliebige der Systeme nichts gemein haben, so findet man sie gleich

$$\binom{n}{\binom{m}{2}} \binom{m}{2}! m^{n-\binom{m}{2}} = \frac{n!}{\left(n - \binom{m}{2}\right)!} m^{n-\binom{m}{2}}.$$

Die $\binom{m}{2}$ Dinge, die den 2 Systemen jedes der $\binom{m}{2}$ System-Paare beziehungsweise gemeinsam sind, können ja auf $\binom{n}{\binom{m}{2}}$ verschiedene Arten gewählt werden, und dabei soll jedes der $n - \binom{m}{2}$ übrigen Dinge in einem und nur einem der Systeme vorkommen, was auf $m^{n - \binom{m}{2}}$ Arten möglich ist.

In derselben Weise findet man, daß die Anzahl der Arten, eine Reihe von m Systemen aus n Dingen so zu bilden, daß 2 beliebige der Systeme γ Dinge gemeinsam haben, während 3 beliebige kein Ding gemeinsam haben, gleich

$$\binom{n}{\binom{m}{2}\gamma} \prod_0^{\binom{m}{2}-1} \binom{\binom{m}{2}-r}{\gamma} m^{n - \binom{m}{2}\gamma} = \frac{n! m^{n - \binom{m}{2}\gamma}}{\left(n - \binom{m}{2}\gamma\right)! (\gamma!)^{\binom{m}{2}}}$$

ist.

Die Anzahl der möglichen Gruppierungen von n Dingen zu m Systemen, so daß 2 beliebige der Systeme höchstens 1 Ding gemein haben, während 3 beliebige unter ihnen kein Ding gemein haben, ist, wie man leicht sieht:

$$\sum_r r! \binom{n}{r} \binom{\binom{m}{2}}{r} m^{n-r} = \sum_r \frac{n! \binom{m}{2}!}{(n-r)! r! \left(\binom{m}{2} - r\right)!} m^{n-r};$$

wir haben aber dann auch die Fälle mit berücksichtigt, wo leere Systeme vorkommen. Verlangt man, daß kein System leer sein soll, so wird die Anzahl

$$\sum_r \sum_s (-1)^s \frac{m! n! \binom{m-s}{2}!}{s! (m-s)! (n-r)! r! \left(\binom{m-s}{2} - r\right)!} (m-s)^{n-r},$$

Es fällt dann auch leicht, die Anzahl der Arten anzugeben, auf die man aus n Dingen m Systeme so bilden kann, daß jedes Ding in wenigstens einem Systeme vorkommt, während $p+1$ beliebige der Systeme kein Ding gemein dagegen p beliebige unter ihnen stets γ Dinge gemein haben. Diese Zahl wird nämlich

$$\frac{n!}{\left(n - \binom{m}{p}\gamma\right)! (\gamma!)^{\binom{m}{p}}} \left(\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{p-1}\right)^{n - \binom{m}{p}\gamma}.$$

Bei jeder Gruppierung von Dingen in m Systemen so, daß $p+1$ beliebige der Systeme nichts gemein haben, während dagegen p beliebige unter ihnen eben γ Dinge gemeinsam haben, werden augenscheinlich $p-1$ beliebige unter ihnen mindestens $(m-p+1)\gamma$ Dinge gemein haben. Gibt es für $p-1$ der Systeme mehr gemeinsame Dinge, so befinden sich diese nicht in anderen Systemen, als eben diesen $p-1$. Es ist dann auch nicht schwierig, die Anzahl der Arten anzugeben, wie man aus n Dingen m Systeme so bilden kann, daß jedes Ding in mindestens einem der Systeme vorkommt, während $p+1$ der Systeme niemals etwas gemein haben, dagegen p der Systeme stets γ_p Dinge gemein und $p-1$ der Systeme stets γ_{p-1} Dinge gemein haben. Damit dies möglich sein soll, muß, wie wir sahen,

$$\mu_{p-1} = \gamma_{p-1} - (m-p+1)\gamma_p \geq 0$$

sein. Wenn nur dies stattfindet, ist

$$\frac{n! M^N}{N! (\gamma_p!)^{\binom{m}{p}} (\mu_{p-1}!)^{\binom{m}{p-1}}}$$

die gesuchte Zahl, indem hier der Kürze halber M statt $\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{p-2}$ und N statt $n - \binom{m}{p} \gamma_p - \binom{m}{p-1} \mu_{p-1}$ gesetzt ist.

Beispiele:

1) $m=4$, $n=4$, $p=3$, $\gamma_p=1$, $\gamma_{p-1}=2$. Dann erhält man die Zahl $4! = 24$. Wenn a, b, c, d die Dinge sind, so sind die möglichen Gruppierungen in der Tat die 24 verschiedenen Anordnungen der 4 Tripel (a, b, c) , (a, b, d) , (a, c, d) , (b, c, d) .

2) Wenn $m=4$, $p=3$, $\gamma_p=1$, $\gamma_{p-1}=2$, erhält man für einen willkürlichen Wert von n die Zahl

$$\frac{n!}{(n-4)!} \cdot 4^{n-4}.$$

Abstrahiert man von den Anordnungsverschiedenheiten, so ergibt sich also die Zahl

$$\binom{n}{4} \cdot 4^{n-4},$$

und die Richtigkeit dieses Resultats ist leicht unmittelbar einzusehen. Man kann auf $\binom{n}{4}$ Arten 4 Dinge unter den n Dingen wählen und aus diesen 4 Tripel machen, und dann können die übrigen $n-4$ Dinge in

4 Systeme, von denen je zwei nichts gemein haben, auf 4^{n-4} Arten verteilt werden.

Wenn $p+1$ der Systeme niemals etwas gemein haben, p beliebige unter ihnen γ_p Dinge gemein und $p-1$ beliebige γ_{p-1} Dinge gemein haben, so werden $p-2$ beliebige unter ihnen mindestens

$$\binom{m-p+2}{1}\gamma_{p-1} - \binom{m-p+2}{2}\gamma_p$$

Dinge gemein haben. Die Anzahl der Arten, aus n Dingen m Systeme so zu bilden, daß $p+1$ der Systeme niemals Dinge gemein haben, p von ihnen immer γ_p Dinge, $p-1$ von ihnen immer γ_{p-1} Dinge und endlich $p-2$ von ihnen immer γ_{p-2} Dinge gemein haben, wird folglich

$$\frac{n! M^N}{N! (\gamma_p!) \binom{m}{p} (\mu_{p-1}!) \binom{m}{p-1} (\mu_{p-2}!) \binom{m}{p-2}},$$

wenn der Kürze halber

$$\gamma_{p-1} - (m-p+1)\gamma_p = \mu_{p-1},$$

$$\gamma_{p-2} - \binom{m-p+2}{1}\gamma_{p-1} + \binom{m-p+2}{2}\gamma_p = \mu_{p-2},$$

$$M = \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{p-3}$$

$$\text{und } n - \binom{m}{p}\gamma_p - \binom{m}{p-1}\mu_{p-1} - \binom{m}{p-2}\mu_{p-2} = N$$

gesetzt wird.

Endlich kann ich auch die Anzahl der Arten angeben, auf die man aus n Dingen m Systeme so bilden kann, daß jedes Ding in mindestens 1 der Systeme vorkommt, und kein Ding auf einmal in $p+1$ der Systeme vorkommt, während p beliebige der Systeme γ_p Dinge, $p-1$ beliebige γ_{p-1} Dinge u. s. w. bis 2 beliebige der Systeme γ_2 Dinge gemein haben. Die gesuchte Zahl wird nämlich

$$\frac{n! \cdot m^{n - \sum_r^p \binom{m}{r} \mu_r}}{\left(n - \sum_r^p \binom{m}{r} \mu_r\right)! \prod_r^p \mu_r^{\binom{m}{r}}},$$

indem hier um der Kürze willen

$$\gamma_r - \binom{m-r}{1}\gamma_{r+1} + \binom{m-r}{2}\gamma_{r+2} - \dots + (-1)^{p-r} \binom{m-r}{p-r}\gamma_p = \mu_r$$

gesetzt ist.

Diese Aufgaben können dann wieder variiert werden. Man kann z. B. die Anzahl der Arten suchen, auf die man aus n Dingen m solche Systeme

bilden kann, daß 3 beliebige der Systeme kein Ding gemein haben, während es p_1 mal eintritt, daß 2 der Systeme γ_1 Dinge gemein haben, weiter p_2 mal, daß 2 Systeme γ_2 Dinge gemein haben, u. s. w., bis es endlich p_α mal eintritt, daß 2 der Systeme γ_α Dinge gemein haben, indem außerdem gemeint ist, daß $p_1 + p_2 + \dots + p_\alpha = \binom{m}{2}$ sein soll. Diese Anzahl wird, wenn man $n - p_1 \gamma_1 - \dots - p_\alpha \gamma_\alpha = N$ setzt,

$$\frac{\binom{m}{2}! \, n! \, m^N}{p_1! \, p_2! \, \dots \, p_\alpha! \, \gamma_1!^{p_1} \, \gamma_2!^{p_2} \, \dots \, \gamma_\alpha!^{p_\alpha} \, N!},$$

wie leicht zu sehen.

Ich will nicht näher auf diese Dinge eingehen, sondern gehe jetzt zu einer anderen Klasse von Problemen über.

§ 2.

Über Systeme von Paaren, Tripeln u. s. w., in unbestimmter Anzahl.

Wie ich schon erwähnt habe, kann jede Einteilung eines Systems von Dingen in Teile, oder allgemeiner jede Gruppierung von Dingen zu gewissen Systemen als eine Konstruktion eines Paarsystems angesehen werden. Wenn ein Ding a einem System S angehört, so kann man das Paar (a, S) bilden, und der Inbegriff dieser Paare ist das Paarsystem. In dieser Weise können alle bisher behandelten Aufgaben als Aufgaben über Paarsysteme gedeutet werden. In diesem Paragraphen will ich einige andere Aufgaben über Paarsysteme¹ behandeln, sowie Aufgaben über Tripelsysteme oder überhaupt Systeme von Systemen.

Zuerst können wir folgende Aufgabe betrachten:

Es seien n Dinge gegeben. Wie viel Paarsysteme gibt es, die so beschaffen sind, daß jedes der n Dinge in mindestens einem der Paare eines jeden der Systeme vorkommt?

Die Anzahl der überhaupt möglichen Paarsysteme ist augenscheinlich $2^{\binom{n}{2}}$. Um nun die Anzahl derjenigen zu finden, die so beschaffen sind, daß jedes der n Dinge in mindestens einem der Paare vorkommt, kann man wieder das im Anfang von § 1 erwähnte Prinzip benutzen. Die Anzahl der Paarsysteme, die so beschaffen sind, daß ein beliebiges von gewissen p der n Dinge in keinem der Paare vorkommt, ist, wie leicht zu sehen, $2^{\binom{n-p}{2}}$.

¹ Diese können nicht immer umgekehrt als Aufgaben über Gruppierungen von Dingen wie in den Aufgaben des § 1 gedeutet werden.

Also wird die gesuchte Zahl

$$\sum_p^n (-1)^p \binom{n}{p} 2^{\binom{n-p}{2}}.$$

Allgemeiner ist die Anzahl der Arten, wie man innerhalb eines Systems von n Dingen ein System von Systemen, jedes m Dinge enthaltend, so wählen kann, daß jedes der n Dinge in mindestens einem dieser m -Systeme vorkommt, gleich

$$\sum_p^n (-1)^p \binom{n}{p} 2^{\binom{n-p}{m}}.$$

Die Anzahl der Arten, wie man aus n Dingen ein System von Paaren so bilden kann, daß jedes Ding in einem und nur einem der Paare vorkommt, wird augenscheinlich dieselbe wie die Zahl der möglichen Einteilungen des Systems der n Dinge in disjunkte Paare. Dies ist aber nur dann möglich, wenn n eine gerade Zahl $= 2n'$ ist, und dann wird die gesuchte Anzahl gleich

$$\frac{(2n')!}{2^{n'} \cdot n'!}.$$

Die Anzahl der Arten, aus n Dingen ein System von Paaren so zu bilden, daß jedes von gewissen p der n Dinge in einem und nur einem der Paare vorkommt, wird

$$\sum_r \frac{p!}{2^r r! (p-2r)!} (n-p)^{p-2r} 2^{\binom{n-p}{2}}.$$

Wird außerdem verlangt, daß jedes der übrigen $n-p$ Dinge in mindestens einem der Paare vorkommen soll, so wird die Anzahl der Möglichkeiten

$$\sum_s (-1)^s \binom{n-p}{s} \sum_r \frac{p!}{2^r r! (p-2r)!} (n-p-s)^{p-2r} 2^{\binom{n-p-s}{2}}.$$

Hieraus erhält man dann weiter, daß die Anzahl der Arten, wie man sich aus n Dingen ein System von Paaren so bilden kann, daß jedes Ding in mindestens 2 der Paare vorkommt, gleich

$$\sum_t (-1)^t \binom{n}{t} \sum_s (-1)^s \binom{n-t}{s} \sum_r \frac{t!}{2^r r! (t-2r)!} (n-s-t)^{t-2r} 2^{\binom{n-s-t}{2}}$$

ist.

Es ist dann natürlich als nächste Aufgabe die zu wählen, die Anzahl der Paarsysteme zu finden, die so beschaffen sind, daß jedes der n Dinge in mindestens 3 der Paare vorkommt.

Es sei $P_{p_0, p_1, p_2, n}$ die Anzahl der Arten, wie man aus n Dingen ein Paarsystem so bilden kann, daß jedes von p_0 bestimmten der n Dinge in keinem Paar vorkommt, jedes von p_1 bestimmten unter den n Dingen in eben einem der Paare vorkommt, während jedes von p_2 bestimmten der Dinge in 2 der Paare vorkommt, und die übrigen $n - p_0 - p_1 - p_2$ Dinge keiner Bedingung unterworfen sind. Dann ist augenscheinlich

$$\sum_r (-1)^r \binom{n - p_1 - p_2}{r} P_{r, p_1, p_2, n}$$

die Anzahl der Arten, wo das Paarsystem so gewählt werden kann, daß noch die p_1 Dinge in einem Paar und die p_2 Dinge in 2 Paaren vorkommen, während jedes der übrigen Dinge in mindestens einem der Paare vorkommt. Weiter muß

$$\sum_s (-1)^s \binom{n - p_2}{s} \sum_r (-1)^r \binom{n - s - p_2}{r} P_{r, s, p_2, n}$$

die Anzahl der Paarsysteme sein, die so beschaffen sind, daß jedes von p_2 bestimmten der Dinge in eben 2 der Paare vorkommt, während jedes der übrigen $n - p_2$ Dinge in mindestens 2 der Paare vorkommt. Endlich wird

$$\sum_t (-1)^t \binom{n}{t} \sum_s (-1)^s \binom{n - t}{s} \sum_r (-1)^r \binom{n - s - t}{r} P_{r, s, t, n}$$

die Anzahl der so beschaffenen Paarsysteme, daß jedes Ding in mindestens 3 der Paare vorkommt. Es kommt also jetzt nur darauf an, die Zahl $P_{p_0, p_1, p_2, n}$ zu finden.

Ein einfacher independenter Ausdruck dieser Zahl läßt sich wohl nicht leicht finden. Indessen kann sie durch gewisse andere Zahlen, zu deren Berechnung ich später sowohl rekurrierende Formeln wie independente (allerdings ziemlich komplizierte) Ausdrücke angeben werde, ausgedrückt werden.

Die Paare, die die in einem Paare vorkommenden p_1 Dinge und die in zwei Paaren vorkommenden p_2 Dinge enthalten, bestehen zum Teil aus 2 dieser $p_1 + p_2$ Dinge und zum Teil aus einem dieser Dinge und einem der $n - p_0 - p_1 - p_2$ Dinge, die keiner Bedingung unterworfen sind. Es sei dann μ die Zahl derjenigen der p_2 Dinge, die in 2 der zuerstgenannten Paare vorkommen, γ_2 die Zahl derjenigen der p_2 Dinge, die in einem dieser Paare vorkommen, und endlich γ_1 die Zahl derjenigen der p_1 Dinge, die in einem dieser Paare vorkommen. Wenn wir dann außerdem mit A_{m_2, m_1} die Zahl der Arten bezeichnen, auf die man aus $m_1 + m_2$ Dingen ein

System von Paaren so bilden kann, daß jedes von m_1 bestimmten der Dinge in 1 der Paare vorkommt, während jedes der übrigen m_2 in 2 der Paare vorkommt, so wird, wenn man $n - p_0 - p_1 - p_2 = N$ setzt,

$$\frac{p_2!}{\mu! \gamma_2! (p_2 - \mu - \gamma_2)!} \cdot \frac{p_1!}{\gamma_1! (p_1 - \gamma_1)!} A_{\mu, \gamma_1 + \gamma_2} \cdot \binom{N}{2}^{p_2 - \mu - \gamma_2} \binom{N}{1}^{p_1 - \gamma_1 + \gamma_2} \cdot 2^{\binom{N}{2}}$$

die Anzahl der Möglichkeiten. Folglich wird

$$P_{p_0, p_1, p_2, n} = \sum_{\mu} \sum_{\gamma_1} \sum_{\gamma_2} \frac{p_2! \binom{N}{2}^{p_2 - \mu - \gamma_2}}{\mu! \gamma_2! (p_2 - \mu - \gamma_2)!} \cdot \frac{p_1! \binom{N}{1}^{p_1 - \gamma_1 + \gamma_2}}{\gamma_1! (p_1 - \gamma_1)!} A_{\mu, \gamma_1 + \gamma_2} \cdot 2^{\binom{N}{2}}.$$

Wie die Zahlen $A_{m, n}$ berechnet werden können, zeige ich im vierten Paragraphen.

Ähnliche Ausdrücke lassen sich auch für die Anzahl der Paarsysteme finden, die so beschaffen sind, daß jedes der gegebenen Dinge in 4, 5 u. s. w. der Paare vorkommt, die Komplikation nimmt aber rasch zu.

Eine Aufgabe etwas anderer Art, die ich mir gestellt habe, ist die folgende:

Die Anzahl der Arten zu finden, auf die n Dinge so zu m Systemen zusammengestellt werden können, daß jedes Ding in 2 der Systeme vorkommt, während 2 beliebige der Systeme höchstens 1 Ding gemein haben.

Es ist klar, daß dann jedes Ding zu einem der $\binom{m}{2}$ System-Paare gehört, und daher muß die gesuchte Zahl gleich

$$n! \frac{\binom{\binom{m}{2}}{n}}{\binom{\binom{m}{2} - n}} = \frac{\binom{m}{2}!}{\left(\binom{m}{2} - n\right)!}$$

sein. Verlangt man indessen, daß jedes System wenigstens 1 Ding enthalten soll, so wird die Zahl gleich

$$n! \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} \left(\binom{m-p}{2} \right)_n.$$

Dies muß dann auch die Anzahl der Arten sein, wie man m Dinge in n Paare stellen kann, wenn die Paare nach einander geordnet gedacht werden. Dies kann am leichtesten durch eine duale Umschreibung, von

der im nächsten Paragraphen die Rede sein wird, gesehen werden. Soll die Reihenfolge der Paare gleichgültig sein, so wird die Zahl natürlich zu

$$\sum_0^m (-1)^p \binom{m}{p} \binom{\binom{m-1}{2}}{n}$$

reduziert.

Beispiele:

1. $m = 4$, $n = 2$. Dann erhält man

$$\binom{6}{2} - \binom{4}{1} \binom{3}{2} = 15 - 12 = 3.$$

Es gibt auch in der Tat eben 3 Arten, 4 Dinge in 2 Paare zu stellen.

2. $m = 5$, $n = 3$. Man erhält

$$\binom{10}{3} - \binom{5}{1} \binom{6}{3} + \binom{5}{2} \binom{3}{3} = 120 - 100 + 10 = 30.$$

Man kann also auf 30 Arten 5 Dinge in 3 Paare stellen.

3. $m = 5$, $n = 2$. Man erhält in diesem Falle

$$\binom{10}{2} - \binom{5}{1} \binom{6}{2} + \binom{5}{2} \binom{3}{2} = 45 - 75 + 30 = 0.$$

Überhaupt wird natürlich

$$\sum_0^m (-1)^p \binom{m}{p} \binom{\binom{m-1}{2}}{n} = 0,$$

wenn $m > 2n$ ist.

Wir haben also gefunden, daß

$$\sum_0^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} \binom{\binom{p}{2}}{n}$$

die Anzahl der Arten ist, wie n Paare so aus m Dingen gebildet werden können, daß jedes Ding in mindestens einem der Paare vorkommt.

Allgemeiner ist

$$\sum_0^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} \binom{\binom{p}{\gamma}}{n}$$

die Anzahl der Arten m Dinge zu n verschiedenen Systemen zusammenzustellen, wenn jedes System γ Dinge enthalten soll.

Dies kann in folgender Weise bewiesen werden:

Die Anzahl der überhaupt möglichen Auswahlen von n γ -Systemen ist augenscheinlich

$$\binom{m}{\gamma}_n.$$

Die Anzahl derjenigen Auswahlen, bei denen p der m Dinge in keinem der γ -Systeme vorkommen, wird auf dieselbe Weise

$$\binom{m-p}{\gamma}_n.$$

Nach dem schon oft benutzten allgemeinen Prinzip erhält man dann, daß

$$\sum_0^m (-1)^p \binom{m}{p} \binom{m-p}{\gamma}_n = \sum_p (-1)^{m-p} \binom{m}{p} \binom{p}{\gamma}_n$$

die Zahl der Auswahlen ist, bei denen jedes Ding in einem der γ -Systeme vorkommt, w. z. bw. w.

Dies kann weiter verallgemeinert werden.

Wir können die Anzahl der Arten suchen, auf die n Dinge so zu m Systemen zusammengestellt werden können, daß jedes von n_1 der Dinge in γ_1 der Systeme vorkommt, jedes von n_2 der Dinge in γ_2 der Systeme vorkommt u. s. w., bis endlich jedes von n_μ der Dinge in γ_μ der Systeme vorkommt, während niemals 2 verschiedene Dinge, die in derselben Zahl von Systemen vorkommen, in eben denselben Systemen vorkommen. Außerdem soll $n_1 + n_2 + \dots + n_\mu = n$ sein.

Werden die Fälle mitgerechnet, wo eines oder mehrere der Systeme leer sind, wird die Anzahl gleich

$$\binom{m}{\gamma_1}_{n_1} \binom{m}{\gamma_2}_{n_2} \dots \binom{m}{\gamma_\mu}_{n_\mu} \cdot n!$$

Soll indessen jedes System wenigstens 1 Ding enthalten, so wird die gesuchte Zahl

$$\begin{aligned} n! \sum_0^m (-1)^p \binom{m}{p} \binom{m-p}{\gamma_1}_{n_1} \binom{m-p}{\gamma_2}_{n_2} \dots \binom{m-p}{\gamma_\mu}_{n_\mu} - \\ = n! \sum_0^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} \prod_{r=1}^{\mu} \binom{p}{\gamma_r}_{n_r}. \end{aligned}$$

Dies ist dann auch die Anzahl der Arten, wie man aus m Dingen n solche Systeme bilden kann, daß jedes Ding in mindestens einem der Systeme vorkommt, und weiter jedes von n_1 der Systeme γ_1 Dinge enthält, jedes von n_2 der Systeme γ_2 Dinge enthält u. s. w., bis endlich jedes der letzten n_μ Systeme γ_μ Dinge enthält, und die Systeme in einer Reihe geordnet gedacht werden. Soll aber die Reihenfolge gleichgültig sein, muß die Anzahl gleich

$$\sum_0^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} \prod_1^\mu \binom{p}{n_r}$$

werden.

Beispiele:

1. $m = 4$, $\mu = 2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Dann erhält man

$$\sum_0^4 (-1)^p \binom{4}{p} \binom{4-p}{2} \binom{4-p}{3} = 6.6 - 4.0 = 36.$$

Daß dies richtig ist, kann man auch leicht unmittelbar sehen.

2. $m = 5$, $\mu = 2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Dann wird die gesuchte Zahl

$$\sum_0^5 (-1)^p \binom{5}{p} \binom{5-p}{2} \binom{5-p}{3} = 10.45 - 5.6.6 = 450 - 180 = 270.$$

Dies soll also die Anzahl der Arten sein, innerhalb eines Systems von 5 Dingen 1 Paar und 2 Tripel so auszuwählen, daß jedes der 5 Dinge entweder in dem Paare oder in einem der Tripel vorkommt. Daß dies in der Tat richtig ist, läßt sich leicht durch folgende Betrachtungen nachweisen.

Erstens können die 2 Tripel so gewählt werden, daß sie zusammen alle 5 Dinge enthalten. Sobald das eine Tripel dann gewählt ist, kann das andere augenscheinlich auf 3 Arten gewählt werden. Das erste kann auf $\binom{5}{3} = 10$ Arten gewählt werden. Dies gibt also 30 Auswahlen der 2 Tripel, aber sie reduzieren sich doch auf 15, weil sie paarweise so zusammenhören, daß die beiden Tripel ihre Rollen austauschen. Weiter kann in diesen Fällen das Paar willkürlich gewählt werden, also auf $\binom{5}{2} = 10$ Arten. Es gibt deshalb im ganzen 150 Auswahlen von 1 Paar und 2 Tripeln von der Art, daß die 2 Tripel schon alle 5 Dinge enthalten.

Zweitens können die 2 Tripel so gewählt werden, daß sie zusammen nur 4 der 5 Dinge enthalten. Zuerst können dann diese 4 Dinge auf 5 Arten gewählt werden, und darauf können für jede dieser Auswahlen die 2 Tripel auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten gewählt werden. Dies gibt im ganzen $5 \cdot 6 = 30$ Auswahlen. Dann kann aber bei jeder dieser 30 Auswahlen das Paar auf 4 Arten gewählt werden. Also erhält man im ganzen $4 \cdot 30 = 120$ Auswahlen, wenn die 2 Tripel zusammen nur 4 Dinge enthalten.

Es gibt demnach $150 + 120 = 270$ mögliche Auswahlen in Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Resultat.

Ich will auch eine Variation der ersten Aufgabe dieses Paragraphen behandeln. Man kann die Anzahl der Paarsysteme suchen, die so beschaffen sind, daß jedes Paar aus einem der m Dinge a_1, a_2, \dots, a_m und einem der n Dinge b_1, b_2, \dots, b_n besteht, und sowohl jedes der m Dinge a wie jedes der n Dinge b in mindestens einem der Paare vorkommt. Durch ein Verfahren derselben Art wie in jener Aufgabe findet man, daß diese Zahl gleich

$$\sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n (-1)^{r+s} \binom{m}{r} \binom{n}{s} 2^{(m-r)(n-s)}$$

sein muß. Wenn man will, kann dies auch in folgenden Formen geschrieben werden:

$$\sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} (2^{m-r} - 1)^n \quad \text{oder} \quad \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} (2^{n-s} - 1)^m.$$

Es gibt auch sehr viele andere Arten von Aufgaben, die für Paarsysteme aufgestellt werden können. Ich gebe ein Beispiel. Man kommt oft dazu, Paarsysteme zu betrachten, die so beschaffen sind, daß, wenn sowohl (ab) wie (bc) Paare eines Systems sind, dann auch (ac) ein Paar desselben Systems ist. Solche Paarsysteme können »transitiv« genannt werden. Man kann nun versuchen, die Anzahl der transitiven Paarsysteme zu finden, die von n Dingen gebildet werden können. Dies ist nicht schwierig, wenn man nur von einer charakteristischen Eigenschaft der transitiven Systeme Gebrauch macht, nämlich der, daß die in einem solchen System enthaltenen Paare sich in gewissen disjunkten Teilsystemen so verteilen, daß die Paare innerhalb eines jeden dieser Teilsysteme die sämtlichen Paare sind, die von gewissen der gegebenen Dinge gebildet werden können. Man kann es auch in der Weise ausdrücken, daß die Paare eines transitiven Systems die sämtlichen Paare sind, die innerhalb eines jeden von gewissen disjunkten Teilen des ursprünglichen Systems

von Dingen gebildet werden können. Die transitiven Systeme gehören also in dieser Weise ein-eindeutig zu den verschiedenen Auswahlen von einem oder mehreren disjunkten Teilen des Systems der gegebenen Dinge — jedoch mit der Einschränkung, daß jeder Teil wenigstens 2 Dinge enthalten muß. Nun ist aber die Anzahl der Weisen, worauf man innerhalb eines Systems von n Dingen m disjunkte Teile, von denen jeder wenigstens 2 Dinge enthält, so wählen kann, daß sie zusammen r dieser n Dinge enthalten, gleich

$$\sum_0^m \sum_0^{m-q} \frac{(-1)^{p+q} (m-p-q)^{r-q}}{p! (m-p-q)!} \cdot \binom{r}{q}. \quad (\text{Vergl. S. 6})$$

Folglich ist die gesuchte Zahl gleich

$$\sum_1^{\left[\frac{n}{2} \right]} \sum_0^n \binom{n}{r} \sum_0^m \sum_0^{m-q} \frac{(-1)^{p+q} (m-p-q)^{r-q}}{p! (m-p-q)!} \binom{r}{q}.$$

Diese Formel kann etwas verkürzt werden, indem die Summation mit Rücksicht auf r ausgeführt werden kann. Man erhält dann

$$\sum_1^{\left[\frac{n}{2} \right]} \sum_0^m \sum_0^{m-q} \frac{(-1)^{p+q} n! (m+1-p-q)^{n-q}}{p! q! (m-p-q)! (n-q)!}.$$

§ 3.

Kombinatorische Reziprozitäten.

Es herrscht in der ganzen Theorie der Einteilungen und Gruppierungen ebenso wie auch der Paarsysteme, Tripelsysteme u. s. w. ein *Dualismus*, der sehr bemerkenswert ist. Er besteht in folgendem:

Hat man m Systeme, die von n Dingen gebildet sind, so kann man diese Systeme als m neue Dinge betrachten, und dann wird, wie ich schon früher erwähnt habe, die Verteilung der n Dinge in diesen m Systemen mit einem Paarsystem (von höchstens mn Paaren bestehend) gleichbedeutend sein. Wenn a_1, a_2, \dots, a_m die Systeme bezeichnen, und b_1, b_2, \dots, b_n die Dinge bezeichnen, so besteht das Paarsystem aus allen Paaren (a_r, b_s) , für welche b_s ein Element des Systems a_r ist. Nun kann man aber umgekehrt die n Dinge b_s als Systeme auffassen, die von den m Dingen a_r gebildet sind. Das System b_s besteht dann aus allen Dingen a_r , die mit b_s zusammen Paare des Paarsystems bilden, oder m. a. W., die als Systeme b_s

als Element enthalten. Zu jeder Zusammenstellung von n Dingen zu m Systemen gehört also in dieser Weise eine ganz bestimmte Gruppierung von m Dingen zu n Systemen. Dies ist die duale Umdeutung.

Ich will dies durch einige Beispiele erläutern:

Hat man 4 Dinge in den 3 folgenden Systemen verteilt

$$(abc)(abd)(acd),$$

so erhält man durch duale Umdeutung folgende Verteilung von 3 Dingen in 4 Systemen

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma).$$

Werden nämlich die 3 Systeme (abc) , (abd) , (acd) beziehungsweise α , β , γ genannt, so ist die gegebene Verteilung mit dem Paarsystem

$$(a\alpha)(b\alpha)(c\alpha)(a\beta)(b\beta)(d\beta)(a\gamma)(c\gamma)(d\gamma)$$

gleichbedeutend. Werden aber hier die Dinge a , b , c als Systeme aufgefaßt, so erhält man die Verteilung

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma).$$

Ist die Verteilung von 4 Dingen in 6 Systemen

$$(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)$$

gegeben, so erhält man durch duale Umdeutung folgende Verteilung von 6 Dingen in 4 Systemen

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\delta\epsilon)(\beta\delta\zeta)(\gamma\epsilon\zeta).$$

Indessen lassen sich natürlich auch andere Umdeutungen ausführen. Denn wenn jede Verteilung von n Dingen in m Systemen auch als ein Paarsystem von $m + n$ Dingen gebildet gedacht werden kann, so kann man diese Verteilung von $m + n$ Dingen in Paaren wieder dual umdeuten u. s. w. In dieser Weise kann man aus einer ursprünglich gegebenen Verteilung sogar unendlich viele andere Verteilungen ableiten. Diese Verteilungen werden allerdings von desto speziellerer Natur, je weiter der Prozeß getrieben wird.

Von größter Wichtigkeit ist die bloße duale Umdeutung. Ich will im folgenden einige Anwendungen von diesem Dualismus machen.

In § 1 fanden wir, daß

$$\sum (-1)^r \binom{m}{r} (m-r)^n$$

die Anzahl der Arten war, wie n Dinge zu m nicht-leeren Systemen, die unter einander disjunkt waren, zusammengestellt werden konnten.

Durch duale Umdeutung erhält man, daß dies auch die Anzahl der Arten sein muß, wie sich m Dinge derart in n Systeme stellen lassen, daß jedes System eben ein einziges der Dinge enthält (dann aber in der Weise, daß 2 oder mehrere Systeme ein Ding gemein haben können). Wir können auch sagen, daß es die Anzahl der Arten ist, m Dinge so an n Stellen zu setzen, daß jede Stelle von einem Ding besetzt ist, während jedes Ding auf einmal an zwei oder mehreren Stellen stehen kann. Man kann vielleicht am besten sagen, daß es die Anzahl aller von n Zeichen, unter denen es m ungleiche gibt, konstruierbaren Zeichenreihen ist.

Wir fanden auch die Anzahl der Arten, wie n Dinge so zu m disjunkten Systemen zusammengestellt werden konnten, daß jedes System mindestens γ Dinge enthielt. Dual entsprechend ist dies auch die Anzahl der Arten, wie man m Dinge so zu n Systemen zusammenstellen kann, daß jedes Ding in mindestens γ der Systeme vorkommt, während außerdem jedes System nur 1 Ding enthält. Dies ist also m. a. W. auch die Anzahl aller von n Zeichen gebildeten Zeichenreihen, wenn m dieser n Zeichen ungleich sind, und zu jedem Zeichen wenigstens $\gamma - 1$ andere damit gleiche Zeichen vorkommen.

Weiter fanden wir die Anzahl der Arten, wie n Dinge so zu m nicht-leeren Systemen zusammengestellt werden konnten, daß $p + 1$ beliebige der Systeme kein Ding gemein hatten. Dual entsprechend wird dies die Anzahl der Arten, wie man m Dinge so zu n Systemen zusammenstellen kann, daß jedes System mindestens 1 Ding und höchstens p Dinge enthält.

Allgemeiner ist

$$\sum_0^m (-1)^r \binom{m}{r} \left(\binom{m-r}{p} + \binom{m-r}{p+1} + \cdots + \binom{m-r}{p+q} \right)^n$$

die Anzahl der Arten, auf die man von n Dingen m nicht-leere Systeme so bilden kann, daß jedes Ding in mindestens p und in höchstens $p + q$ der Systeme vorkommt. Dual entsprechend ist dies dann auch die Zahl der Arten, von m Dingen n Systeme zu bilden, von denen jedes mindestens p und höchstens $p + q$ Dinge enthält.

Wünscht man die Anzahl der Einteilungen eines Systems von n Dingen in m disjunkte Teilsysteme, so daß jedes dieser Teilsysteme wenigstens p und höchstens $p + q$ Dinge enthält, zu wissen, so kann man dies am leichtesten durch Übergang zu der dual entsprechenden Aufgabe finden. Diese Aufgabe besteht darin, die Anzahl der Arten zu suchen, wie m Dinge so zu n Systemen zusammengestellt werden können, daß jedes dieser Systeme nur aus einem Ding besteht, während jedes der m Dinge in wenigstens p

und in höchstens $p+q$ der Systeme vorkommt. Bei jeder möglichen Wahl solcher Systeme wird dann jedes von einer gewissen Anzahl m_0 der m Dinge in eben p der Systeme vorkommen, jedes von m_1 der Dinge in $p+1$ der Systeme vorkommen u. s. w., zuletzt jedes von m der Dinge in $p+q$ der Systeme vorkommen, indem die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_0 + m_1 + \dots + m_q &= m \\ m_0 p + m_1(p+1) + \dots + m_q(p+q) &= n \end{aligned}$$

stattfinden müssen. Die Anzahl der möglichen Wahlen muß also gleich

$$\sum \frac{m!}{m_0! m_1! \dots m_q!} \cdot \frac{n!}{(p!)^{m_0} ((p+1)!)^{m_1} \dots ((p+q)!)^{m_q}}$$

sein, wenn die Summation über alle Werte von m_0, m_1, \dots, m_q , die den eben erwähnten Gleichungen genügen, ausgedehnt wird.

In dem besonders einfachen Falle $q=0$ muß, damit es möglich sein soll, $n=mp$ sein, und dann wird die betrachtete Zahl gleich $\frac{n!}{(p!)^m}$. In der Tat ist ja dies auch ein wohlbekannter Ausdruck der Zahl der Arten, wie $n=mp$ Dinge in m nacheinander geordneten disjunkten Systemen, jedes p Dinge enthaltend, gestellt werden können.

Ist $q=1$, wird $m_0 = m(p+1) - n$, $m_1 = n - mp$, und folglich ist

$$\frac{m!}{(m(p+1) - n)! (n - mp)!} \cdot \frac{n!}{(p!)^{m(p+1) - n} ((p+1)!)^{n - mp}}$$

die Anzahl der Arten von n Dingen m disjunkte Systeme, jedes entweder p oder $p+1$ Dinge enthaltend, zu bilden. Man erhält übrigens in jedem Falle $m(p+1) - n$ Systeme, die p Dinge enthalten, und $n - mp$ Systeme, die $p+1$ Dinge enthalten.

Ein noch komplizierteres Beispiel der dualen Korrespondenz ist folgendes:

Den Gruppierungen von n Dingen in m Systemen, von denen jedes wenigstens p und höchstens $p+q$ Dinge enthält, während jedes Ding in wenigstens p' und in höchstens $p'+q'$ der Systeme vorkommt, entsprechen dual die Gruppierungen von m Dingen in n Systemen, so daß jedes System wenigstens p' und höchstens $p'+q'$ Dinge enthält, während jedes Ding in wenigstens p und in höchstens $p+q$ der Systeme vorkommt.

In § 2 fanden wir die Anzahl der von n Dingen konstruierbaren Paarsysteme von solcher Beschaffenheit, daß jedes Ding in mindestens einem der Paare enthalten war. Dual entsprechend wird dies auch die

Anzahl der Arten sein, auf die es möglich ist, von $\binom{n}{2}$ Dingen n Systeme so zu bilden, daß jedes der $\binom{n}{2}$ Dinge entweder in keinem oder in eben zwei dieser Systeme vorkommt, während jedes System wenigstens 1 Ding und höchstens $n - 1$ Dinge enthält.

Allgemeiner werden die Gruppierungen von n Dingen in m -Systeme, so daß jedes Ding in mindestens einem dieser Systeme vorkommt, den Gruppierungen von $\binom{n}{m}$ Dingen in n Systemen, so daß jedes dieser Dinge entweder in keinem oder in m der Systeme vorkommt, und jedes System wenigstens 1 Ding und höchstens $\binom{n-1}{m-1}$ Dinge enthält, dual entsprechen.

Den Arten, wie man von n Dingen ein Paarsystem so bilden kann, daß jedes Ding in mindestens p der Paare vorkommt, entsprechen dual die Arten, auf die man von $\binom{n}{2}$ Dingen n Systeme so bilden kann, daß jedes System mindestens p und höchstens $n - 1$ Dinge enthält, während jedes der $\binom{n}{2}$ Dinge entweder in keinem oder in zwei der Systeme vorkommt.

Wir fanden in § 2 auch einen Ausdruck für die Anzahl der Arten, auf die m Dinge in n verschiedene Systeme, jedes γ Dinge enthaltend, gestellt werden konnten. Dies wird dann auch die Anzahl der Arten sein, auf die n Dinge so in m Systeme gestellt werden können, daß jedes der n Dinge in γ der Systeme vorkommt, niemals aber zwei Dinge in denselben γ Systemen vorkommen.

Übrigens habe ich schon in § 2 ein paar solche duale Umdeutungen gegeben.

Auch die letzte Aufgabe in § 2 die transitiven Paarsysteme betreffend kann dual umgedeutet werden. Jedem transitiven Paarsysteme von n Dingen gebildet entspricht nämlich dual eine Verteilung von $\binom{n}{2}$ Dingen in n Systemen, jedes aus höchstens $n - 1$ Dingen bestehend, so daß jedes der verteilten Dinge in keinem oder 2 der Systeme vorkommt, 2 beliebige der Systeme höchstens 1 Ding gemein haben, und endlich, wenn 2 der Systeme mit einem dritten ein Ding gemein haben, die 2 ersten auch ein Ding gemein haben.

Es ist interessant zu bemerken, daß die Gruppierungen von Dingen in Systeme in der Weise, daß 2 beliebige der Systeme höchstens 1 Ding gemein haben, dual ebensolchen Gruppierungen entsprechen.

Als einfaches Beispiel einer Art Selbst-dualität kann folgendes erwähnt werden:

Die Anzahl der Zusammenstellungen von m Dingen zu n Systemen, so daß jedes Ding in wenigstens einem der Systeme vorkommt, und jedes

System wenigstens 1 Ding enthält, während außerdem 2 beliebige der Systeme höchstens 1 Ding gemein haben, ist gleich der Anzahl der Zusammenstellungen von n Dingen zu m Systemen, so daß jedes Ding in wenigstens einem der Systeme vorkommt, jedes System wenigstens ein Ding enthält, und 2 beliebige der Systeme höchstens ein Ding gemein haben. Diese Anzahl ist also eine symmetrische Funktion von m und n .

Größere Bedeutung besitzt jedoch die duale Umdeutung in Aufgaben der Natur, die ich in den folgenden Paragraphen behandeln werde. Ich will schon hier einige Beispiele dafür geben.

Es ist klar, daß die Arten, wie man aus $2m$ Dingen $3m$ Paare bilden kann, so daß jedes Ding in 3 der Paare vorkommt, den Arten dual entsprechen, auf die man aus $3m$ Dingen $2m$ Tripel bilden kann, so daß jedes Ding in 2 der Tripel vorkommt, während 2 beliebige der Tripel höchstens 1 Ding gemein haben. Wird von Anordnungsverschiedenheiten abgesehen, so erhält man folgenden Satz:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Das } (3m)!\text{-fache der Anzahl} \\ \text{der Arten, auf die man aus } 2m \\ \text{Dingen Paare bilden kann, so daß} \\ \text{jedes Ding in 3 der Paare vor-} \\ \text{kommt (und 2 beliebige der Paare} \\ \text{haben natürlich höchstens ein Ding} \\ \text{gemein)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{dem } (2m)!\text{-fachen der Anzahl} \\ \text{der Arten, auf die man aus } 3m \\ \text{Dingen Tripel bilden kann, so daß} \\ \text{jedes Ding in 2 der Tripel vor-} \\ \text{kommt, während 2 beliebige der} \\ \text{Tripel höchstens ein Ding gemein} \\ \text{haben.} \end{array} \right.$$

Die Anzahl der Paare wird
in jedem Falle $3m$.

Die Anzahl der Tripel wird
in jedem Falle $2m$.

Ebenso kann man auch folgenden Satz aufstellen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Das } (4m)!\text{-fache der Anzahl} \\ \text{der Arten, auf die man aus } 3m \\ \text{Dingen } 4m \text{ Tripel so bilden kann,} \\ \text{daß jedes Ding in 4 der Tripel} \\ \text{vorkommt, während 2 beliebige} \\ \text{der Tripel höchstens 2 Dinge ge-} \\ \text{mein haben (die Tripel also ver-} \\ \text{schieden), und 4 beliebige der} \\ \text{Tripel höchstens 1 Ding gemein} \\ \text{haben} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{dem } (3m)!\text{-fachen der Anzahl} \\ \text{der Arten, auf die man aus } 4m \\ \text{Dingen } 3m \text{ Quadrupel so bilden} \\ \text{kann, daß jedes Ding in 3 der} \\ \text{Quadrupel vorkommt, während 2} \\ \text{beliebige der Quadrupel höchstens} \\ \text{3 Dinge gemein haben (die Qua-} \\ \text{drupel also verschieden), und 3} \\ \text{beliebige der Quadrupel höchstens} \\ \text{1 Ding gemein haben.} \end{array} \right.$$

Allgemeiner hat man, daß

$$\left. \begin{array}{l} \text{das } (qm)!\text{-fache der Anzahl der} \\ \text{Arten, wie man aus } pm \text{ Dingen} \\ qm \text{ } p\text{-Systeme so bilden kann, daß} \\ \text{jedes Ding in } q \text{ der } p\text{-Systeme} \\ \text{vorkommt, während 2 beliebige der} \\ p\text{-Systeme höchstens } p-1 \text{ Dinge} \\ \text{gemein haben, und } q \text{ beliebige der} \\ p\text{-Systeme höchstens 1 Ding gemein} \\ \text{haben,} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{dem } (pm)!\text{-fachen der Anzahl der} \\ \text{Arten, wie man aus } qm \text{ Dingen} \\ pm \text{ } q\text{-Systeme so bilden kann, daß} \\ \text{jedes Ding in } p \text{ der } q\text{-Systeme} \\ \text{vorkommt, während 2 beliebige der} \\ q\text{-Systeme höchstens } q-1 \text{ Dinge} \\ \text{gemein haben, und } p \text{ beliebige der} \\ q\text{-Systeme höchstens 1 Ding gemein} \\ \text{haben.} \end{array} \right.$$

Werden die Systeme nacheinander in einer Reihe geordnet gerechnet, und werden außerdem die Fälle mitgerechnet, wo 2 oder mehrere der Systeme gleich sind, also aus denselben Dingen bestehen, so erhält man einen weit einfacheren Reziprozitätssatz nämlich folgenden:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Die Anzahl der Arten, auf} \\ \text{die es möglich ist, von } pm \text{ Dingen} \\ qm \text{ } p\text{-Systeme so zu bilden, daß} \\ \text{jedes Ding in } q \text{ der } p\text{-Systeme} \\ \text{vorkommt,} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{der Anzahl der Arten, auf die} \\ \text{es möglich ist, aus } qm \text{ Dingen} \\ pm \text{ } q\text{-Systeme so zu bilden, daß} \\ \text{jedes Ding in } p \text{ der } q\text{-Systeme} \\ \text{vorkommt.} \end{array} \right.$$

Ich will hier keine weiteren Beispiele dieser Reziprozitäten angeben. In dem folgenden Paragraphen werden mehrere andere Anwendungen des Dualismus gemacht werden.

§ 4.

Über Systeme von Paaren, wenn für jedes Ding gegeben ist, in wie vielen Paaren es vorkommen soll.

Es wird in vielfacher Hinsicht von Interesse sein, die Systeme von Paaren näher zu betrachten, die aus gewissen gegebenen Dingen gebildet werden können, wenn es für jedes dieser Dinge gegeben ist, in wie vielen der Paare es vorkommen soll. Das Studium dieser Paarsysteme wird nämlich nicht nur für die Kombinatorik, sondern sogar auch für eine Wissenschaft außerhalb der Mathematik, nämlich für die Chemie, von Interesse sein. Dies kommt daher, daß die kombinatorischen Verhältnisse in den chemischen Molekülen — die Art, wie diese aus Atomen aufgebaut sind — ganz und gar auf solchen Paarsystemen beruhen. Ich will dies etwas näher erläutern.

Betrachtet man ein Molekül, in welchem nur einfache Bindungen auftreten, so definiert jede Bindung ein Paar von Atomen, und die sämtlichen Bindungen definieren also ein System von Paaren, so daß jedes Ding (Atom) in einer gewissen Anzahl der Paare vorkommt — es ist dies die Zahl, welche durch die chemische Valenz angegeben wird. Wenn alle Bindungen einfach sind, dann sind alle Paare voneinander verschieden, oder m. a. W. je zwei von ihnen haben höchstens ein Ding gemeinsam. Treten doppelte Bindungen auf, so bedeutet das nur, daß (wenigstens einmal) 2 Paare gleich werden; treten 3-fache Bindungen auf, so bedeutet das, daß (wenigstens einmal) 3 Paare gleich werden u. s. w. In jedem Falle erhält man ein Paarsystem, und die chemische Valenz eines Atoms gibt immer an, in wie vielen Paaren es vorkommt.

Wegen dieser chemische Deutung werde ich im folgenden von einem Ding sagen, daß es γ -wertig ist, wenn es in γ der Paare eines Paarsystems vorkommen soll. Weiter benutze ich oft die Ausdrucksweise, daß ein Ding mit einem anderen verbunden oder verknüpft ist, wenn beide zusammen ein Paar eines Paarsystems ausmachen.

Nun verdient es bemerkt zu werden, daß, während jedes chemische Molekül ein Paarsystem darstellt, doch nicht umgekehrt jedes Paarsystem als ein Molekül dargestellt werden kann. Dagegen kann jedes Paarsystem entweder als ein oder mehrere Moleküle in Vereinigung dargestellt werden. Dies gibt zu einer bedeutungsvollen Distinktion Anlaß.

Wir können ein Paarsystem *unzerlegbar* nennen, wenn es nicht in 2 völlig getrennte Paarsysteme geteilt werden kann, d. h. 2 solche Paarsysteme, daß jedes der in den Paaren des einen Paarsystems vorkommenden Dinge in keinem der Paare des anderen Paarsystems vorkommt. Wenn aber eine solche Teilung möglich ist, können wir das Paarsystem *zerlegbar* nennen. Jedes zerlegbare Paarsystem ist natürlich aus einer gewissen Zahl unzerlegbarer Paarsysteme zusammengesetzt.

Zuerst will ich Paarsysteme betrachten, in welchen jedes Ding entweder in 1 oder 2 der Paare vorkommt, und alle Paare voneinander verschieden sind.

Es sei $A_{n,p}$ die Anzahl der Paarsysteme, die aus $n + p$ Dingen so gebildet werden können, daß jedes von n bestimmten der $n + p$ Dinge in 2 der Paare vorkommt, während jedes der p übrigen Dinge in 1 der Paare vorkommt. Dann hat man folgende 2 Rekursionsformeln:

$$\text{I. } A_{n,p} = nA_{n-1,p} + (p-1)A_{n,p-2}$$

$$\text{II. } A_{n,p} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}A_{n-3,p+2} + (n-1)pA_{n-2,p} + \frac{p(p-1)}{2}A_{n-1,p-2}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen ist leicht einzusehen. Es sei e eines der einwertigen Dinge. Dann zerfallen die Paarsysteme in zwei Klassen: Erstens die, in welchen e mit einem zweiwertigen Ding, und zweitens die, in welchen e mit einem der anderen einwertigen Dinge verbunden ist. Im ersteren Falle kann das 2-wertige Ding auf n Arten gewählt sein; im zweiten Falle kann das andere 1-wertige Ding auf $p-1$ Arten gewählt sein. Wird dann das e enthaltende Paar weggenommen, so erhält man im ersteren Falle ein aus $n-1$ 2-wertigen und p 1-wertigen Dingen gebildetes Paarsystem; im zweiten Falle erhält man ein Paarsystem, das aus n 2-wertigen und $p-2$ 1-wertigen Dingen gebildet ist. Hierdurch ist die Richtigkeit der Gleichung I bewiesen. Analog kann auch die Richtigkeit der Gleichung II bewiesen werden. Ist nämlich t eines der zweiwertigen Dinge, so kann es entweder mit 2 der anderen 2-wertigen Dinge, die dann auf $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Arten gewählt sein können, oder mit einem der anderen 2-wertigen und einem 1-wertigen Dinge, die dann auf $(n-1)p$ Arten gewählt sein können, oder endlich mit 2 1-wertigen Dinge, die auf $\frac{p(p-1)}{2}$ Arten gewählt sein können, verbunden sein. Durch Wegnahme der zwei t enthaltende Paare erhält man im ersten Falle ein Paarsystem mit $n-3$ 2-wertigen und $p+2$ 1-wertigen, im zweiten Falle ein System mit $n-2$ 2-wertigen und p 1-wertigen, und endlich im dritten Falle ein System mit $n-1$ 2-wertigen und $p-2$ 1-wertigen Dingen. Hierdurch ist auch die Gleichung II bewiesen.

Der Beweis setzt jedoch voraus, daß in Gleichung I $p > 0$ und in Gleichung II $n > 0$ ist.

Mit Hilfe der Gleichung I lassen sich alle Zahlen $A_{n,p}$ durch die Zahlen $A_{n,0}$ und $A_{0,p}$ ausdrücken. Es ist übrigens leicht zu sehen, daß immer $A_{n,p} = 0$ ist, wenn p eine ungerade Zahl ist, so daß man sich auf den Fall beschränken kann, wo p eine gerade Zahl ist. Wenn das Paarsystem aus n 2-wertigen und p 1-wertigen Dingen gebildet ist, muß ja die Anzahl der Paare gleich $n + \frac{p}{2}$ sein, so daß p gerade sein muß. Wir können deshalb gerne $2p$ statt p in unseren Gleichungen I und II schreiben. Setzt man außerdem

$$A_{n,2p} = n! (2p-1)(2p-3) \cdots 3 \cdot 1 \cdot B_{n,2p},$$

so erhält man für die Zahlen $B_{n,2p}$ folgende einfache Rekursionsformel:

$$B_{n,2p} = B_{n-1,2p} + B_{n,2p-2}.$$

Aus dieser erhält man

$$B_{n,2p} = B_{n,2p-2} + B_{n-1,2p-2} + \cdots + B_{1,2p-2} + B_{0,2p},$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung findet man

$$B_{n,2p} = \sum_r^{n-1} \binom{r+p-1}{p-1} B_{n-r,0} + \sum_s^{p-1} \binom{n-1+s}{s} B_{0,2p-2s},$$

oder, wenn wieder die Zahlen A eingeführt werden:

$$\begin{aligned} A_{n,2p} &= (2p-1)(2p-3) \cdots 3 \cdot 1 \sum_r^{n-1} \frac{n!}{r!(n-r)!} \binom{r+p-1}{p-1} A_{n-r,0} + \\ &+ n! \sum_s^{p-1} \binom{n-1+s}{s} (2p-1)(2p-3) \cdots (2p-2s+1) A_{0,2p-2s}, \end{aligned}$$

wodurch also die Zahlen $A_{n,2p}$ durch Zahlen $A_{n,0}$ und $A_{0,2p}$ ausgedrückt werden.

Für die Zahl $A_{0,2p}$ ist es leicht, einen independenten Ausdruck anzugeben, da sie ja die Anzahl der Arten ist, $2p$ Dinge in p Paare zu stellen, von denen je zwei disjunkt sind. Man hat also

$$A_{0,2p} = \frac{(2p)!}{p! \cdot 2^p}.$$

Für die Zahl $A_{n,0}$ ist es wohl nicht leicht, einen einfachen independenten Ausdruck zu finden. Wir werden allerdings später einen independenten Ausdruck finden; er ist aber ziemlich kompliziert. Dann kann es aber von einem gewissen Interesse sein zu sehen, daß man für diese Zahlen $A_{n,0}$ eine einfache Rekursionsformel angeben kann. Aus II folgt nämlich

$$B_{n,0} = \frac{1}{2n} \cdot B_{n-3,2},$$

und da

$$B_{n-3,2} = B_{n-3,0} + B_{n-4,0} + \cdots + B_{1,0} + B_{0,2},$$

wird

$$\begin{aligned} B_{n,0} &= \frac{1}{2n} (B_{n-3,0} + B_{n-4,0} + \cdots + B_{1,0} + B_{0,2}) = \\ &= \frac{1}{2n} B_{n-3,0} + \frac{n-1}{n} B_{n-1,0}. \end{aligned}$$

Für die Zahlen $A_{n,0}$ erhält man also folgende Rekursionsformel:

$$A_{n,0} = (n-1)A_{n-1,0} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}A_{n-3,0}.$$

Um diese Sachen noch genauer zu studieren, können wir versuchen, für die Anzahl der Paarsysteme, die aus einer bestimmten Zahl unzerlegbarer Paarsysteme bestehen, Ausdrücke zu finden. Es sei dann $A_{n,2p}^q$ die Zahl der Paarsysteme von n 2-wertigen und $2p$ 1-wertigen Dingen gebildet, die aus eben q unzerlegbaren Paarsystemen bestehen.

Dann bestehen folgende Rekursionsformeln:

$$\text{III} \quad \begin{cases} A_{n,2p}^q = nA_{n-1,2p}^q + (2p-1)A_{n,2p-2}^{q-1} & \text{Gültig, wenn } p > 0 \text{ ist.} \\ A_{n,0}^q = \binom{n-1}{2} A_{n-3,2}^q \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden in derselben Weise wie die Gleichungen I und II gefunden. Die erste Gleichung in III wird durch Wegnahme des ein gewisses einwertiges Ding enthaltenden Paares von dem Paarsystem bewiesen. Die zweite Gleichung wird durch Wegnahme der 2 Paare, die ein gewisses 2-wertiges Ding enthalten, gefunden.

Ich behaupte jetzt, daß

$$A_{n,0}^q = \frac{(n-1)!}{2} S_{n-3}^q \quad \text{und} \quad A_{n,2}^q = n! S_n^q,$$

wenn

$$S_n^q = \sum_{3(q-1)}^n \frac{1}{2r_{q-1}} \sum_{3(q-2)}^{r_{q-1}-3} \frac{1}{2r_{q-2}} \cdots \sum_6^{r_{q-3}-3} \frac{1}{2r_2} \sum_3^{r_2-3} \frac{1}{2r_1}.$$

Der Beweis kann durch Induktion geführt werden. Nimmt man nämlich an, daß diese Ausdrücke für ein gewisses Wertepaar (n, q) und außerdem für alle n für geringere Werte von q und für alle kleinere Werte von n für denselben Wert von q gültig sind, so erhält man aus III

$$A_{n+1,0}^q = \binom{n}{2} A_{n-2,2}^q = \binom{n}{2} (n-2)! S_{n-2}^q = \frac{n!}{2} S_{n-2}^q,$$

$$\begin{aligned} A_{n+1,2}^q &= (n+1)A_{n,2}^q + A_{n+1,0}^{q-1} = (n+1)! S_n^q + \frac{n!}{2} S_{n-2}^{q-1} = \\ &= (n+1)! \left(S_n^q + \frac{1}{2(n+1)} S_{n-2}^{q-1} \right). \end{aligned}$$

Indessen ist, wie leicht zu sehen

$$S_{n+1}^q = S_n^q + \frac{1}{2(n+1)} S_{n-2}^{q-1},$$

und folglich wird

$$A_{n+1,2}^q = (n+1)! S_{n+1}^q.$$

Weiter sieht man sofort, daß die Ausdrücke richtig für $n=0$ sind.

Hierdurch ist dann bewiesen, daß falls diese Ausdrücke für $A_{n,0}^q$ und $A_{n,2}^q$ für alle Werte von n , wenn $q < q'$ ist, gültig sind, sie auch für alle Werte von n gültig sind, wenn $q = q'$ ist. Da sie nun auch unzweifelhaft für $q = 1$ gültig sind, indem

$$A_{n,0} = \frac{(n-1)!}{2} \quad \text{und} \quad A_{n,2}^1 = n!,$$

wie man leicht findet, so sind sie also allgemein gültig.

Mit Hilfe dieses Resultats können wir einen independenten Ausdruck der früher betrachteten Zahl $A_{n,0}$ aufstellen. Es ist nämlich

$$A_{n,0} = \sum_q A_{n,0} = \sum_q \frac{(n-1)!}{2} S_{n-3}^q.$$

Die Summation mit Rücksicht auf q ist über alle Werte von $q=1$ bis zu der größten $\frac{n}{3}$ nicht überschreitenden Zahl auszudehnen; denn man sieht, daß $A_{n,0}^q = 0$ ist, wenn $q > \frac{n}{3}$.

Es ist mir auch gelungen, einen independenten Ausdruck für $A_{n,2p}^q$ zu finden, wenn $p > 1$ ist, nämlich den folgenden:

$$A_{n,2p}^q = 3.5 \cdots (2p-1) \cdot n! \sum_r^{n-3(q-p)} \binom{r+p-2}{p-2} S_{n-r}^{q-p+1}.$$

Der Beweis kann durch vollständige Induktion geführt werden. Wir können annehmen, daß die Formel für alle n , wenn q und p beziehungsweise kleiner als ein gewisser Wert von q und ein gewisser Wert von p sind, gültig ist, und weiter auch, daß sie für diese letzteren Werte von p und q gültig ist, wenn nur n kleiner als ein gewisser Wert ist. Dann erhält man aus der ersten Gleichung in III

$$\begin{aligned} A_{n,2p}^q &= n \cdot 3.5 \cdots (2p-1) \cdot (n-1)! \sum_r^{n-1-3(q-p)} \binom{r+p-2}{p-2} S_{n-1-r}^{q-p+1} + \\ &+ (2p-1) \cdot 3.5 \cdots (2p-3) \cdot n! \sum_r^{n-3(q-p)} \binom{r+p-3}{p-3} S_{n-r}^{q-p+1} = \\ &= 3.5 \cdots (2p-1) \cdot n! \left(\sum_1^{n-3(q-p)} \binom{r+p-3}{p-2} S_{n-r}^{q-p+1} + \sum_0^{n-3(q-p)} \binom{r+p-3}{p-3} S_{n-r}^{q-p+1} \right) \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\binom{r+p-3}{p-2} + \binom{r+p-3}{p-3} = \binom{r+p-2}{p-2},$$

und folglich wird

$$A_{n, 2p}^q = 3 \cdot 5 \cdots (2p-1) \cdot n! \sum_r^{n-3(q-p)} \binom{r+p-2}{p-2} S_{n-r}^{q-p+1}.$$

Da die Formel außerdem für $n=0$ immer richtig ist, so wird sie also auch für die betrachteten Werte von p und q für jeden Wert von n gültig. Da sie auch für alle Werte von $p > 1$ gültig ist, wenn $q=1$ ist, und für alle Werte von q gültig ist, wenn $p=1$ ist, so ist sie immer gültig, wenn $p \geq 1$ ist.

Man kann natürlich auch Paarsysteme, aus 1- und 2-wertigen Dingen gebildet, deren Paare nicht alle verschieden sind, studieren. Indessen liefert dies nichts eigentlich Neues; denn es kann alles leicht auf das vorhergehende zurückgeführt werden. Mehr als 2 Paare auf einmal können nicht gleich werden, und falls 2 Paare gleich sind, so sind beide darin enthaltenen Dinge also zweiwertig. Es ist dann klar, daß die Anzahl der von n 2-wertigen und p 1-wertigen Dingen gebildeten Paarsysteme, für die es γ Mal eintritt, daß 2 Paare gleich sind, gleich

$$\frac{n!}{2^\gamma \cdot \gamma! (n-2\gamma)!} A_{n-2\gamma, p}$$

sein muß, wenn A_{m_2, m_1} wie früher die Anzahl der Paarsysteme, aus nur verschiedenen Paaren bestehend, die von m_2 2-wertigen und m_1 1-wertigen Dingen gebildet werden können, bedeutet.

Ich gehe jetzt dazu über, die aus ein-, zwei- und dreiwertigen Dingen gebildeten Paarsysteme zu behandeln, wobei ich zuerst voraussetze, daß je zwei Paare höchstens 1 Ding gemein haben.

Es sei dann $A_{m, n, p}$ die Anzahl der von $m+n+p$ Dingen konstruierbaren Paarsysteme, die so beschaffen sind, daß jedes von m bestimmten der Dinge in 3 Paaren vorkommt, jedes von n anderen bestimmten der Dinge in 2 Paaren, und endlich jedes der p übrigen Dinge in einem Paare vorkommt.

Dann bestehen folgende Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } A_{m,n,p} &= mA_{m-1,n+1,p-1} + nA_{m,n-1,p} + (p-1)A_{m,n,p-2} . \\
 \text{II. } A_{m,n,p} &= \frac{m(m-1)}{2} A_{m-2,n+1,p} + m(n-1)A_{m-1,n-1,p+1} + mpA_{m-1,n,p-1} + \\
 &+ \frac{(n-1)(n-2)}{2} A_{m,n-3,p-2} + (n-1)pA_{m,n-2,p} + \frac{p(p-1)}{2} A_{m,n-1,p-2} . \\
 \text{III. } A_{m,n,p} &= \binom{m-1}{3} A_{m-4,n+3,p} + \binom{m-1}{2} nA_{m-3,n+1,p+1} + \\
 &+ (m-1) \binom{n}{2} A_{m-2,n-1,p+2} + \binom{n}{3} A_{m-1,n-3,p+3} + \binom{m-1}{2} pA_{m-3,n+2,p-1} + \\
 &+ (m-1)npA_{m-2,n,p} + \binom{n}{2} pA_{m-1,n-2,p+1} + (m-1) \binom{p}{2} A_{m-2,n+1,p-2} + \\
 &+ n \binom{p}{2} A_{m-1,n-1,p-1} + \binom{p}{3} A_{m-1,n,p-3} .
 \end{aligned}$$

Der Beweis wird dadurch geführt, daß man von dem Paarsystem das (die) Paar(e), in dem (denen) ein bestimmtes der ein-, zwei- oder dreiwertigen Dinge vorkommt, wegnimmt.

Will man diese Formeln zu wirklicher Ausrechnung der Zahlen $A_{m,n,p}$ benutzen, so braucht man übrigens nicht II und III in dieser vollständigen Gestalt. Man kann statt II und III die beiden Gleichungen

$$\text{II' } A_{m,n,0} = \frac{m(m-1)}{2} A_{m-2,n+1,0} + m(n-1)A_{m-1,n-1,1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} A_{m,n-3,0}$$

$$\text{III' } A_{m,0,0} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} A_{m-4,3,0}$$

benutzen.

Mit Hilfe der Gleichung I kann ja jede Zahl $A_{m,n,p}$ durch Zahlen der Form $A_{m,n,0}$ ausgedrückt werden. Mit Hilfe der Gleichungen I und II' zusammen lassen sich wieder alle diese Zahlen auf Zahlen der Form $A_{m,0,0}$ zurückführen. Durch Anwendung aller drei Gleichungen I, II', III' können folglich alle Zahlen $A_{m,n,p}$ gefunden werden. Man braucht natürlich diese Formeln nicht weiter zu benutzen, als bis man hinreichend kleine Indizes erhalten hat, um unmittelbar die Werte der Zahlen sehen zu können.

Beispiel: Ausrechnung von $A_{3,2,1}$.

$$\begin{aligned}
 A_{3,2,1} &= 3A_{2,3,0} + 2A_{3,1,1}; \quad A_{3,1,1} = 3A_{2,2,0} + A_{3,0,1}; \quad A_{2,3,0} = A_{0,4,0} + \\
 &+ 4A_{1,2,1} + A_{2,0,2}; \quad A_{2,2,0} = A_{0,3,0} + 2A_{1,1,1}; \quad A_{3,0,1} = 3A_{2,1,0}; \quad A_{2,0,2} = \\
 &+ 2A_{1,1,1} + A_{2,0,0}.
 \end{aligned}$$

Weiter braucht man die Rechnung nicht fortzusetzen; denn man sieht unmittelbar, daß $A_{1,1,1} = 0$, $A_{2,0,0} = 0$, $A_{2,1,0} = 0$ und $A_{1,2,1} = 1$ ist. Die Zahlen $A_{0,n,p}$ sind früher behandelt worden. Man hat (S. p. 34) $A_{0,3,0} = 1$ und $A_{0,4,0} = \frac{3!}{2} = 3$. Also wird

$$A_{2,2,0} = 1, \quad A_{3,1,1} = 3, \quad A_{2,3,0} = 7, \quad \text{und endlich} \quad A_{3,2,1} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 27.$$

Die Zahlen A wachsen sehr schnell bei wachsender Anzahl der gegebenen Dinge. So hat man

$$A_{4,0,0} = 1, \quad A_{6,0,0} = 70, \quad A_{8,0,0} = 19355, \quad A_{10,0,0} = 11180820, \\ A_{12,0,0} = 11555272575.$$

Man kann auch für diese Zahlen $A_{m,n,p}$ andere Rekursionsformeln angeben. Zum Beispiel ist

$$\text{IV. } A_{m,n,p} = \frac{1}{6} (A_{m-1,n,p+3} - 3(m-1)A_{m-2,n,p+2} - 3A_{m-1,n,p+1} - \\ - 3mA_{m-1,n-1,p+1} + 2(m-1)A_{m-2,n,p}).$$

Diese Gleichung kann dadurch bewiesen werden, daß man eins der dreiwertigen Dinge durch 3 einwertige ersetzt. Die letzteren müssen dann augenscheinlich der Bedingung unterworfen werden, daß sie mit 3 verschiedenen Dingen verbunden sind, und daß nicht zwei von ihnen miteinander verbunden sind.

Ohne diese Bedingung würde die Anzahl gleich $A_{m-1,n,p+3}$ gewesen sein. In einigen von diesen Paarsystemen sind aber 2 der 3 neuen einwertigen Dinge mit ein und demselben Ding verbunden, und dieses Ding ist entweder dreiwertig, was auf $m-1$ Arten möglich ist, oder zweiwertig, was auf n Arten möglich ist. Weiter können auch die zwei der drei neuen Dinge, die mit demselben Ding verbunden sind, auf 3 Arten gewählt werden. Also müssen $3(m-1)A_{m-2,n,p+2}$ und $3mA_{m-1,n-1,p+1}$ subtrahiert werden. Indessen können auch alle drei neuen einwertigen Dinge mit demselben Ding verknüpft sein. Dieses Ding muß dann dreiwertig sein. Die Paarsysteme, für welche dies eintritt, werden bei der Subtraktion der Zahl $3(m-1)A_{m-2,n,p+2}$ dreimal subtrahiert. Folglich muß ihre Anzahl wieder zweimal addiert werden, d. h. man muß die Zahl $2(m-1)A_{m-2,n,p}$ addieren. Endlich muß die Zahl $3A_{m-1,n,p+1}$ subtrahiert werden; denn sie ist die Anzahl der Paarsysteme, in denen zwei der drei neuen Dinge miteinander verbunden vorkommen. Alles muß zuletzt durch 6 dividiert werden; denn werden wieder die drei einwertigen Dinge durch das alte dreiwertige Ding ersetzt, so geben die 6 Anordnungen der drei Dinge dasselbe Resultat.

Durch wiederholte Anwendung dieser letzten Formel kann jede Zahl $A_{m,n,p}$ durch Zahlen der Form $A_{0,n,p}$ ausgedrückt werden. Die letzten sind oben behandelt worden.

Wenn ein Paarsystem aus m dreiwertigen, n zweiwertigen und p einwertigen Dingen gebildet ist, so wird die Anzahl der Paare des Systems gleich

$$\frac{3m + 2n + p}{2}.$$

Hieraus folgt, daß $m + p$ immer eine gerade Zahl sein muß, oder m. a. W., es ist immer $A_{m,n,p} = 0$, wenn $m + p$ ungerade ist. Andererseits ist bis auf 8 Ausnahmen $A_{m,n,p}$ immer von Null verschieden, wenn $m + p$ gerade ist¹. Die Ausnahmen sind

$$A_{0,1,0}, \quad A_{0,2,0}, \quad A_{1,0,1}, \quad A_{1,1,1}, \quad A_{2,0,2}, \quad A_{2,0,0}, \quad A_{2,1,0}, \quad A_{3,0,1}.$$

Die Zahl $A_{m,n,p}$ wurde oben definiert als die Anzahl der Paarsysteme, die von $m + n + p$ Dingen so gebildet sind, daß m bestimmte der Dinge in 3 Paaren, n bestimmte Dinge in 2 Paaren, und endlich die p übrigen Dinge in 1 Paar vorkommen. Wenn es aber nicht gegeben ist, *welche* m Dinge in 3 Paaren vorkommen sollen, und auch nicht, *welche* Dinge in 2 Paaren vorkommen sollen, so wird die Anzahl der möglichen Paarsysteme gleich

$$\frac{(m + n + p)!}{m! \, n! \, p!} A_{m,n,p}.$$

Durch duale Umdeutung können wir hieraus folgenden Satz gewinnen:

Die Anzahl der Arten, auf die man aus $\frac{3m + 2n + p}{2}$ Dingen ein System von m Tripeln n Paaren und p »Einsen« (d. h. Systeme, die nur ein Ding enthalten) so bilden kann, daß jedes Ding in eben 2 dieser Tripel, Paare oder Einsen vorkommt, und 2 beliebige der Tripel und Paare höchstens ein Ding gemein haben, ist gleich

$$\frac{\left(\frac{3}{2}m + n + \frac{1}{2}p\right)!}{m! \, n! \, p!} A_{m,n,p}.$$

Setzt man $n = p = 0$, so erhält man einen der auf Seite 28 erwähnten Sätze.

Ich will jetzt zu Aufgaben speziellerer und komplizierterer Natur übergehen.

¹ Dies folgt sofort aus einem ähnlichen Satze des nächsten Paragraphen.

Es sei $B_{m,n,p}$ die Anzahl der Paarsysteme, die von m dreiwertigen, n zweiwertigen und p einwertigen Dingen so gebildet werden können, daß niemals zwei zweiwertige Dinge miteinander verbunden vorkommen. Man hat dann

$$\text{V. } B_{m,n,p} = mB_{m-1,n+1,p-1} + 2mmB_{m-1,n,p-1} + mm(n-1)B_{m-1,n-1,p-1} + \\ + nB_{m,n-1,p} + (p-1)B_{m,n,p-2}.$$

$$\text{VI. } B_{m,n,p} = \left(\frac{3}{2}m - n + \frac{p}{2} + 1\right)B_{m,n-1,p} + m(m-1)(B_{m-2,n,p} + \\ + 2(n-1)B_{m-2,n-1,p} + (n-1)(n-2)B_{m-2,n-2,p}) + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{2}(B_{m-3,n-1,p+1} + 2(n-1)B_{m-3,n-2,p+1} + \\ + (n-1)(n-2)B_{m-3,n-3,p+1}) + \frac{m(m-1)}{2}(n-1)B_{m-2,n-2,p}.$$

$$\text{VII. } B_{m,0,0} = \binom{m-1}{3}(B_{m-4,3,0} + 6B_{m-4,2,0} + 6B_{m-4,1,0} + B_{m-4,0,0} + \\ + 3(m-4)B_{m-5,1,1} + 3(m-4)B_{m-5,0,1}).$$

Zur Ausrechnung der Zahlen B braucht man nur den Spezialfall $p=0$ der zweiten Gleichung in Verbindung mit der ersten und dritten zu benutzen.

Die erste dieser Gleichungen wird durch Wegnahme der Paares, in dem ein gewisses einwertiges Ding sich befindet, von dem Paarsystem bewiesen. Die zweite wird durch Wegnahme der zwei Paare, die ein gewisses zweiwertiges Ding enthalten, und darauffolgende Hinzufügung des Paares, das aus den zwei anderen in jenen Paaren vorkommenden Dingen gebildet werden kann, bewiesen. Die dritte Gleichung wird dadurch bewiesen, daß erstens

$$B_{m,0,0} = A_{m,0,0} = \binom{m-1}{3}A_{m-4,3,0},$$

und zweitens, wie man leicht feststellt:

$$A_{m-4,3,0} = B_{m-4,3,0} + 6B_{m-4,2,0} + 6B_{m-4,1,0} + B_{m-4,0,0} + \\ + 3(m-4)B_{m-5,1,1} + 3(m-4)B_{m-5,0,1}.$$

Diese Dinge werden von größerem Interesse, wenn man von der dualen Umdeutung Gebrauch macht. Man erhält nämlich dann, daß

$$\frac{\left(\frac{3}{2}m + n + \frac{1}{2}p\right)!}{m!n!p!} B_{m,n,p}$$

die Anzahl der Arten ist, auf die man von $\frac{3}{2}m + n + \frac{1}{2}p$ Dingen ein System von m Tripeln, n Paaren und p Einsen so bilden kann, daß jedes Ding in 2 der Tripel, Paare, Einsen steht — jedoch aber nie in 2 Paaren —, während außerdem zwei beliebige der Tripel und Paare höchstens ein Ding gemein haben.

Von besonderem Interesse ist der Fall $p = 0$. Dann kann der Satz in folgender Weise ausgesprochen werden, wenn man $2m$ statt m schreibt, da ja die Anzahl der dreiwertigen Dinge dann gerade sein muß:

Die Anzahl der von $3m + n$ Dingen so konstruierbaren Systeme von $2m$ Tripeln und n Paaren, daß jedes Ding entweder in 2 der Tripel oder sowohl in einem Tripel wie einem Paare vorkommt, während 2 beliebige der Tripel und ebenso ein beliebiges Tripel und ein beliebiges Paar höchstens ein Ding gemein haben, ist

$$\frac{(3m + n)!}{(2m)! n!} B_{2m, n, 0}.$$

Dann werden übrigens immer $2n$ der $3m + n$ Dingen in sowohl einem Tripel wie in einem Paar vorkommen, während die anderen $3m - n$ Dinge in zwei Tripel vorkommen werden. Die Anzahl der möglichen Arten, diese Tripel und Paare zu wählen, muß also das $\frac{(3m + n)!}{(3m - n)! (2n)!}$ -fache der Anzahl der Möglichkeiten, wenn es gegeben ist, welche $2n$ Dinge in sowohl einem Paare, wie einem Tripel vorkommen, sein. Umgekehrt muß die letzte Zahl gleich

$$\frac{(3m - n)! (2n)!}{(3m + n)!} \frac{(3m + n)!}{(2m)! n!} B_{2m, n, 0} = \frac{(3m - n)! (2n)!}{(2m)! n!} B_{2m, n, 0}$$

sein.

Beispiel: Ausrechnung von $B_{4, 3, 0}$.

$$B_{4, 3, 0} = 4B_{4, 2, 0} + 12(B_{2, 3, 0} + 4B_{2, 2, 0} + 2B_{2, 1, 0}) + \\ + 12(B_{1, 2, 1} + 4B_{1, 1, 1} + 2B_{1, 0, 1}) + 12B_{2, 1, 0}.$$

Es ist ohne weiteres klar, daß $B_{2, 1, 0}$, $B_{1, 1, 1}$, $B_{1, 0, 1}$ alle gleich null sind, weil die entsprechenden Zahlen A gleich null sind (S. p. 38). Man sieht auch leicht unmittelbar, daß $B_{1, 2, 1} = 0$ ist. Weiter ist

$$B_{2, 2, 0} = 2B_{2, 1, 0} + 2(B_{0, 2, 0} + 2B_{0, 1, 0}) + B_{0, 0, 0} = 1;$$

$$B_{2, 3, 0} = B_{2, 2, 0} + 2(B_{0, 3, 0} + 4B_{0, 2, 0} + 2B_{0, 1, 0}) + 2B_{0, 1, 0} = B_{2, 2, 0} = 1;$$

$$B_{4, 2, 0} = 5B_{4, 1, 0} + 12(B_{2, 2, 0} + 2B_{2, 1, 0}) + 12(B_{1, 1, 1} + 2B_{1, 0, 1}) + 6B_{2, 0, 0} = \\ = 5B_{4, 1, 0} + 12B_{2, 2, 0};$$

$$B_{4, 1, 0} = 6B_{4, 0, 0} + 12B_{2, 1, 0} + 12B_{1, 0, 1} = 6B_{4, 0, 0}.$$

Endlich ist $B_{4,0,0} - A_{4,0,0} = 1$. Folglich wird

$$B_{4,1,0} = 6. \quad B_{4,2,0} = 5.6 + 12 = 42. \quad B_{4,3,0} = 4.42 + 12.5 = 228.$$

Hieraus folgt, daß die Anzahl der Arten, auf die man aus 9 Dingen 4 Tripel und 3 Paare so bilden kann, daß jedes von 6 bestimmten dieser 9 Dinge sowohl in einem Paare als einem Tripel vorkommt, während jedes der 3 übrigen Dinge in zwei Tripel vorkommt, und niemals zwei Tripel und auch nicht ein Tripel und ein Paar mehr als ein Ding gemein haben, gleich

$$\frac{3!6!}{4!3!} \cdot 228 = 30 \cdot 228 = 6840$$

sein muß.

Verifikation:

Es seien die 9 Dinge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gegeben, und es können 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Dinge sein, welche in einem Paare und einem Tripel vorkommen sollen, während 7, 8, 9 in zwei Tripel vorkommen sollen. Dann hat man in der Tat folgende Möglichkeiten:

$$1) \quad (1, 7, 8) (2, 7, 9) (3, 5, 8) (4, 6, 9) (1, 3) (2, 4) (5, 6).$$

Durch Umordnung der Dinge 1, 2, ..., 6 einerseits und 7, 8, 9 anderseits erhält man hieraus im ganzen $\frac{6!}{2^3 \cdot 3!} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 2160$ verschiedene Möglichkeiten.

$$2) \quad (1, 7, 8) (2, 7, 9) (3, 5, 9) (4, 6, 8) (1, 3) (2, 4) (5, 6).$$

Durch Umordnungen erhält man hieraus 2160 verschiedene Möglichkeiten.

$$3) \quad (1, 7, 8) (2, 7, 9) (3, 5, 8) (4, 6, 9) (1, 2) (3, 4) (5, 6).$$

Durch Umordnungen erhält man hieraus 1080 Möglichkeiten.

$$4) \quad (1, 2, 3) (4, 7, 8) (5, 7, 9) (6, 8, 9) (1, 4) (2, 5) (3, 6).$$

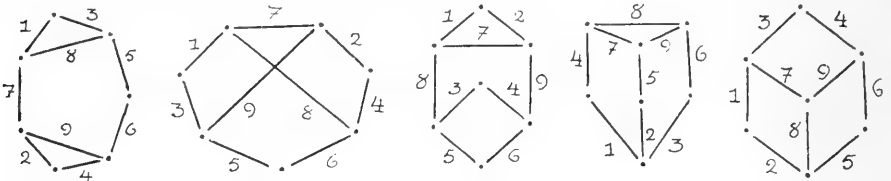
Durch Umordnungen erhält man hieraus 720 Möglichkeiten.

$$5) \quad (1, 3, 7) (2, 5, 8) (4, 6, 9) (7, 8, 9) (1, 2) (3, 4) (5, 6).$$

Durch Umordnungen erhält man hieraus 720 Möglichkeiten.

Natürlich gibt der Dualismus nicht nur ein Mittel, die Zahl 6840 zu finden, sondern auch ein Mittel dazu, diese verschiedenen möglichen Gruppierungen der 9 Dinge zu finden. Der Beweis der rekurrenten Gleichungen gibt ja an, in welcher Weise sich die möglichen Paarsysteme von m dreiwertigen, n zweiwertigen und p einwertigen Dingen von den Paarsystemen,

die von $m + n + p - 1$ Dingen gebildet sind, ableiten lassen. Dies habe ich in § 5 dazu benutzt, eine vollständige Tabelle der möglichen unzerlegbaren Paarsysteme, die für 1, 2 u. s. w. bis 8 Dinge gebildet werden können, aufzustellen. Hier will ich nur zeigen, wie die möglichen Arten, 4 Tripel und 3 Paare genannter Natur von den Dingen 1, 2, ..., 9 zu bilden, wirklich mit Hilfe des Dualismus aus den Arten, wie 4 dreiwertige und 3 zweiwertige Dinge so zusammengeknüpft werden können, daß niemals zwei zweiwertige miteinander verbunden sind, abgeleitet werden können. Die letzten Paarsysteme sind nämlich (wie aus der Tabelle im Ende des § 5 zu sehen ist) von den folgenden »Typen«



indem ich die Paarsysteme zu einem Typus zusammenfassen, die auseinander durch bloße Umordnung der Dinge abgeleitet werden können. In diesen Figuren bezeichnet jeder Punkt, von dem γ Striche ($\gamma = 1, 2, 3$) ausgehen, ein γ -wertiges Ding. Es gibt nun in jeder dieser Figuren 9 Striche oder Verbindungslinien zwischen den 7 Punkten. Werden diese mit den Zahlen 1, 2, ..., 9 numeriert, so wird jeder Punkt, von dem 3 Striche ausgehen, ein Tripel dieser Zahlen definieren, und ebenso jeder Punkt, von dem 2 Striche ausgehen, ein Paar definieren. Diesen 5 Typen von Paarsystemen entsprechen daher auf diese Weise 5 Typen von Systemen, die aus 4 Tripel und 3 Paare bestehen, und diese Typen sind eben gerade diejenigen, die ich oben angegeben habe. Wenn 7, 8, 9 in zwei Tripel vorkommen sollen, muß die Numerierung so ausgeführt werden, daß diese Zahlen an den Verbindungslinien zwischen zwei dreiwertigen Dingen zu stehen kommen, z. B. so wie an den Figuren gezeigt.

Ich will jetzt zeigen, wie die Zahl $B_{2m,n,0}$ durch die vorher behandelten Zahlen $A_{m,n,p}$ ausgedrückt werden können.

In jedem System, aus $2m$ dreiwertigen und n zweiwertigen Dingen gebildet, worin niemals zwei zweiwertige Dinge zusammengeknüpft sind, muß jedes zweiwertige Ding mit zwei dreiwertigen verbunden sein. Wird jedes zweiwertige Ding entfernt und die damit verknüpften dreiwertigen Dinge dann unmittelbar verbunden, so erhält man augenscheinlich ein dem ursprünglichen System entsprechendes System von nur dreiwertigen Dingen, allerdings aber derart, daß doppelte und dreifache Bindungen vorkommen können. Einem jeden solcher Systeme von $2m$ dreiwertigen Dingen entsprechen

$$n! \sum_{\gamma} \sum_{\varrho} \binom{\mu}{\gamma} \binom{\mu_3}{\varrho} \binom{3m - 2\mu - 3\mu_3}{n - \mu - 2\mu_3 - \gamma - \varrho} \frac{1}{2^{\gamma}} \cdot \frac{1}{3^{\varrho}} \cdot \frac{1}{2^{\mu_3}}$$

der ersten Systeme, wenn μ die Anzahl der doppelten und μ_3 die Anzahl der dreifachen Bindungen ist, da ja dieser Ausdruck die Anzahl der Arten angibt, auf welche n Dinge so an $3m$ Stellen gesetzt werden können, daß jede Stelle von höchstens einem Ding besetzt ist, und außerdem mindestens eine der Stellen in jedem von gewissen μ Paaren von Stellen und auch jede von mindestens zwei der Stellen in jedem von gewissen μ_3 Tripel der Stellen von einem Ding besetzt ist. Es kommt dann weiter darauf an, die Anzahl der von $2m$ dreiwertigen Dingen gebildeten Systeme mit μ doppelten und μ_3 dreifachen Bindungen zu finden. Erstens muß diese Zahl gleich dem

$$\frac{(2m)!}{(2m - 2\mu_3)! (2\mu_3)!} \cdot \frac{(2\mu_3)!}{2^{\mu_3} \cdot \mu_3!} -$$

fachen der Anzahl der Systeme mit μ doppelten aber keinen dreifachen Bindungen sein, die von $2m - 2\mu_3$ dreiwertigen Dingen gebildet werden können. Wenn jetzt μ_1 dieser doppelten Bindungen zwei dreiwertige Dinge, die außerdem beide mit einem dritten dreiwertigen Dinge verbunden sind, zusammenknüpfen, so wird jede der übrigen $\mu'_2 = \mu - \mu_1$ doppelten Bindungen zwei dreiwertige Dinge, die weiter mit zwei verschiedenen dreiwertigen Dingen verbunden sind, zusammenknüpfen. Jedes der μ_1 ersten doppelgebundenen Paare dreiwertiger Dinge können wir uns mit dem damit verbundenen dritten Ding zu einem einwertigen Ding vereinigt denken, während die μ'_2 Paare doppelgebundener Dinge μ'_2 zweiwertige Radikale ausmachen. Nun kann es aber μ_4 Mal eintreten, daß zwei der μ'_2 zweiwertigen Radikale wieder miteinander doppel verbunden sind. Dann spalten sich μ_4 geschlossene Systeme (Moleküle) ab. Die anderen $\mu_2 = \mu'_2 - 2\mu_4$ der μ'_2 zweiwertigen Radikale sind dann mit nur einfachen Bindungen miteinander oder mit anderen Dingen verknüpft. Wir erhalten dann ein System von $2m - 3\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3 - 4\mu_4$ dreiwertigen, μ_2 zweiwertigen und μ_1 einwertigen Dingen mit nur einfachen Bindungen. Umgekehrt werden jedem solchen Systeme so viele Systeme von $2m - 2\mu_3$ dreiwertigen Dingen entsprechen als die Anzahl der Weisen $2m - 2\mu_3$ Dinge in 4 Gruppen einzuteilen, die beziehungsweise $2m - 3\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3 - 4\mu_4$, $3\mu_1$, $2\mu_2$ und $4\mu_4$ Dinge enthalten, multipliziert mit der Anzahl der Weisen, worauf $2\mu_2$ Dinge in μ_2 Paare und gleichzeitig $3\mu_1$ andere Dinge in μ_1 Tripel und $4\mu_4$ Dinge in μ_4 Quadrupel verteilt werden können, und endlich alles mit $2^{\mu_2} 3^{\mu_1} 6^{\mu_4}$ multipliziert, wobei der letzte Faktor die Anzahl der verschiedenen Arrangements innerhalb der μ_2 Paare und μ_1 Tripel und μ_4

Quadrupel ist. Die Anzahl der entsprechenden Systeme von $2m - 2\mu_3$ dreiwertigen Dingen wird dann

$$\frac{(2m - 2\mu_3)!}{(2m - 3\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3 - 4\mu_4)! \mu_1! \mu_2! \mu_4!} \cdot \frac{1}{2^{\mu_1} 4^{\mu_4}}.$$

Die Anzahl der von $2m$ dreiwertigen Dingen mit μ doppelten und μ_3 dreifachen Bindungen gebildeten Systeme wird folglich

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} \frac{(2m)! A_{2m-3\mu_1-2\mu_2-2\mu_3-4\mu_4, \mu_2, \mu_1}}{(2m - 3\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3 - 4\mu_4)! \mu_1! \mu_2! \mu_3! \mu_4!} \cdot \frac{1}{2^{\mu_1 + \mu_3 + 2\mu_4}},$$

wenn die Summation über alle nicht-negativen Werte von μ_1, μ_2 und μ_4 , für welche $\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_4 = \mu$ ist, ausgedehnt wird. Endlich wird

$$B_{2m, n, 0} = n! \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4} S_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4} \cdot T_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4} \cdot A_{2m-3\mu_1-2\mu_2-2\mu_3-4\mu_4, \mu_2, \mu_1},$$

wobei der Kürze halber

$$\sum_{\gamma} \sum_{\varrho} \binom{\mu}{\gamma} \binom{\mu_3}{\varrho} \binom{3m - 2\mu - 3\mu_3}{n - \mu - 2\mu_3 - \gamma - \varrho} \frac{1}{2^{\gamma}} \frac{1}{3^{\varrho}} \cdot \frac{1}{2^{\mu_3}} = S_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}$$

und

$$\frac{(2m)! 2^{-\mu_1 - \mu_3 - 2\mu_4}}{(2m - 3\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3 - 4\mu_4)! \mu_1! \mu_2! \mu_3! \mu_4!} = T_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}$$

gesetzt ist.

Ein wichtiger Spezialfall ist $n = 3m$. Dann werden nämlich auch niemals zwei dreiwertige Dinge miteinander verbunden sein, so daß jedes Paar des Systems ein dreiwertiges und ein zweiwertiges Ding enthält. Die Anzahl dieser Paarsysteme wird deshalb

$$B_{2m, 3m, 0} = (3m)! \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4} \frac{1}{2^{\mu} 6^{\mu_3}} T_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4} A_{2m-3\mu_1-2\mu_2-2\mu_3-4\mu_4, \mu_2, \mu_1}.$$

Durch Anwendung des Dualismus erhält man hieraus die Anzahl der Arten, auf die ein System von $6m$ Dingen gleichzeitig in $2m$ Tripel und $3m$ Paare so eingeteilt werden kann, daß keins der Paare in einem der Tripel enthalten ist. Diese Anzahl wird nämlich

$$\frac{(6m)!}{(3m)! (2m)!} B_{2m, 3m, 0}.$$

In diesem Spezialfalle hatten wir zwei Reihen von Dingen — die zweiwertigen einerseits und die dreiwertigen andererseits — so, daß jedes

Paar des Paarsystems ein Ding jeder Reihe enthält. Dies kann nun in folgender Weise verallgemeinert werden:

Es seien zwei Reihen von Dingen gegeben, die eine aus $m_1 + n_1 + p_1$ Dingen und die andere aus $m_2 + n_2 + p_2$ Dingen bestehend. Wie viele Paarsysteme gibt es dann, die so beschaffen sind, daß jedes Paar ein Ding jeder Reihe enthält, während jedes von m_1 bestimmten der Dinge der ersten Reihe und jedes von m_2 bestimmten der Dinge der zweiten Reihe in 3 der Paare vorkommt, jedes von n_1 bestimmten Dingen der ersten Reihe und jedes von n_2 bestimmten Dingen der zweiten Reihe in 2 der Paare vorkommt, und endlich die p_1 übrigen Dinge der ersten Reihe und die p_2 übrigen Dinge der zweiten Reihe in 1 Paar vorkommen?

Diese Zahl kann $A_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ heißen. Dann ist natürlich

$$A_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = A_{m_2, n_2, p_2; m_1, n_1, p_1},$$

und zur Ausrechnung dieser Zahlen werden folgende drei rekurrente Gleichungen genügen:

$$\text{VIII. } A_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = m_1 A_{m_1-1, n_1+1, p_1; m_2, n_2, p_2-1} + n_1 A_{m_1, n_1-1, p_1+1; m_2, n_2, p_2-1} + p_1 A_{m_1, n_1, p_1-1; m_2, n_2, p_2-1}.$$

$$\text{IX. } A_{m_1, n_1, 0; m_2, n_2, 0} = \binom{m_1}{2} A_{m_1-2, n_1+2, 0; m_2, n_2-1, 0} + m_1 n_1 A_{m_1-1, n_1, 1; m_2, n_2-1, 0} + \binom{n_1}{2} A_{m_1, n_1-2, 2; m_2, n_2-1, 0}.$$

$$\text{X. } A_{m, 0, 0; m, 0, 0} = \binom{m}{3} A_{m-3, 3, 0; m-1, 0, 0}.$$

Diese Gleichungen werden beziehungsweise durch Wegnahme des Paares (der Paare) in dem (denen) eines der p_2 einwertigen, n_2 zweiwertigen, m_2 dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe vorkommt.

Weiter verdient bemerkt zu werden, daß $A_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ natürlich nur dann von null verschieden sein kann, wenn

$$3m_1 + 2n_1 + p_1 = 3m_2 + 2n_2 + p_2$$

ist; denn $3m_1 + 2n_1 + p_1$ ist die Anzahl der Paare, in denen die Dinge der ersten Reihe vorkommen, und $3m_2 + 2n_2 + p_2$ ist die Anzahl der Paare, in denen die Dinge der zweiten Reihe vorkommen, und diese Paare sind in beiden Fällen dieselben.

Man sieht, daß $A_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ auch die Anzahl der Arten angibt, auf die man von $m_1 + n_1 + p_1$ Dingen ein System von m_2 Tripeln, n_2 Paaren und p_2 Einsen so bilden kann, daß jedes von m_1 bestimmten dieser Dinge in 3 der Tripel, Paare, Einsen vorkommt, jedes von n_1 bestimmten der

Dinge in 2 der Tripel, Paare, Einsen vorkommt, und endlich jedes der p_1 übrigen Dinge in einem Tripel oder einem Paare vorkommt oder eine Eins bildet. Allerdings muß dann gestattet sein, daß 2 oder auch 3 dieser Tripel, Paare, Einsen gleich sein können, oder überhaupt, daß es keine Einschränkung mit Rücksicht auf die Anzahl der gemeinsamen Dinge gibt; weiter müssen auch die Tripel, Paare und Einsen nacheinander in einer Reihe geordnet gerechnet werden.

Wünscht man also zum Beispiel, die Anzahl der Arten zu finden, auf die man aus 5 Dingen eine Reihe von 5 Tripeln so bilden kann, daß jedes der Dinge in 3 der Tripel vorkommt, so hat man nur die Zahl $A_{5,0,0;5,0,0}$ zu berechnen. Durch Anwendung der Gleichungen VIII, IX und X erhält man:

$A_{5,0,0;5,0,0} = 10A_{2,3,0;4,0,0} \cdot A_{4,0,0;2,3,0} = 6A_{2,2,0;2,2,0} \cdot A_{2,2,0;2,2,0} =$
 $= A_{0,4,0;2,1,0} + 4A_{1,2,1;2,1,0} + A_{2,0,2;2,1,0} \cdot A_{0,4,0;2,1,0} = 6A_{0,2,2;2,0,0} \cdot$
 $A_{2,0,0;0,2,2} = 2A_{1,1,0;0,2,1} = 2$, da man unmittelbar sieht, daß $A_{1,1,0;0,2,1} = 1$.
 $A_{2,1,0;1,2,1} = 2A_{1,2,0;1,2,0} + A_{2,0,1;1,2,0} \cdot A_{1,2,0;2,0,1} = A_{0,3,0;2,0,0} +$
 $+ 2A_{1,1,1;2,0,0} = 1$, da man unmittelbar sieht, daß $A_{0,3,0;2,0,0} = 1$ und $A_{1,1,1;2,0,0} = 0$. Außerdem sieht man auch leicht, daß $A_{1,2,0;1,2,0} = 2$ ist.
 $A_{2,1,0;2,0,2} = 2A_{1,2,0;2,0,1} + A_{2,0,1;2,0,1}$. Man sieht, daß $A_{2,0,1;2,0,1} = 0$ ist.
Also wird $A_{2,1,0;2,0,2} = 2$, $A_{2,1,0;1,2,1} = 5$, $A_{0,4,0;2,1,0} = 12$, $A_{2,2,0;2,2,0} =$
 $= 12 + 4 \cdot 5 + 2 = 34$, $A_{4,0,0;2,3,0} = 204$ und $A_{5,0,0;5,0,0} = 2040$.

Wird von der Reihenfolge der Tripel abgesehen, so findet man ziemlich leicht durch Probieren folgende 22 Möglichkeiten, wobei die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 die 5 Dinge bezeichnen sollen:

(1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 5) (2, 4, 5) (3, 4, 5)
(1, 2, 3) (1, 2, 5) (1, 3, 4) (2, 4, 5) (3, 4, 5)
(1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 4, 5) (2, 3, 5) (3, 4, 5)
(1, 2, 4) (1, 2, 5) (1, 3, 4) (2, 3, 5) (3, 4, 5)
(1, 2, 3) (1, 2, 5) (1, 4, 5) (2, 3, 4) (3, 4, 5)
(1, 2, 4) (1, 2, 5) (1, 3, 5) (2, 3, 4) (3, 4, 5)
(1, 2, 3) (1, 3, 4) (1, 4, 5) (2, 3, 5) (2, 4, 5)
(1, 2, 4) (1, 3, 4) (1, 3, 5) (2, 3, 5) (2, 4, 5)
(1, 2, 3) (1, 3, 5) (1, 4, 5) (2, 3, 4) (2, 4, 5)
(1, 2, 5) (1, 3, 4) (1, 3, 5) (2, 3, 4) (2, 4, 5)
(1, 2, 4) (1, 3, 5) (1, 4, 5) (2, 3, 4) (2, 3, 5)
(1, 2, 5) (1, 3, 4) (1, 4, 5) (2, 3, 4) (2, 3, 5)
(1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 2, 5) (3, 4, 5) (3, 4, 5)
(1, 2, 3) (1, 3, 4) (1, 3, 5) (2, 4, 5) (2, 4, 5)
(1, 2, 4) (1, 3, 4) (1, 4, 5) (2, 3, 5) (2, 3, 5)
(1, 2, 5) (1, 3, 5) (1, 4, 5) (2, 3, 4) (2, 3, 4)
(1, 2, 3) (2, 3, 4) (2, 3, 5) (1, 4, 5) (1, 4, 5)
(1, 2, 4) (2, 3, 4) (2, 4, 5) (1, 3, 5) (1, 3, 5)
(1, 2, 5) (2, 3, 5) (2, 4, 5) (1, 3, 4) (1, 3, 4)
(1, 3, 4) (2, 3, 4) (3, 4, 5) (1, 2, 5) (1, 2, 5)
(1, 3, 5) (2, 3, 5) (3, 4, 5) (1, 2, 4) (1, 2, 4)
(1, 4, 5) (2, 4, 5) (3, 4, 5) (1, 2, 3) (1, 2, 3)

Sollen dagegen die verschiedenen Reihenfolgen der Tripel ebenfalls unterschieden werden, so wird die gesamte Anzahl

$$12 \cdot 5! + 10 \cdot \frac{5!}{2} = 1440 + 600 = 2040$$

in Übereinstimmung mit dem oben Gefundenen.

Es wird jedoch von größerem Interesse sein, die Anzahl der möglichen Wahlen der Tripel zu finden, wenn alle Tripel verschieden sein sollen und außerdem von Anordnungsverschiedenheiten abgesehen wird. Um dies zu finden, wird es nötig sein, für die Anzahl der Paarsysteme, in der angegebenen Weise aus zwei Reihen von Dingen gebildet, wenn man verlangt, daß niemals 2 der m_2 dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe beide mit denselben 3 dreiwertigen Dinge der ersten Reihe verbunden sind, Ausdrücke zu finden. Diese Anzahl will ich $A''_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ nennen. Zuerst will ich jedoch einen Ausdruck für die Zahl $A'_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ angeben, die die Anzahl der Arten, auf die ein Paarsystem gebildet werden kann, wenn niemals 3 der m_2 dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe mit denselben 3 Dingen der ersten Reihe verbunden sind, bedeuten soll. Benutzt man das im Anfang des § 1 erwähnte Prinzip, so findet man, daß

$$A'_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = \sum_t (-1)^t \frac{m_1!}{(m_1 - 3t)!} \cdot \frac{m_2!}{(m_2 - 3t)! \, t! \, (3!)^t} A_{m_1 - 3t, n_1, p_1; m_2 - 3t, n_2, p_2}.$$

Weiter habe ich gefunden, daß

$$A''_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = \sum_s (-1)^s \frac{m_1!}{(m_1 - 3s)!} \cdot \frac{m_2!}{(m_2 - 2s)! \, s! \, 2^s (3!)^s} \cdot A_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}^{(s)},$$

wenn $A_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}^{(s)}$ den Ausdruck

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \binom{s}{\sigma} \binom{m_2 - 2s}{\sigma} \cdot \sigma! \, A'_{m_1 - 3s, n_1, p_1 + 3(s - \sigma); m_2 - 2s - \sigma, n_2, p_2}$$

bedeutet, oder wenn man will

$$A''_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = \sum_s \sum_{\sigma} (-1)^{s + \sigma} \frac{m_1! \, m_2! \, A'_{m_1 - 3s, n_1, p_1 + 3(s - \sigma); m_2 - 2s - \sigma, n_2, p_2}}{(m_1 - 3s)! \, (m_2 - 2s - \sigma)! \, (s - \sigma)! \, \sigma! \, 12^s}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung kann auf folgende Weise bewiesen werden. Wir betrachten die $A'_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ Systeme von Paaren, in denen niemals 3 der m_2 dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe mit denselben 3 dreiwertigen Dingen der ersten Reihe verbunden sind. Geschieht es nun s Mal, daß 2 der m_2 dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe mit denselben 3 dreiwertigen Dingen der ersten Reihe verknüpft sind, so werden die betreffenden s Paare unter den m_2 Dingen und ebenso die s Tripel

unter den m_1 Dingen paarweise disjunkt sein. Werden nun von dem Paarsystem die Paare, in denen die Dinge dieser soeben genannten s Paare und s Tripel sich befinden, weggelassen, so entsteht ein Paarsystem, aus zwei Reihen von Dingen gebildet, wobei die erste Reihe $m_1 - 3s$ dreiwertige, n_1 zweiwertige und $p_1 + 3s$ einwertige Dinge enthält, und die zweite Reihe $m_2 - 2s$ dreiwertige, n_2 zweiwertige und p_2 einwertige Dinge enthält. Außerdem sind aber dann die $3s$ neuen einwertigen Dinge der ersten Reihe der Bedingung unterworfen, daß niemals 3 von ihnen, die durch die erwähnte Wegnahme von Paaren aus 3 dreiwertigen Dingen, die mit denselben 2 dreiwertigen der zweiten Reihe verknüpft waren, entstanden sind, mit demselben dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe verbunden sein können. Es sei $A'_{m_1-3s, n_1, p_1+3s; m_2-2s, n_2, p_2}$ die Anzahl solcher Paarsysteme. Dann erhält man mit Hilfe des Prinzips im § 1

$$A''_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = \sum_s (-1)^s \frac{m_1! m_2!}{(m_1-3s)! (m_2-2s)! (2!)^s (3!)^s s!} A'_{m_1-3s, n_1, p_1+3s; m_2-2s, n_2, p_2}.$$

Die Zahlen A' können aber wieder durch die Zahlen A'' ausgedrückt werden. Geschieht es nämlich σ Mal (indem wir jetzt die $A'_{m_1-3s, n_1, p_1+3s; m_2-2s, n_2, p_2}$ Paarsysteme betrachten), daß 3 neue einwertige Dinge der ersten Reihe, in der erwähnten Weise aus 3 dreiwertigen entstanden, mit demselben dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe verbunden sind, so wird die entsprechende Anzahl gleich $A'_{m_1-3s, n_1, p_1+3(s-\sigma); m_2-2s-\sigma, n_2, p_2}$. Folglich wird

$$A'_{m_1-3s, n_1, p_1+3s; m_2-2s, n_2, p_2} = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \binom{s}{\sigma} \binom{m_2-2s}{\sigma} \cdot \sigma! A'_{m_1-3s, n_1, p_1+3(s-\sigma); m_2-2s-\sigma, n_2, p_2}.$$

Wird dieser Ausdruck für A' in die vorhergehende Gleichung eingesetzt, so erhält man die behauptete Formel für A'' , w. z. bw. w.

Mit Hilfe der Zahlen A'' kann man dann die Anzahl der von m Dingen konstruierbaren Tripelsysteme von der Beschaffenheit, daß jedes Ding in 3 der Tripel vorkommt, finden. Diese Zahl muß nämlich gleich

$$\frac{A''_{m, 0, 0; m, 0, 0}}{m!}$$

sein. Es wird also jetzt von Anordnungsverschiedenheiten abgesehen, und die Tripel sollen alle voneinander verschieden sein.

Beispiele:

1. Ausrechnung von $A''_{5, 0, 0; 5, 0, 0}$.

$$\begin{aligned} A''_{5, 0, 0; 5, 0, 0} &= A'_{5, 0, 0; 5, 0, 0} - \frac{5! 5!}{2! 3! 12} A'_{2, 0, 3; 3, 0, 0} + \frac{5! 5!}{2! 2! 12} A'_{2, 0, 0; 2, 0, 0} = \\ &= A'_{5, 0, 0; 5, 0, 0} - 100 A'_{2, 0, 3; 3, 0, 0} + 300 A'_{2, 0, 0; 2, 0, 0}. \quad A'_{5, 0, 0; 5, 0, 0} = A_{5, 0, 0; 5, 0, 0} - \\ &- \frac{5! 5!}{2! 2! (3!)^2} A_{2, 0, 0; 2, 0, 0} = A_{5, 0, 0; 5, 0, 0} = 2040 \text{ (S. p. 46)}. \end{aligned}$$

$A'_{2,0,3;3,0,0} = A_{2,0,3;3,0,0} = A_{3,0,0;2,0,3} = 3A_{2,1,0;2,0,2}$. Da $A_{2,1,0;2,0,2} = 2$ ist (s. p. 46), wird also $A_{2,0,3;3,0,0} = 6$.

Folglich wird

$$A''_{5,0,0;5,0,0} = 2040 - 100.6 = 1440.$$

Die Anzahl der Systeme von 5 Tripeln von 5 Dingen, so daß jedes Ding in 3 der Tripel vorkommt, ist also

$$1440 : 120 = 12.$$

Dies stimmt mit der Aufzählung Seite 46 überein.

2. Ausrechnung von $A''_{6,0,0;6,0,0}$.

$$\begin{aligned} A''_{6,0,0;6,0,0} &= A'_{6,0,0;6,0,0} - \frac{6!6!}{3!4!12} A'_{3,0,3;4,0,0} + \frac{6!6!}{3!3!12} A'_{3,0,0;3,0,0} + \\ &+ \frac{6!6!}{2!2!12^2} A'_{0,0,6;2,0,0} - \frac{6!6!}{12^2} A'_{0,0,3;1,0,0} + \frac{6!6!}{2!12^2} A'_{0,0,0;0,0,0} = A'_{6,0,0;6,0,0} - \\ &- 300A'_{3,0,3;4,0,0} + 1200A'_{3,0,0;3,0,0} + 900A'_{0,0,6;2,0,0} - 3600A'_{0,0,3;1,0,0} + 1800. \end{aligned}$$

$$A'_{6,0,0;6,0,0} = A_{6,0,0;6,0,0} - \frac{6!6!}{3!3!(3!)^2} A_{3,0,0;3,0,0} + \frac{6!6!}{2!(3!)^4} A_{0,0,0;0,0,0}.$$

$$A'_{3,0,3;4,0,0} = A_{3,0,3;4,0,0} - \frac{3!4!}{(3!)^2} A_{0,0,3;1,0,0}.$$

$$A'_{3,0,0;3,0,0} = A_{3,0,0;3,0,0} - A_{0,0,0;0,0,0}.$$

$$A'_{0,0,6;2,0,0} = A_{0,0,6;2,0,0}.$$

$$A'_{0,0,3;1,0,0} = A_{0,0,3;1,0,0}.$$

Man sieht außerdem unmittelbar, daß $A_{0,0,3;1,0,0} = 1$, $A_{0,0,6;2,0,0} = \binom{6}{3} = 20$ und $A_{3,0,0;3,0,0} = 1$. Es kommt also nur darauf an $A_{3,0,3;4,0,0}$ und $A_{6,0,0;6,0,0}$ zu finden.

$$\begin{aligned} A_{4,0,0;3,0,3} &= 4A_{3,1,0;3,0,2} \quad A_{3,1,0;3,0,2} = 3A_{2,2,0;3,0,1} + A_{3,0,1;3,0,1} \\ A_{2,2,0;3,0,1} &= 2A_{1,3,0;3,0,0} + 2A_{2,1,1;3,0,0} \quad A_{3,0,1;3,0,1} = 9A_{2,1,0;2,1,0} + \\ &+ A_{3,0,0;3,0,0}. \end{aligned}$$

Man findet leicht unmittelbar, daß $A_{1,3,0;3,0,0} = 6$ und $A_{2,1,0;2,1,0} = 1$ ist. Weiter ist $A_{3,0,0;2,1,1} = 3A_{2,1,0;2,1,0} = 3$. Folglich wird

$$A_{2,2,0;3,0,1} = 2.6 + 2.3 = 18. \quad A_{3,0,1;3,0,1} = 9.1 + 1 = 10.$$

$$A_{3,1,0;3,0,2} = 3.18 + 10 = 64. \quad A_{4,0,0;3,0,3} = 256.$$

Die Ausrechnung von $A_{6,0,0;6,0,0}$ ist etwas mühevoller. Man erhält:

$$A_{6,0,0;6,0,0} = 20A_{3,3,0;5,0,0} \quad A_{5,0,0;3,3,0} = 10A_{3,2,0;3,2,0}.$$

$$A_{3,2,0;3,2,0} = 3A_{1,4,0;3,1,0} + 6A_{2,2,1;3,1,0} + A_{3,0,2;3,1,0}.$$

$$A_{3,0,2;3,1,0} = 64 \text{ ist oben ausgerechnet.}$$

$$A_{1,4,0;3,1,0} = 4A_{0,4,1;3,0,0} + 6A_{1,2,2;3,0,0}.$$

$$A_{3,0,0;0,4,1} = 3A_{2,1,0;0,4,0}.$$

$$A_{0,4,0;2,1,0} = 6A_{0,2,2;2,0,0}.$$

Man sieht, daß $A_{0,2,2;2,0,0} = 2$ ist. Also

$$A_{0,4,0;2,1,0} = 12 \text{ und } A_{3,0,0;0,4,1} = 36.$$

Weiter ist $A_{3,0,0;1,2,2} = 3A_{2,1,0;1,2,1}$ und $A_{2,1,0;1,2,1} = 2A_{1,2,0;1,2,0} + A_{2,0,1;1,2,0} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

$$A_{3,1,0;2,2,1} = 3A_{2,2,0;2,2,0} + A_{3,0,1;2,2,0}.$$

$A_{2,2,0;2,2,0}$ ist früher (Seite 46) ausgerechnet und gleich 34 gefunden.

$A_{3,0,1;2,2,0}$ ist oben gleich 18 gefunden worden. Wir erhalten also

$$A_{3,1,0;2,2,1} = 3 \cdot 34 + 18 = 120.$$

Man erhält folglich

$$A_{3,0,0;1,2,2} = 15 \text{ und } A_{1,4,0;3,1,0} = 4 \cdot 36 + 6 \cdot 15 = 234 \text{ und weiter}$$

$$A_{3,2,0;3,2,0} = 3 \cdot 234 + 6 \cdot 120 + 64 = 702 + 720 + 64 = 1486.$$

$$A_{5,0,0;3,3,0} = 14860. \quad A_{6,0,0;6,0,0} = 297200.$$

Hieraus erhält man

$$A'_{6,0,0;6,0,0} = 297200 - 400 + 200 = 297000 \text{ und } A'_{3,0,3;4,0,0} = 256 - 4 = 252$$

Da außerdem $A'_{3,0,0;3,0,0} = 0$, $A'_{0,0,6;2,0,0} = 20$ und $A'_{0,0,3;1,0,0} = 1$ ist, wird

$$A''_{6,0,0;6,0,0} = 297000 - 300 \cdot 252 + 90 \cdot 20 - 3600 + 1800 = 237600.$$

Die Anzahl der Arten, wie man aus 6 Dingen 6 Tripel so bilden kann, daß jedes Ding in 3 der Tripel vorkommt, wird folglich

$$237600 : 720 = 330.$$

Außer diesen Zahlen A' und A'' kann man auch andere finden, mit deren Hilfe kompliziertere Aufgaben gelöst werden können. So habe ich eine Zahl $B_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ studiert, die die Anzahl der Arten, wie ein Paarsystem von zwei Reihen von Dingen $(m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2)$ so gebildet werden kann, daß weder 2 noch 3 der m_2 dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe jemals mit denselben Dingen der ersten Reihe verknüpft sind, bedeuten soll. Wenn in einem Paarsystem 2 der dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe mit denselben 3 Dingen der ersten Reihe verknüpft sind, so sind diese entweder drei- oder zweiwertig, d. h. es gibt vier Möglichkeiten:

1) 3 dreiwertige Dinge, 2) 2 dreiwertige und 1 zweiwertiges, 3) 1 dreiwertiges und 2 zweiwertige, 4) 3 zweiwertige Dinge.

Durch ein ähnliches Verfahren wie bei der Bestimmung der Zahl A'' findet man

$$B_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} (-1)^s P_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}^{s_1, s_2, s_3, s_4} A'_{m'_1, n'_1, p'_1; m'_2, n'_2, p'_2},$$

indem

$$m'_1 = m_1 - 3s_1 - 2s_2 - s_3, \quad n'_1 = n_1 - s_2 - 2s_3 - 3s_4,$$

$$p'_1 = p_1 + 3s_1 + 2s_2 + s_3, \quad m'_2 = m_2 - 2s,$$

weiter

$$P_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}^{s_1, s_2, s_3, s_4} = \frac{m_1! m_2!}{m'_1! m'_2! s_1! s_2! s_3! 3!^{s_1} 2!^{s_2} 2!^{s_3}} \cdot \frac{n_1!}{n'_1! 2!^{s_3} 3!^{s_4} s_4!}$$

und

$$A'_{m'_1, n'_1, p'_1; m'_2, n'_2, p'_2} = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \binom{s_1}{\sigma} \binom{m'_2}{\sigma} \sigma! A'_{m'_1, n'_1, p'_1 - 3\sigma; m'_2 - \sigma, n'_2, p'_2}$$

gesetzt ist, und außerdem $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$ ist.

Man kann auch so schreiben:

$$B_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4, \sigma} (-1)^{s+\sigma} \frac{m_1! m_2! n_1! A'_{m'_1, n'_1, p'_1 - 3\sigma; m'_2 - \sigma, n'_2, p'_2}}{m'_1! (m'_2 - \sigma)! n'_1! \sigma! (s_1 - \sigma)! s_2! s_3! s_4! 2!^{s+s_2+s_3} 3!^{s_1+s_4}},$$

Mit Hilfe dieser Zahlen B kann man die Anzahl der Arten finden, wie sich aus $m_1 + n_1 + p_1$ Dingen ein System von m_2 Tripeln so bilden läßt, daß jedes von m_1 bestimmten der Dinge in 3 der Tripel, jedes von n_1 bestimmten der Dinge in 2 der Tripel, und endlich jedes der p_1 übrigen Dinge in 1 der Tripel vorkommt. Diese Zahl wird nämlich

$$\frac{B_{m_1, n_1, p_1; m_2, 0, 0}}{m_2!}.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1. \quad B_{1, 2, 2; 3, 0, 0} &= A'_{1, 2, 2; 3, 0, 0} - \frac{3! 2!}{2! 2!} A'_{0, 0, 3; 1, 0, 0} = A_{1, 2, 2; 3, 0, 0} - \\ &\quad - 3A_{0, 0, 3; 1, 0, 0} = 15 - 3 = 12. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß es auf $\frac{12}{3!} = 2$ Arten möglich sein muß, aus 5 Dingen 3 Tripel so zu bilden, daß ein bestimmtes dieser 5 Dinge in allen drei Tripeln, 2 andere der Dinge in zwei der Tripel und endlich die 2 letzten Dinge in einem der Tripel vorkommen. Dies ist sehr leicht nachzuweisen;

denn bezeichnen 1, 2, 3, 4, 5 die 5 Dinge, wobei 1 in allen drei Tripeln, 2 und 3 in zwei Tripeln und 4 und 5 in einem Tripel vorkommen sollen, so werden

$$(1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 5) \quad \text{und} \quad (1, 2, 3) (1, 3, 4) (1, 2, 5)$$

die zwei Möglichkeiten.

2. $B_{2,2,2;4,0,0} = A'_{2,2,2;4,0,0} - \frac{2!4!2!}{2!2!2!} A'_{0,1,4;2,0,0} - \frac{2!4!2!}{2!2!2!} A'_{1,0,3;2,0,0} =$
 $= A_{2,2,2;4,0,0} - 12A_{0,1,4;2,0,0} - 12A_{1,0,3;2,0,0}. \quad A_{1,0,0;2,2,2} = 4A_{3,1,0;2,2,1}.$
 Seite 50 ist $A_{3,1,0;2,2,1} = 120$ gefunden worden. Also $A_{4,0,0;2,2,2} = 480.$
 $A_{2,0,0;0,1,4} = 2A_{1,1,0;0,1,3}. \quad A_{1,1,0;0,1,3} = A_{0,2,0;0,1,2} + A_{1,0,1;0,1,2} =$
 $= 2 + 1 = 3. \quad \text{Also } A_{2,0,0;0,1,4} = 6. \quad \text{Weiter ist } A_{2,0,0;1,0,3} \text{ selbstverständ-}$
 lich gleich null. Folglich wird

$$B_{2,2,2;4,0,0} = 480 - 12 \cdot 6 = 408.$$

Also sollte es auf $408:24 = 17$ Arten möglich sein, 4 Tripel aus 6 Dingen so zu wählen, daß jedes von 2 bestimmten der Dinge in 3 der Tripel, jedes von 2 anderen Dingen in 2 der Tripel und jedes der 2 übrigen Dinge in einem der Tripel vorkommt.

Es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6 die sechs gegebenen Dinge, wobei 1 und 2 diejenigen sind, die in drei der Tripel vorkommen sollen, 3 und 4 die, welche in zwei der Tripel vorkommen sollen, und 5 und 6 die, welche in einem Tripel vorkommen sollen. Dann sind in der Tat

$$\begin{array}{ll} (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 2, 5) (3, 4, 6) & (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 4) (2, 5, 6) \\ (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 2, 6) (3, 4, 5) & (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 5) (2, 4, 6) \\ (1, 2, 5) (1, 2, 6) (1, 3, 4) (2, 3, 4) & (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 6) (2, 4, 5) \\ & (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 4, 5) (2, 3, 6) \\ & (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 4, 6) (2, 3, 5) \\ & (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 5, 6) (2, 3, 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1, 2, 3) (1, 2, 5) (1, 3, 4) (2, 4, 6) \\ (1, 2, 3) (1, 2, 5) (1, 4, 6) (2, 3, 4) \\ (1, 2, 3) (1, 2, 6) (1, 3, 4) (2, 4, 5) \\ (1, 2, 3) (1, 2, 6) (1, 4, 5) (2, 3, 4) \\ (1, 2, 4) (1, 2, 5) (1, 3, 4) (2, 3, 6) \\ (1, 2, 4) (1, 2, 5) (1, 3, 6) (2, 3, 4) \\ (1, 2, 4) (1, 2, 6) (1, 3, 4) (2, 3, 5) \\ (1, 2, 4) (1, 2, 6) (1, 3, 5) (2, 3, 4) \end{array}$$

die 17 Möglichkeiten.

Diese verschiedenen Wahlen der Tripel können natürlich alle mit Hilfe der systematischen Methode, die ich früher (Seite 42) angedeutet habe, gefunden werden. Der Beweis der rekurrenten Gleichungen VIII, IX und X gibt ja an, in welcher Weise die Paarsysteme für eine größere Anzahl

gegebener Dinge aus den Paarsystemen für kleinere Anzahlen abgeleitet werden können. Ich will hier nicht näher darauf eingehen.

$$\begin{aligned}
 3. \quad B_{3,1,1;4,0,0} &= A'_{3,1,1;4,0,0} - \frac{3!4!}{2!3!2!} A'_{0,1,1;2,0,0} + \frac{3!4!2!}{2!3!2!} A'_{0,1,1;1,0,0} - \\
 &- \frac{3!4!}{2!2!2!} A'_{1,0,3;2,0,0} = A_{3,1,1;4,0,0} - \frac{3!4!}{(3!)^2} A_{0,1,1;1,0,0} - 6A_{0,1,4;2,0,0} + \\
 &+ 12A_{0,1,1;1,0,0} - 18A_{1,0,3;2,0,0} = A_{3,1,1;4,0,0} + 8A_{0,1,1;1,0,0} - \\
 &- 6A_{0,1,4;2,0,0} - 18A_{1,0,3;2,0,0}.
 \end{aligned}$$

Sowohl $A_{0,1,1;1,0,0}$ als $A_{1,0,3;2,0,0}$ sind null. Im vorhergehenden Beispiel fanden wir $A_{0,1,4;2,0,0} = 6$. Weiter ist $A_{1,0,0;3,1,1} = 4A_{3,1,0;3,1,0}$. $A_{3,1,0;3,1,0} = 3A_{1,3,0;3,0,0} + 3A_{2,1,1;3,0,0}$. Wie Seite 49 erwähnt ist, ist $A_{1,3,0;3,0,0} = 6$ und $A_{2,1,1;3,0,0} = 3$. Folglich wird

$$A_{3,1,0;3,1,0} = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27 \quad \text{und} \quad A_{1,0,0;3,1,1} = 108.$$

Hieraus folgt, daß $B_{3,1,1;4,0,0} = 108 - 6 \cdot 6 = 72$.

Also soll es auf $\frac{72}{4!} = 3$ Arten möglich sein, 4 Tripel aus 5 Dingen so zu wählen, daß jedes von 3 bestimmten dieser Dinge in 3 der Tripel vorkommt, eines der übrigen Dinge in 2 der Tripel und endlich das letzte Ding in einem Tripel vorkommt. Diese 3 Weisen sind in der Tat die folgenden:

$$\begin{aligned}
 &(1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 4) (2, 3, 5) \\
 &(1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 5) (2, 3, 4) \\
 &(1, 2, 3) (1, 2, 5) (1, 3, 4) (2, 3, 4).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad B_{3,2,2;5,0,0} &= A'_{3,2,2;5,0,0} - \frac{3!5!2!}{3!3!2!2!} A'_{0,2,5;3,0,0} + \frac{3!5!2!}{3!2!2!2!} A'_{0,2,2;2,0,0} - \\
 &- \frac{3!5!2!}{3!2!2!} A'_{1,1,4;3,0,0} - \frac{3!5!2!}{2!3!2!2!} A'_{2,0,3;3,0,0} = A_{3,2,2;5,0,0} + 20A_{0,2,2;2,0,0} - \\
 &- 10A_{0,2,5;3,0,0} - 60A_{1,1,4;3,0,0} - 30A_{2,0,3;3,0,0}.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der rekurrenten Formeln findet man:

$$\begin{aligned}
 A_{3,2,2;5,0,0} &= 33\,860. \quad A_{1,1,4;3,0,0} = 36. \quad A_{2,0,3;3,0,0} = 6. \\
 A_{0,2,5;3,0,0} &= 240. \quad A_{0,2,2;2,0,0} = 2.
 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$B_{3,2,2;5,0,0} = 33860 + 40 - 2400 - 2160 - 180 - 29160.$$

Folglich wird die Anzahl der Arten, aus 7 Dingen 5 Tripel so zu wählen, daß 3 bestimmte der Dinge in 3 der Tripel, 2 andere in 2 Tripeln, und die 2 letzten Dinge in 1 Tripel vorkommen, gleich

$$\frac{29160}{120} = 243.$$

Um eine noch kompliziertere Art von Aufgaben lösen zu können habe ich auch für eine Zahl, die ich $C_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ nenne, Ausdrücke gesucht. Dies soll die Anzahl der Paarsysteme bedeuten, die aus zwei Reihen von Dingen $(m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2)$ so gebildet sind, daß erstens niemals 2 oder 3 der m_2 dreiwertigen Dinge der zweiten Reihe mit denselben 3 Dingen der ersten Reihe verknüpft sind, und zweitens ebenso wenig 2 oder 3 der n_2 zweiwertigen Dinge der zweiten Reihe mit denselben 2 Dingen der ersten Reihe verknüpft sind.

Durch ein ähnliches Verfahren wie vorher habe ich gefunden, daß

$$C_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2} = \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4, \sigma} (-1)^{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \sigma} Q_{m_1, n_1, n_2}^{s_1 s_2 s_3 s_4 \sigma} B_{m'_1, n'_1, p'_1; m'_2, n'_2, p'_2},$$

wobei der Kürze halber

$$\begin{aligned} m_1 - 2s_1 - 2s_2 - s_3 &= m'_1, & n_1 - s_3 - 2s_4 &= n'_1, & p_1 + 2(s_2 - \sigma) + s_3 &= p'_1, \\ n_2 - 3s_1 - 2s_2 - 2s_3 - 2s_4 - \sigma &= n'_2, \end{aligned}$$

und außerdem

$$\frac{m_1! n_1! n_2!}{m'_1! n'_1! n'_2! s_1! \sigma! (s_2 - \sigma)! s_2! s_4! 2!^{s_1 + 2s_2 + s_3 + 2s_4} 3!^{s_1}} = Q_{m_1, n_1, n_2}^{s_1 s_2 s_3 s_4 \sigma}$$

gesetzt ist.

Wird $C_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ durch $m_2! n_2!$ dividiert, so erhält man die Anzahl der Arten, wie sich aus $m_1 + n_1 + p_1$ Dingen m_2 Tripel und n_2 Paare so bilden lassen, daß jedes von m_1 bestimmten der Dinge in 3 dieser Tripel und Paare vorkommt, jedes von n_1 bestimmten der Dinge in 2 der Tripel und Paare vorkommt, und endlich jedes der übrigen p_1 Dinge entweder in einem Tripel oder in einem Paare vorkommt.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1. \quad C_{3,0,1; 2,2,0} &= B_{3,0,1; 2,2,0} - \frac{3! 2!}{2! 2!} B_{1,0,3; 2,0,0} = B_{3,0,1; 2,2,0} - 3B_{1,0,3; 2,0,0} \\ B_{3,0,1; 2,2,0} &= A'_{3,0,1; 2,2,0} - A'_{0,0,4; 0,2,0} = A_{3,0,1; 2,2,0} - A_{0,0,4; 0,2,0} = 18 - 6 = 12. \\ (A_{3,0,1; 2,2,0} \text{ ist Seite 49 ausgerechnet}). \\ B_{1,0,3; 2,0,0} &= A_{1,0,3; 2,0,0} = 0. \quad \text{Also} \end{aligned}$$

$$C_{3,0,1; 2,2,0} = 12.$$

Es soll also auf $\frac{12}{2! 2!}$ 3 Arten möglich sein, aus 4 Dingen 2 Tripel und 2 Paare so zu wählen, daß jedes von 3 bestimmten der 4 Dinge entweder in beiden Tripeln und einem Paare oder in beiden Paaren und einem Tripel vorkommt, während das vierte Ding entweder in einem Tripel oder einem Paare vorkommt. Diese 3 Möglichkeiten sind in der Tat

$$(1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3) (2, 3)$$

$$(1, 2, 3) (1, 3, 4) (1, 2) (2, 3)$$

$$(1, 2, 3) (2, 3, 4) (1, 2) (1, 3),$$

wenn 1, 2, 3 die drei Dinge sind, die an drei Stellen vorkommen sollen, und 4 das Ding, das an einer Stelle vorkommen soll.

$$\begin{aligned} 2. \quad C_{3,1,1;2,3,0} &= B_{3,1,1;2,3,0} - \frac{3! 3!}{2! 3!} B_{1,1,1;2,0,0} - \frac{3! 3!}{2! 2!} B_{1,1,3;2,1,0} - \\ &- \frac{3! 3!}{2! 2!} B_{2,0,2;2,1,0} = B_{3,1,1;2,3,0} - 3B_{1,1,1;2,0,0} - 9B_{1,1,3;2,1,0} - 9B_{2,0,2;2,1,0}. \\ B_{3,1,1;2,3,0} &= A'_{3,1,1;2,3,0} - \frac{3! 2!}{3! 2!} A'_{0,1,4;0,3,0} - \frac{3! 2!}{2! 2!} A'_{1,0,3;0,3,0} = \\ &= A_{3,1,1;2,3,0} - A_{0,1,4;0,3,0} - 3A_{1,0,3;0,3,0}. \\ B_{1,1,1;2,0,0} &= 0. \quad B_{1,1,3;2,1,0} = A_{1,1,3;2,1,0}. \quad B_{2,0,2;2,1,0} = A_{2,0,2;2,1,0}. \\ A_{2,3,0;3,1,1} &= 2A_{1,4,0;3,1,0} + 3A_{2,2,1;3,1,0} = 2 \cdot 234 + 3 \cdot 120 = 468 + 360 = 828. \\ A_{0,3,0;0,1,4} &= 3A_{0,2,1;0,1,3}. \quad A_{0,2,1;0,1,3} = 2A_{0,1,2;0,1,2} + A_{0,2,0;0,1,2}. \end{aligned}$$

Man findet leicht unmittelbar, daß $A_{0,1,2;0,1,2} = 5$ und $A_{0,2,0;0,1,2} = 2$ ist. Folglich wird $A_{0,2,1;0,1,3} = 12$ und $A_{0,3,0;0,1,4} = 36$. Man sieht, daß $A_{0,3,0;1,0,3} = 6$ ist. Folglich wird $B_{3,1,1;2,3,0} = 828 - 36 - 18 = 774$, und außerdem ist $A_{2,1,0;1,1,3} = 12$, wie man mit Hilfe der rekurrenten Gleichungen bald findet, und $A_{2,0,2;2,1,0} = 2$, wie man leicht unmittelbar sieht. Also wird

$$C_{3,1,1;2,3,0} = 774 - 9 \cdot 12 - 9 \cdot 2 = 774 - 126 = 648.$$

Es ist also auf $\frac{648}{2! 3!} = 54$ Arten möglich, aus 5 Dingen 2 Tripel und 3 Paare so zu bilden, daß 3 bestimmte der Dinge entweder in beiden Tripeln und einem Paare oder in einem Tripel und zwei Paaren oder in allen drei Paaren vorkommen, ein gewisses viertes Ding entweder in beiden Tripeln oder in einem Tripel und einem Paare oder in zwei der Paare vorkommt, und endlich das fünfte Ding entweder in einem Tripel oder in einem Paare vorkommt. Diese 54 Arten sind in der Tat die folgenden:

$$1) \quad (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 2) (3, 4) (3, 5).$$

Durch Umordnung der Dinge kann man hieraus im ganzen 3 Möglichkeiten erhalten.

2) (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3) (2, 4) (3, 5).

Durch Umordnungen erhält man hier im ganzen 12 Möglichkeiten.

3) (1, 2, 3) (1, 2, 5) (1, 3) (2, 4) (3, 4).

Durch Umordnungen erhält man hier 6 Möglichkeiten.

4) (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3) (2, 3) (4, 5).

Durch Umordnungen erhält man hier 3 Möglichkeiten.

5) (1, 2, 4) (1, 2, 5) (1, 3) (2, 3) (3, 4).

Durch Umordnungen erhält man hier 3 Möglichkeiten.

6) (1, 2, 4) (1, 3, 5) (1, 2) (2, 3) (3, 4).

Durch Umordnungen erhält man hier 12 Möglichkeiten.

7) (1, 2, 4) (1, 3, 4) (1, 2) (2, 3) (3, 5).

Durch Umordnungen erhält man 6 Möglichkeiten.

8) (1, 2, 4) (3, 4, 5) (1, 2) (1, 3) (2, 3).

Hieraus erhält man 3 Möglichkeiten.

9) (1, 2, 3) (3, 4, 5) (1, 2) (1, 4) (2, 3).

Hieraus erhält man durch Umordnungen 6 Möglichkeiten.

3. Ich habe auch $C_{4, 2, 1; 3, 4, 0}$ ausgerechnet und gefunden, daß

$$C_{4, 2, 1; 3, 4, 0} = 3876192$$

ist. Also muß es auf $\frac{3876192}{3!4!} = 26912$ verschiedene Arten möglich sein, aus 7 Dingen 3 Tripel und 4 Paare so zu wählen, daß jedes unter 4 bestimmten dieser 7 Dinge in 3 der Tripel und Paare, jedes von 2 anderen der Dinge in 2 der Tripel und Paare, während das letzte Ding entweder in einem Tripel oder einem Paare vorkommt.

Die Ausrechnung ist jedoch ziemlich weitläufig, und ich verzichte deshalb darauf, sie hier anzugeben.

Ich habe auch versucht, ob es möglich wäre, durch ein ähnliches Verfahren für die Anzahl der Arten, wie man aus m Dingen m solche Tripel bilden kann, daß jedes Ding in 3 der Tripel vorkommt, und andererseits 2 beliebige Tripel höchstens ein Ding gemein haben, Ausdrücke zu finden. Diese Aufgabe scheint jedoch wesentlich schwieriger zu sein, als die vorhergehende. Ich bin indessen bei dieser Gelegenheit auf etwas aufmerksam geworden, das ich hier mitteilen will.

Es ist einleuchtend, daß in jedem Paarsystem, das aus zwei Reihen von Dingen so gebildet ist, daß jedes Paar des Systems ein Ding jeder Reihe enthält, jeder Zyklus¹ aus einer geraden Anzahl Elemente bestehen wird. Es ist aber bemerkenswert, daß man diesen Satz umkehren kann, d. h. wenn man ein Paarsystem aus drei-, zwei- und einwertigen Dingen gebildet hat, und jeder vorkommende Zyklus aus einer geraden Anzahl von Dingen besteht, so können die Dinge, aus denen das Paarsystem gebildet ist, in der Weise in zwei Reihen geteilt werden, daß jedes Paar des Systems ein Ding jeder Reihe enthält.

Natürlich brauche ich diesen Satz nur für unzerlegbare Systeme zu beweisen, da er alsdann augenscheinlich auch für zerlegbare Systeme seine Geltung behalten muß.

Es sei dann ein unzerlegbares Paarsystem gegeben, aus m drei-, n zwei- und p einwertigen Dingen gebildet, in dem jeder Zyklus aus einer geraden Zahl von Dingen besteht. Es sei t eines der $m + n + p$ Dinge. Dann können wir eine Einteilung dieser Dinge in zwei disjunkte Klassen K_1 und K_2 in folgender Weise bestimmen. Ein beliebiges Ding t' soll zu K_1 gehören, wenn man von t bis zu t' durch Durchlaufen einer geraden Anzahl von Bindungen gelangen kann; es soll aber zu K_2 gehören, wenn man von t bis t' durch Durchlaufen einer ungeraden Anzahl von Bindungen gelangen kann. Das Ding t soll natürlich dann zu K_1 gehören. Da das Paarsystem unzerlegbar ist, kann man jedenfalls von t bis zu einem beliebigen anderen Dinge in der einen oder der anderen Weise gelangen. Daß die Klassen K_1 und K_2 disjunkt sein müssen, ist sicher; denn kann man von t bis zu einem Ding t' durch Durchlaufen einer geraden Zahl von Bindungen kommen, so kann man nicht von t bis t' durch Durchlaufen einer ungeraden Zahl von anderen Bindungen kommen. Man würde nämlich in dem Falle einen Zyklus, aus einer ungeraden Anzahl Dinge bestehend, erhalten, was gegen die Voraussetzung wäre. Jedes Paar des Paarsystems enthält außerdem augenscheinlich ein Ding der Klasse K_1 und ein Ding der Klasse K_2 , wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Soll man also z. B. die Anzahl der Paarsysteme finden, die aus $2m$ dreiwertigen Dingen so gebildet werden können, daß alle vorkommenden Zykeln aus einer geraden Zahl von Dingen bestehen, so braucht man nur die Zahl $A_{m,0,0;m,0,0}$ auszurechnen, wobei die gesuchte Zahl gleich

$$\frac{(2m)!}{2(m!)^2} A_{m,0,0;m,0,0}$$

ist.

¹ Unter einem „Zyklus“ verstehe ich eine Reihe $t_1, t_2, \dots, t_{\gamma'}$ von Dingen, wo t_r mit t_{r+1} ($r=1, 2, \dots, \gamma'-1$) und $t_{\gamma'}$ mit t_1 verbunden sind.

Beispiele:

1. Man hat $A_{3,0,0;3,0,0} = 1$, und folglich ist

$$\frac{6!}{2(3!)^2} = 10$$

die Anzahl der Paarsysteme mit nur geradzahligem Zykeln, die aus 6 dreiwertigen Dingen gebildet werden können. Dies ist leicht nachzuweisen. Diese Paarsysteme sind alle von demselben Typus, indem sie nämlich durch ein Sechseck mit drei Diagonalen zwischen gegenüberstehenden Ecken abgebildet werden können.

2. $A_{4,0,0;4,0,0} = 4A_{1,3,0;3,0,0}$. $A_{3,0,0;1,3,0} = 3A_{1,2,0;1,2,0} = 6$. Also $A_{4,0,0;4,0,0} = 24$.

Die Anzahl der aus 8 dreiwertigen Dingen gebildeten Paarsysteme mit nur geradzahligem Zykeln wird folglich

$$\frac{8!}{2(4!)^2} \cdot 24 = 840.$$

Diese sind auch alle von demselben Typus, indem sie nämlich alle durch einen Würfel abgebildet werden können.

Das erwähnte Problem, die Anzahl der Tripelsysteme zu finden, die aus m Dingen so gebildet werden können, daß jedes Ding in 3 der Tripel vorkommt, und andererseits 2 beliebige der Tripel höchstens ein Ding gemein haben, ist augenscheinlich damit gleichbedeutend, die Anzahl der Paarsysteme zu finden, die aus zwei Reihen von Dingen, jede aus m dreiwertigen Dingen bestehend, so gebildet werden können, daß jedes Paar ein Ding jeder Reihe enthält, und niemals 2 Dinge der ersten Reihe mit denselben 2 Dingen der zweiten Reihe verbunden sind. Infolge des soeben bewiesenen Satzes können wir indessen auch sagen, daß dieses Problem damit gleichbedeutend ist, die Anzahl der Paarsysteme aus $2m$ dreiwertigen Dingen gebildet zu finden, die nur geradzahlige Zykeln, unter diesen aber keinen mit nur 4 Elementen, enthalten.

Betrachten wir wieder ein Paarsystem, das aus m dreiwertigen, n zweiwertigen und p einwertigen Dingen gebildet ist. Es sei $\mu_{3,3}$ die Anzahl der Paare des Systems, die 2 dreiwertige Dinge enthalten, $\mu_{3,2} = \mu_{2,3}$ die Anzahl der Paare, die ein dreiwertiges und ein zweiwertiges Ding enthalten u. s. w. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$2\mu_{3,3} + \mu_{3,2} + \mu_{3,1} = 3m,$$

$$\mu_{2,3} + 2\mu_{2,2} + \mu_{2,1} = 2n,$$

$$\mu_{1,3} + \mu_{1,2} + 2\mu_{1,1} = p.$$

Sind m, n, p gegeben, so können mit Hilfe dieser 3 Gleichungen 3 der 6 Zahlen μ durch die 3 anderen ausgedrückt werden.

Es mag jetzt von Interesse sein, die Anzahl der Paarsysteme zu finden, die aus m dreiwertigen, n zweiwertigen und p einwertigen Dingen so gebildet werden können, daß jede der Zahlen μ einen bestimmten Wert erhält. Ich will dieses Problem hier nur in dem speziellen Fall $p = 0$ behandeln. Dann ist natürlich $\mu_{1,1} = \mu_{1,2} = \mu_{1,3} = 0$, und es bleiben die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\mu_{3,3} + \mu_{3,2} &= 6m, \\ \mu_{2,3} + 2\mu_{2,2} &= 2n, \end{aligned}$$

übrig, indem ich jetzt $2m$ statt m schreibe; denn die Zahl der dreiwertigen Dinge muß ja, wenn $p = 0$ ist, gerade sein. Wird nun z. B. $\mu_{2,3}$ gewählt, so werden $\mu_{2,2}$ und $\mu_{3,3}$ dadurch bestimmt. Ich will die gesuchte Zahl mit dem Symbol $C_{2m,n,\mu_{2,3}}$ bezeichnen. $C_{2m,n,\mu_{2,3}}$ soll also die Anzahl der Paarsysteme sein, die aus $2m$ dreiwertigen und n zweiwertigen Dingen in der Weise gebildet werden können, daß $\mu_{2,3}$ der Paare ein dreiwertiges und ein zweiwertiges Ding enthalten.

Werden in einem solchen Paarsystem die zweiwertigen Dinge mit den zugehörigen Bindungen entfernt, so bleibt eine Kombination der $2m$ dreiwertigen Dingen mit $\mu_{2,3}$ freien Bindungen übrig — also ein $\mu_{2,3}$ -wertiges Radikal¹ nach chemischer Bezeichnungsweise. Im allgemeinen Falle werden die freien Bindungen teils von γ_0 der dreiwertigen Dinge, die in dem Radikal mit keinem der anderen dreiwertigen Dinge verknüpft sind, teils von γ_1 der Dinge des Radikals, die mit einem der anderen Dinge verknüpft sind, und teils von γ_2 der Dinge, die mit zwei der anderen verknüpft sind, herrühren. Die Anzahl der möglichen Arten, dieses Radikal zu wählen, wird deshalb gleich

$$\frac{(2m)!}{\gamma_0! \gamma_1! \gamma_2! (2m - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2)!} \cdot A_{2m - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2, \gamma_2, \gamma_1} \quad K_1,$$

und außerdem muß

$$\mu_{2,3} = 3\gamma_0 + 2\gamma_1 + \gamma_2.$$

In ähnlicher Weise erhält man, wenn die dreiwertigen Dinge mit ihren Bindungen weggelassen werden, eine Kombination der n zweiwertigen Dinge, wobei $\mu_{2,3}$ freie Bindungen vorkommen werden. Diese werden dann teils von ϱ_0 der zweiwertigen Dinge, die mit keinem der übrigen verknüpft sind,

¹ Streng genommen braucht es nicht *ein* Radikal im chemischen Sinne zu sein; es kann eine Sammlung mehrerer Radikale sein. Der Kürze halber nenne ich aber auch jede solche Sammlung ein Radikal.

und teils von q_1 dieser Dinge, die mit einem der übrigen verknüpft sind, herrühren. Es muß also

$$\mu_{2,3} = 2q_0 + q_1,$$

und die Anzahl der möglichen Arten, das Radikal zu wählen, wird

$$\frac{n!}{q_0! q_1! (n - q_0 - q_1)!} A_{n-q_0-q_1, q_1} = K_2.$$

Weiter kommt es nur darauf an zu finden, auf wie viele Arten jedes der K_1 ersten Radikale mit jedem der K_2 letzten verbunden werden können. Werden in einem beliebigen der K_1 ersten Radikale alle $\mu_{3,3}$ inneren Bindungen aufgehoben, so bleiben augenscheinlich γ_0 dreiwertige, γ_1 zweiwertige und γ_2 einwertige Dinge übrig. Werden in einem beliebigen der K_2 letzten Radikale alle $\mu_{2,2}$ inneren Bindungen aufgehoben, so bleiben q_0 zweiwertige und q_1 einwertige Dinge übrig. Die Anzahl der möglichen Arten, ein willkürliches der ersten Radikale mit einem willkürlichen der letzten zu kombinieren, wird deshalb gleich

$$A_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2; 0, q_0, q_1},$$

was ich übrigens kürzer

$$A_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2; q_0, q_1}$$

schreiben will.

Die gesuchte Zahl wird deshalb, wenn man $2m - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3$ und $n - q_0 - q_1 = q_2$ setzt,

$$C_{2m, n, \mu_{2,3}} = \sum_{(\gamma)} \sum_{(q)} \frac{(2m)!}{\gamma_0! \gamma_1! \gamma_2! \gamma_3!} \cdot \frac{n!}{q_0! q_1! q_2!} A_{\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1} A_{q_2, q_1} A_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2; q_0, q_1},$$

wenn die Summation über alle Werte von $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ und q_0, q_1 , für welche die Gleichungen

$$3\gamma_0 + 2\gamma_1 + \gamma_2 = \mu_{2,3}, \quad 2q_0 + q_1 = \mu_{2,3},$$

stattfinden, ausgedehnt wird.

Ein besonders einfacher Sonderfall ist $\mu_{2,3} = 0$. Dann wird $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = q_0 = q_1 = 0$, und die Summe reduziert sich auf ein einziges Glied, nämlich $A_{2m, 0, 0} A_{n, 0}$. Daß dies richtig ist, sieht man auch unmittelbar ein.

Ein anderer einfacher Sonderfall ist $\mu_{2,3} = 2$. ($\mu_{2,3} = 2n - 2\mu_{2,2}$ ist notwendigerweise eine gerade Zahl). Dann ist $\gamma_0 = 0$ und entweder $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$, oder $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 2$ und weiter entweder $q_0 = 1, q_1 = 0$ oder $q_0 = 0, q_1 = 2$. Also erhält man eine Summe von 4 Gliedern:

$$\begin{aligned}
& 2mn A_{2m-1,0,1} A_{n-1,0} A_{0,1,0:1,0} + \binom{2m}{2} n A_{2m-2,2,0} A_{n-1,0} A_{0,0,2:1,0} + \\
& + 2m \binom{n}{2} A_{2m-1,0,1} A_{n-2,2} A_{0,1,0:0,2} + \binom{2m}{2} \binom{n}{2} A_{2m-2,2,0} A_{n-2,2} A_{0,0,2:0,2} = \\
& = \binom{2m}{2} n A_{m-2,2,0} A_{n-1,0} + 2m \binom{n}{2} A_{2m-1,0,1} A_{n-2,2} + 2 \binom{2m}{2} \binom{n}{2} A_{2m-2,2,0} A_{n-2,2}.
\end{aligned}$$

Beispiel: $m = 2$, $n = 4$. Dann erhält man

$$C_{4,4,2} = 24 A_{2,2,0} A_{3,0} + 72 A_{2,2,0} A_{2,2} = 24 + 144 = 168.$$

Ein bemerkenswerter Sonderfall ist $\mu_{2,3} = 2n$. Dann ist $\mu_{2,2} = 0$, so daß man erhält

$$C_{2m,n,2n} = B_{2m,n,0}. \quad (\text{Vergl. S. 39}).$$

In dieser Weise erhalten wir also einen neuen Ausdruck für die Zahl $B_{2m,n,0}$.

Mit Hilfe dieser Zahlen $C_{2m,n,\mu_{2,3}}$ kann man durch Anwendung des Dualismus folgende Aufgabe lösen:

Auf wie viele Arten kann man von $3m + n$ Dingen $2m$ Tripel und n Paare so bilden, daß jedes von $\mu_{2,2}$ der Dinge in 2 Paaren, jedes von $\mu_{2,3}$ der Dinge in einem Paar und einem Tripel und jedes von $\mu_{3,3}$ der Dinge in 2 Tripeln vorkommt, wenn $\mu_{2,2} + \mu_{2,3} + \mu_{3,3} = 3m + n$ ist, und weiter zwei dieser Paare und Tripel niemals mehr als 1 Ding gemein haben? (Dies gibt uns, wie man sieht, eine Verallgemeinerung des Seite 40 erwähnten Satzes).

Die gesuchte Anzahl wird

$$\frac{(3m + n)!}{(2m)! n!} C_{2m,n,\mu_{2,3}},$$

wenn es nicht gegeben ist, *welche* $\mu_{2,2}$ der Dinge in 2 Paaren und auch nicht *welche* $\mu_{2,3}$ der Dinge in einem Paar und einem Tripel vorkommen sollen. Ist dagegen dies bestimmt, so wird die Anzahl

$$\frac{\mu_{2,2}! \mu_{2,3}! \mu_{3,3}!}{(2m)! n!} C_{2m,n,\mu_{2,3}}.$$

Beispiel:

Die Anzahl der Arten, wie man aus 10 Dingen 4 Tripel und 4 Paare so bilden kann, daß 3 bestimmte der Dinge in zwei der Paare vorkommen, 2 bestimmte Dinge sowohl in einem Paare als einem Tripel vorkommen, und endlich die 5 übrigen Dinge in zwei Tripeln vorkommen, und niemals zwei der Tripel und Paare mehr als ein Ding gemein haben, ist

$$\frac{5! 3! 2!}{4! 4!} C_{4,4,2} = \frac{5}{2} \cdot 168 = 420,$$

indem $C_{4,4,2} = 168$ ist, wie oben gefunden.

Bezeichnen 1, 2, ..., 10 die zehn Dinge, und sind 1, 2, 3, 4, 5 diejenigen, welche in zwei Tripeln vorkommen sollen, 6 und 7 die, welche in einem Paar und einem Tripel vorkommen sollen, und endlich 8, 9, 10 die, welche in zwei Paaren vorkommen sollen, so sind die 420 Möglichkeiten in der Tat die folgenden:

$$1) (1, 2, 3) (1, 4, 5) (2, 4, 6) (3, 5, 7) (6, 8) (7, 9) (8, 10) (9, 10)$$

und die durch Umordnungen hieraus ableitbaren; im ganzen 360.

$$2) (1, 2, 3) (1, 4, 5) (2, 4, 6) (3, 5, 7) (6, 7) (8, 9) (8, 10) (9, 10)$$

und die durch Umordnungen hieraus ableitbaren; im ganzen 60.

Im vorhergehenden habe ich, wenn dreiwertige Dinge vorkommen, nur den Fall betrachtet, wo alle Bindungen einfach sind. Ich will nun einige Betrachtungen über Paarsysteme, in denen doppelte Bindungen auftreten, anstellen.

Es sei $D_{m,n,p}$ die Anzahl der Arten, wie man aus m dreiwertigen, n zweiwertigen und p einwertigen Atomen ein oder mehrere Moleküle bilden kann, wenn auch doppelte Bindungen auftreten können — oder mit anderen Worten die Anzahl der von $m + n + p$ Dingen konstruierbaren Paarsysteme von solcher Beschaffenheit, daß jedes unter m bestimmten der Dinge in drei der Paare, n bestimmte der Dinge in zwei der Paare und jedes der p übrigen in einem Paare vorkommen, wenn außerdem erlaubt ist, daß ein oder mehrere Mal zwei Paare gleich sind. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$D_{m,n,p} = mD_{m-1,n+1,p-1} + nD_{m,n-1,p} + (p-1)D_{m,n,p-2}.$$

$$D_{m,n,p} = \binom{m}{2} D_{m-2,n+1,p} + mnD_{m-1,n-1,p+1} + mpD_{m-1,n,p-1} + \\ + \binom{n-1}{2} D_{m,n-3,p+2} + (n-1)(p+1) D_{m,n-2,p} + \binom{p}{2} D_{m,n-1,p-2}.$$

$$D_{m,n,p} = \binom{m-1}{3} D_{m-4,n+3,p} + \binom{m-1}{2} (n+2) D_{m-3,n+1,p+1} + \\ + (m-1) \left(\binom{n}{2} + n \right) D_{m-2,n-1,p+2} + \binom{n}{3} D_{m-1,n-3,p+3} + \binom{m-1}{2} p D_{m-3,n+2,p-1} + \\ + (m-1)(np + n + p) D_{m-2,n,p} + \binom{n}{2} (p+2) D_{m-1,n-2,p+1} + (m-1) \binom{p}{2} D_{m-2,n+1,p-2} + \\ + n \left(\binom{p}{2} + p \right) D_{m-1,n-1,p-1} + \binom{p}{3} D_{m-1,n,p-3}.$$

Zur wirklichen Ausrechnung der Zahlen D braucht man nicht die zwei letzten Gleichungen in dieser allgemeinsten Gestalt. Man kann sich mit dem Sonderfall $p=0$ der zweiten und $n=p=0$ der dritten Gleichung begnügen.

Es wird übrigens auch von Interesse sein, die Anzahl der Paarsysteme mit einer gegebenen Anzahl doppelter Bindungen zu finden. Es sei $D_{m,n,p,\mu}$ die Anzahl der Systeme mit μ doppelten Bindungen. Dann hat man folgende Gleichungen:

$$D_{m,n,p,\mu} = mD_{m-1,n+1,p-1,\mu} + nD_{m,n-1,p,\mu} + (p-1)D_{m,n,p-2,\mu}.$$

$$\begin{aligned} D_{m,n,p,\mu} = & \binom{n}{2} D_{m-2,n+1,p,\mu} + m(n-1)D_{m-1,n-1,p+1,\mu} + mpD_{m-1,n,p-1,\mu} + \\ & + \binom{n-1}{2} D_{m,n-3,p+2,\mu} + (n-1)pD_{m,n-2,p,\mu} + \binom{p}{2} D_{m,n-1,p-2,\mu} + \\ & + mD_{m-1,n-1,p+1,\mu-1} + (n-1)D_{m,n-2,p,\mu-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{m,n,p,\mu} = & \binom{m-1}{3} D_{m-1,n+3,p,\mu} + \binom{m-1}{2} nD_{m-3,n+1,p+1,\mu} + \\ & + (m-1)\binom{n}{2} D_{m-2,n-1,p+2,\mu} + \binom{n}{3} D_{m-1,n-3,p+3,\mu} + \binom{m-1}{2} pD_{m-3,n+2,p-1,\mu} + \\ & + (m-1)nD_{m-2,n,p,\mu} + \binom{n}{2} pD_{m-1,n-2,p+1,\mu} + (m-1)\binom{p}{2} D_{m-2,n+1,p-2,\mu} + \\ & + n\binom{p}{2} D_{m-1,n-1,p-1,\mu} + \binom{p}{3} D_{m-1,n,p-3,\mu} + (m-1)(m-2)D_{m-3,n+1,p+1,\mu-1} + \\ & + (m-1)nD_{m-2,n-1,p+2,\mu-1} + (m-1)pD_{m-2,n,p,\mu-1} + (m-1)nD_{m-2,n,p,\mu-1} + \\ & + n(n-1)D_{m-1,n-2,p+1,\mu-1} + npD_{m-1,n-1,p-1,\mu-1}. \end{aligned}$$

Kraft des Dualismus erhält man das Ergebnis, daß die Anzahl der aus $3m$ Dingen konstruierbaren Systeme von $2m$ Tripeln von solcher Beschaffenheit, daß jedes Ding in zwei der Tripel vorkommt, gleich

$$\sum_{\mu} \frac{(3m)!}{(2m)! 2^{\mu}} \cdot D_{2m,0,0,\mu}$$

ist, wenn in Gegensatz zu einer früheren Aufgabe (Vergl. S. 38) erlaubt wird, daß zwei Tripel zwei Dinge gemein haben können. Jedes Glied der Summe, $\frac{(3m)!}{(2m)! 2^{\mu}} D_{2m,0,0,\mu}$, gibt die Anzahl dieser Tripelsysteme an, in denen eben μ Mal der Fall eintritt, daß zwei Tripel zwei Dinge gemein haben.

Es sei jetzt $D'_{m,n,p,\mu}$ die Anzahl der Paarsysteme, in denen μ doppelte Bindungen auftreten, aber keine doppelte Bindung zwischen 2 zweiwertigen Dingen vorkommt. Dann findet man leicht, daß

$$D'_{m,n,p,\mu} = \sum_r (-1)^r \frac{n!}{(n-2r)! r! 2^r} \cdot D_{m,n-2r,p,\mu-r}.$$

Mit Hilfe des Dualismus gelangt man weiter zu dem Ergebnis, daß die Anzahl der aus $3m + n$ Dingen konstruierbaren Systeme von $2m$ Tripeln und n Paaren von solcher Beschaffenheit, daß jedes der Dinge in zwei dieser Tripel und Paare vorkommt, gleich

$$\sum_{\mu} \frac{(3m+n)!}{(2m)! n! 2^{\mu}} D'_{2m, n, 0, \mu}$$

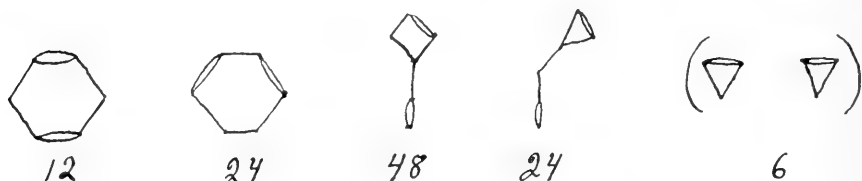
ist, und hier gibt jedes Glied, $\frac{(3m+n)!}{(2m)! n! 2^{\mu}} D'_{2m, n, 0, \mu}$, die Anzahl der Systeme an, in denen μ Mal der Fall eintritt, daß zwei Tripel oder ein Tripel und ein Paar 2 Dinge gemein haben.

Beispiel:

Man findet durch Ausrechnung $D'_{4, 2, 0, 2} = 114$. Infolge dessen ist die Anzahl der Systeme von 4 Tripeln und 2 Paaren, die aus 8 Dingen so gebildet werden können, daß jedes Ding in 2 der Tripel und Paare vorkommt, während außerdem zweimal 2 Tripel oder 1 Tripel und 1 Paar 2 Dinge gemein haben, gleich

$$\frac{8!}{4! 2! 2^2} \cdot 114 = 210 \cdot 114 = 23940.$$

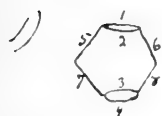
Die 114 Kombinationen, die durch $D'_{4, 2, 0, 2}$ angegeben werden, sind übrigens von den durch folgende Figuren angedeuteten 5 Typen:



Die auseinander gekrümmten Striche sollen doppelte Bindungen bedeuten. Die unter den Figuren aufgeschriebenen Zahlen geben die Anzahl der Paarsysteme der verschiedenen Typen an.

Um die verschiedenen möglichen Systeme von 4 Tripeln und 2 Paaren zu finden, können wir die 8 Dinge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nennen und stellen diese Zahlen an die 8 Bindungen in jeder der obenstehenden Figuren. Dann bestimmt (S. p. 42) jeder Punkt, von dem 3 Striche ausgehen, ein Tripel unter den 8 Dingen, und jeder Punkt, von dem 2 Striche ausgehen, bestimmt ein Paar. In dieser Weise erhält man ohne weiteres 5 Typen für die Anordnungen der 8 Dinge in 4 Tripel und 2 Paare der verlangten Natur.

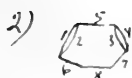
Diese Anordnungen sind folgende:



(1, 2, 5) (1, 2, 6) (3, 4, 7) (3, 4, 8) (5, 7) (6, 8).

Durch Umordnung erhält man hieraus im ganzen

$$\frac{1}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \cdot 2 = 210 \cdot 12 \text{ mögliche Anordnungen.}$$



(1, 2, 5) (1, 2, 6) (3, 4, 5) (3, 4, 7) (6, 8) (7, 8).

Hieraus erhält man $210 \cdot 24$ Möglichkeiten.



(1, 2, 3) (3, 4, 5) (5, 7, 8) (6, 7, 8) (1, 2) (4, 6).

Hieraus durch Umordnungen $210 \cdot 48$ Möglichkeiten.



(1, 2, 3) (4, 5, 6) (5, 7, 8) (6, 7, 8) (1, 2) (3, 4).

Hieraus $210 \cdot 24$ Möglichkeiten.



(1, 2, 5) (1, 2, 6) (3, 4, 7) (3, 4, 8) (5, 6) (7, 8).

Hieraus $210 \cdot 6$ Möglichkeiten.

Wie man sieht, stimmt alles dies mit dem dualistischen Prinzip überein.

Ich will jetzt zeigen, wie die Zahlen $D_{m,n,p,\mu}$ auch in einer anderen Weise — also ohne Anwendung der oben angegebenen rekurrenten Formeln — gefunden werden können; sie können nämlich durch die Zahlen $A_{m,n,p}$ ausgedrückt werden. Zuerst will ich jedoch eine einfachere Zahl $E_{m,n,p,\mu}$ bestimmen, die die Anzahl der Paarsysteme mit μ doppelten Bindungen zwischen dreiwertigen Dingen, sonst aber nur mit einfachen Bindungen, bedeuten soll.

Wenn zwei dreiwertige Dinge doppel verbunden sind, machen sie zusammen ein zweiwertiges Radikal aus. Sind die zwei dreiwertigen Dinge weiter mit zwei verschiedenen dreiwertigen Dingen, die auch mit einander doppel verbunden sind, verknüpft, so spaltet sich ein geschlossenes System, aus 4 Dingen gebildet, ab. Es sei μ_0 die Zahl solcher Systeme. Die übrigen zweiwertigen Radikale sind durch einfache Bindungen mit einander oder mit anderen Dingen verbunden. Sind die zwei dreiwertigen Dinge dagegen mit demselben dritten Dinge verbunden, so ist dies entweder zwei- oder dreiwertig. Im ersten Falle spaltet sich ein geschlossenes System — ein Molekül — ab. Im zweiten Falle wird ein einwertiges Radikal gebildet. Es sei nun μ_1 die Zahl der Paare doppelgebundener dreiwertiger Dinge, die weiter mit verschiedenen, nicht miteinander doppel verbundenen Dingen verknüpft sind, μ_2 die Zahl der Paare dreiwertiger Dinge, die mit

einander doppel verbunden und weiter mit demselben zweiwertigen Dinge verknüpft sind, und μ_3 die Zahl der Paare doppelgebundener dreiwertigen Dinge, die weiter mit demselben dreiwertigen Dinge verknüpft sind. Dann muß natürlich $2\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu$ sein. Weiter wird die Anzahl der möglichen Kombinationen augenscheinlich gleich der Anzahl der Arten, auf die man unter den m dreiwertigen Dingen erstens μ_0 geordnete disjunkte Paare von disjunkten Paaren, dann μ_1 geordnete disjunkte Paare, dann μ_3 einzelne Dinge und μ_3 (sowohl mit den μ_3 einzelnen Dingen wie auch unter einander disjunkte) Paare, deren jedes mit einem der μ_3 Dinge verknüpft ist, und endlich μ_2 einzelne Dinge unter den zweiwertigen und μ_2 Paare der dreiwertigen, deren jedes mit einem der μ_2 einzelnen Dinge kombiniert sein soll, wählen kann — alles dies mit der Zahl $A_{m-4\mu_0-2\mu_1-2\mu_2-3\mu_3, n+\mu_1-\mu_2, p+\mu_3}$ multipliziert.

Die beschriebene Auswahl kann auf

$$\frac{m! \, n!}{2^{\mu_2+\mu_3+2\mu_0} \mu_0! \, \mu_1! \, \mu_2! \, \mu_3! \, (m-4\mu_0-2\mu_1-2\mu_2-3\mu_3)! \, (n-\mu_2)!}$$

Arten geschehen. Hieraus folgt, daß

$$E_{m,n,p,\mu} = \sum \frac{2^{-\mu_2-\mu_3-2\mu_0} m! \, n!}{\mu_0! \, \mu_1! \, \mu_2! \, \mu_3! \, m'! \, (n-\mu_2)!} A_{m', n+\mu_1-\mu_2, p+\mu_3},$$

wenn die Summation über alle Werte von $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, für welche die Gleichung

$$2\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu$$

stattfindet, ausgedehnt wird, und außerdem $m-4\mu_0-2\mu_1-2\mu_2-3\mu_3=m'$ gesetzt ist.

Beispiel:

$$E_{4,2,0,2} = \frac{4! \, 2!}{2^2 \cdot 2!} A_{0,2,0} + \frac{4! \, 2!}{2! \, 2!} A_{0,4,0} + \frac{4! \, 2!}{2} A_{0,2,0} + \frac{4! \, 2!}{2^2 \cdot 2!} A_{0,0,0} = 12 \cdot 3 + 6 = 42.$$

Natürlich ist

$$\frac{(3m+n)!}{(2m)! \, n! \, 2^\mu} E_{2m, n, 0, \mu}$$

die Anzahl der Systeme von $2m$ Tripeln und n Paaren, die aus $3m+n$ Dingen so gebildet werden können, daß jedes Ding in 2 der Tripel und Paare vorkommt, und außerdem μ Mal der Fall eintritt, daß zwei Tripel zwei Dinge gemein haben, sonst aber niemals zwei Tripel, ein Tripel und ein Paar oder zwei Paare mehr als ein Ding gemein haben.

In ähnlicher Weise, wie wir $E_{m,n,p,\mu}$ gefunden haben, findet man auch, daß

$$D_{m,n,p,\mu} = \sum_{(\mu)} \frac{2^{-2\mu_0-\mu_2-\mu_3-\mu_5} m! n!}{\mu_0! \mu_1! \mu_2! \mu_3! \mu_4! \mu_5! m'! n'!} A_{m',n'+\mu_1,p'},$$

wo der Kürze halber $m - 4\mu_0 - 2\mu_1 - 2\mu_2 - 3\mu_3 - \mu_4 = m'$, $n - \mu_2 - \mu_4 - 2\mu_5 = n'$ und $p + \mu_3 + \mu_4 = p'$ gesetzt ist, wenn die Summation über alle Werte von $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ und μ_5 , für welche die Gleichung

$$2\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 = \mu$$

stattfindet, ausgedehnt wird. Hier bedeutet für jedes Glied der Summe μ_4 die Anzahl der doppelten Bindungen zwischen zweiwertigen und dreiwertigen Dingen und μ_5 die Zahl der doppelten Bindungen zwischen zweiwertigen Dingen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} D_{4,2,0,2} &= \frac{4! 2!}{2^2 \cdot 2!} A_{0,2,0} + \frac{4! 2!}{2! 2!} A_{0,4,0} + \frac{4! 2!}{2} A_{0,2,0} + 4! 2! A_{1,2,1} + \frac{4! 2!}{2 \cdot 2!} A_{2,1,0} + \\ &+ \frac{4! 2!}{2^2 \cdot 2!} A_{0,0,0} + \frac{4! 2!}{2} A_{1,0,1} + \frac{4! 2!}{2} A_{0,1,2} + \frac{4! 2!}{2^2} A_{1,0,1} + \frac{4! 2!}{2! 2!} A_{2,0,2} = \\ &= 12,3 + 48,1 + 6,1 + 24,1 = 114. \end{aligned}$$

Da $D_{4,0,0,1}$ augenscheinlich gleich null ist, wird auch $D'_{4,2,0,2} = 114$, was ich schon oben benutzt habe. (Seite 64).

Endlich will ich die Anzahl der Paarsysteme, die aus $2m$ dreiwertigen und n zweiwertigen Dingen in folgender Weise gebildet werden können, suchen: Es sollen μ doppelte Bindungen zwischen dreiwertigen Dingen, sonst aber nur einfache Bindungen, vorkommen, und weiter soll es im ganzen $\mu_{2,2}$ Bindungen zwischen zweiwertigen, $\mu_{2,3}$ Bindungen zwischen zwei- und dreiwertigen und $\mu_{3,3}$ Bindungen zwischen dreiwertigen Dingen geben. Dann muß natürlich

$$2\mu_{3,3} + \mu_{2,3} = 6m \quad \text{und} \quad \mu_{2,3} + 2\mu_{2,2} = 2n$$

sein.

Werden in einem solchen Systeme alle zweiwertigen Dinge mit zugehörigen Bindungen entfernt, so bleibt ein $\mu_{2,3}$ -wertiges Radikal, aus $2m$ dreiwertigen Dingen aufgebaut, übrig, und in diesem Radikal treten μ doppelte Bindungen auf. Im allgemeinen Falle werden die $\mu_{2,3}$ freien Bindungen teils von γ_0 dreiwertigen Dingen, die mit keinem der übrigen verbunden sind, teils von γ_1 , die mit einem der anderen verbunden sind, und teils von γ_2 Dingen, deren jedes mit zwei der übrigen einfach oder mit einem der übrigen doppel verbunden sind, herrühren. Dann ist

$$3\gamma_0 + 2\gamma_1 + \gamma_2 = \mu_{2,3},$$

und das Radikal kann auf

$$\frac{(2m)!}{\gamma_0! \gamma_1! \gamma_2! (2m - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2)!} D_{2m - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2, \gamma_2, \gamma_1, \mu}$$

Arten gewählt werden.

Werden dagegen die dreiwertigen Dinge mit ihren Bindungen entfernt, so bleibt eine Verbindung der n zweiwertigen Dinge mit $\mu_{2,3}$ freien Bindungen übrig, während nur einfache Bindungen vorkommen. Rühren die freien Bindungen von q_0 Dingen, die in dem Radikal mit keinem der übrigen verknüpft sind, und von q_1 Dingen, deren jedes mit einem der übrigen verknüpft sind, her, so ist

$$2q_0 + q_1 = \mu_{2,3},$$

und das Radikal kann auf

$$\frac{n!}{q_0! q_1! (n - q_0 - q_1)!} \cdot A_{n - q_0 - q_1, q_1}$$

Arten gewählt werden.

Die Anzahl der Arten, wie jedes der ersten Radikale mit jedem der zweiten Radikale zusammengeknüpft werden kann, ist augenscheinlich gleich der Anzahl der Arten, wie γ_0 dreiwertige, γ_1 zweiwertige und γ_2 einwertige Dinge einerseits und q_0 zweiwertige und q_1 einwertige Dinge andererseits so zusammengeknüpft werden können, daß nur einfache Bindungen auftreten, und sowohl die Dinge der ersten Reihe wie die Dinge der zweiten Reihe nicht miteinander verbunden werden; diese Anzahl ist aber

$$A_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2; q_0, q_1}.$$

Die gesuchte Zahl wird deshalb

$$\sum_{(\gamma)} \sum_{(q)} \frac{(2m)!}{\gamma_0! \gamma_1! \gamma_2! \gamma_3!} \cdot \frac{n!}{q_0! q_1! q_2!} D_{\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1, \mu} A_{q_2, q_1} A_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2; q_0, q_1},$$

wo γ_3 statt $2m - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2$ und q_2 statt $n - q_0 - q_1$ geschrieben ist, wenn die Summation über alle Werte von $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ und q_0, q_1 , für welche die Gleichungen

$$3\gamma_0 + 2\gamma_1 + \gamma_2 = \mu_{2,3}, \quad 2q_0 + q_1 = \mu_{2,3},$$

stattfinden, ausgedehnt wird.

Kraft des Dualismus erhält man hieraus wieder, daß die Anzahl der von $3m + n$ Dingen so konstruierbaren Systeme von $2m$ Tripeln und

n Paaren, daß jedes von $\mu_{2,2}$ der Dinge in zwei der Paare, jedes von $\mu_{2,3}$ der Dinge in einem Paar und einem Tripel und jedes der übrigen $\mu_{3,3}$ Dinge in zwei Tripeln vorkommt, während es μ Mal eintritt, daß zwei Tripel zwei Dinge gemein haben, niemals aber ein Tripel und ein Paar oder zwei Paare mehr als ein Ding gemein haben, gleich dem $\frac{(3m+n)!}{(2m)! n! 2^\mu}$ -fachen der soeben erwähnten Anzahl ist, d. h. gleich

$$\sum_{(\gamma)} \sum_{(\varrho)} \frac{2^{-\mu} (3m+n)!}{\gamma_0! \gamma_1! \gamma_2! \gamma_3! \varrho_0! \varrho_1! \varrho_2!} D_{\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1, \mu} A_{\varrho_2, \varrho_1} A_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2; \varrho_0, \varrho_1}.$$

Wenn diese Zahl von null verschieden sein soll, muß übrigens

$$2\mu_{3,3} + \mu_{2,3} = 6m \quad \text{und} \quad \mu_{2,3} + 2\mu_{2,2} = 2n$$

sein.

Dies ist richtig unter der Voraussetzung, daß es nicht gegeben ist, welche $\mu_{2,2}$ der $3m+n$ Dinge in 2 der Paare vorkommen sollen u. s. w. Soll dies dagegen bestimmt sein, so wird die Anzahl gleich dem $\frac{\mu_{2,2}! \mu_{2,3}! \mu_{3,3}!}{(3m+n)!}$ -fachen der zuletzt erwähnten Anzahl. Ist weiter auch bestimmt, welche 2μ der Dinge in den μ Paaren, deren jedes zwei Tripeln gemeinsam ist, vorkommen sollen, so wird die Anzahl der möglichen Anordnungen gleich

$$\sum_{(\gamma)} \sum_{(\varrho)} \frac{\mu_{2,2}! \mu_{2,3}! (\mu_{3,3} - 2\mu)! (2\mu)!}{2^\mu \gamma_0! \gamma_1! \gamma_2! \gamma_3! \varrho_0! \varrho_1! \varrho_2!} D_{\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1, \mu} A_{\varrho_2, \varrho_1} A_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2; \varrho_0, \varrho_1}.$$

Ich will diesen Paragraphen mit einer Verallgemeinerung der für die Zahlen $A_{m,n,p}$ aufgestellten rekurrenten Formeln abschließen.

Bezeichnet $A_{m_\gamma, m_{\gamma-1}, \dots, m_2, m_1}$ die Anzahl der Paarsysteme, die von $m_1 + m_2 + \dots + m_\gamma$ Dingen so gebildet werden können, daß jedes unter m_1 bestimmten der Dinge in 1 der Paare, jedes unter m_2 bestimmten der Dinge in 2 der Paare u. s. w., endlich jedes unter m_γ bestimmten der Dinge in γ der Paare vorkommt, so gelten folgende Rekursionsformeln:

$$A_{m_\gamma, m_{\gamma-1}, \dots, m_\varrho+1, \dots, m_2, m_1} = \\ = \sum_{(\varrho)} \binom{m_\gamma}{\varrho_\gamma} \binom{m_{\gamma-1}}{\varrho_{\gamma-1}} \cdots \binom{m_1}{\varrho_1} A_{m_\gamma-\varrho_\gamma, m_{\gamma-1}+\varrho_\gamma-\varrho_{\gamma-1}, m_{\gamma-2}+\varrho_{\gamma-1}-\varrho_{\gamma-2}, \dots, m_1+\varrho_2-\varrho_1}, \\ (\varrho = 1, 2, \dots, \gamma),$$

wenn die Summation über alle Werte von $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_\gamma$, für welche die Gleichung

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_\gamma = \varrho$$

stattfindet, ausgedehnt wird. Durch diese γ Gleichungen können die Zahlen A ausgerechnet werden. Diese Gleichungen werden in ähnlicher Weise wie die rekurrenten Formeln für $A_{n,p}$ (Seite 30) und $A_{m,n,p}$ (Seite 36) bewiesen.

§ 5.

Über unzerlegbare Paarsysteme, von ein-, zwei- und dreiwertigen Dingen gebildet.

Es sei $a_{m,n,p}$ die Anzahl der unzerlegbaren Paarsysteme, die aus $m + n + p$ Dingen so gebildet werden können, daß jedes unter m bestimmten der Dinge in drei der Paare, jedes unter n bestimmten der Dinge in zwei der Paare und jedes der übrigen p Dinge in einem Paare vorkommt, während außerdem alle Paare voneinander verschieden sind.

Dann gelten folgende drei Rekursionsformeln:

- I. $a_{m,n,p} = ma_{m-1,n+1,p-1} + na_{m,n-1,p}.$
- II. $a_{m,n,p} = \left(\frac{3}{2}m + n + \frac{p}{2} - 1\right) a_{m,n-1,p} + ma_{m-1,n-1,p+1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2} a_{m-3,n-1,p+1}.$
- III. $a_{m,0,0} = \binom{m-1}{3} a_{m-4,3,0} + \binom{m-1}{2} \binom{m-3}{1} \sum \frac{(m-4)!}{m_1! m_2!} a_{m_1,2,0} a_{m_2,1,0} + (m-1)(m-2)(m-3) \sum \frac{(m-4)!}{m_1! m_2! m_3!} a_{m_1,1,0} a_{m_2,1,0} a_{m_3,1,0}.$

In der letzten Gleichung soll die Summation im zweiten Gliede rechts über alle Werte von m_1 und m_2 , für die $m_1 + m_2 = m - 4$ ist, ausgedehnt werden, und im dritten Gliede soll die Summation über alle Werte von m_1, m_2, m_3 , für die $m_1 + m_2 + m_3 = m - 4$ ist, ausgedehnt werden.

Zur wirklichen Ausrechnung der Zahlen $a_{m,n,p}$ braucht man nicht die zweite Gleichung in der allgemeinen Form; man kann sich mit dem Sonderfall $p = 0$ begnügen.

Gleichung I wird durch Wegnahme des Paares, in dem ein gewisses einwertiges Ding sich befindet, bewiesen. Die Gleichung II wird durch Wegnahme der zwei Paare, in denen ein gewisses zweiwertiges Ding vorkommt, und darauffolgende Hinzufügung des Paares, das von den zwei anderen in jenen Paaren vorkommenden Dingen gebildet werden kann, bewiesen. Die Gleichung III wird bewiesen durch Wegnahme der ein gewisses dreiwertiges Ding enthaltenden Paare von den Paarsystemen, die von m dreiwertigen Dingen gebildet werden können.

Da die Anzahl der Paare gleich $\frac{3m+2n+p}{2}$ ist, muß $m+p$ eine gerade Zahl sein, oder wir können es auch so ausdrücken: Es ist immer $a_{m,n,p} = 0$, wenn $m+p$ eine ungerade Zahl ist. Ich kann aber auch beweisen, daß $a_{m,n,p} = 0$ ist, wenn $m-p < -2$ ist. Dieser Satz ist jedenfalls gültig, wenn $m=0$ ist; denn p muß dann entweder $=0$ oder $=-2$ sein, da ja ein unzerlegbares System, aus nur ein- und zweiwertigen Dingen gebildet, entweder einen Zyklus von nur zweiwertigen Dingen oder eine Kette von zweiwertigen, deren zwei Enden mit je einem einwertigen Dinge verknüpft sind, bilden muß. Weiter erhält man aus Gleichung I:

$$I'. \quad a_{m,n,p} = m(a_{m-1,n+1,p-1} + na_{m-1,n,p-1} + n(n-1)a_{m-1,n-1,p-1} + \cdots + n!a_{m-1,1,p-1}).$$

Nimmt man also an, daß der Satz gültig ist, wenn die Zahl der dreiwertigen Dinge gleich $m-1$ ist, so sind alle Glieder rechts in dieser Gleichung gleich null, wenn $m-p < -2$, und folglich wird auch $a_{m,n,p} = 0$. Die Allgemeingültigkeit des Satzes ist hierdurch bewiesen.

Wenn dagegen $m-p+2$ eine nicht-negative gerade Zahl ist, so ist $a_{m,n,p}$ von null verschieden bis auf einige Ausnahmen, nämlich:

$$a_{0,1,0}, \quad a_{0,2,0}, \quad a_{1,0,1}, \quad a_{1,1,1}, \quad a_{2,0,0}, \quad a_{2,0,2}, \quad a_{2,1,0}, \quad a_{3,0,1}.$$

Zuerst will ich diese Behauptung für den Fall $p=0$ beweisen. Ist dann m eine gerade Zahl größer als 4, so kann man immer ein unzerlegbares System von m dreiwertigen und n zweiwertigen Dingen dadurch bilden, daß man sich ein Prisma mit $\frac{m}{2}$ Kanten bildet und dann die m dreiwertigen Dinge die Ecken dieses Prismas sein läßt, während man die n zweiwertigen Dinge in Ketten zwischen diesen dreiwertigen Ecken einschaltet. Man kann z. B. alle n Dinge in einer Kette zwischen zwei Ecken einschalten. Ist $m=4$, kann man die vier dreiwertigen Dinge als Ecken eines Tetraeders wählen und dann die zweiwertigen Dinge in Ketten einschalten. Hierdurch ist also bewiesen, daß es immer unzerlegbare Systeme gibt, die aus m dreiwertigen und n zweiwertigen Dingen gebildet sind, wenn m gerade und >2 ist. Ist $m=2$, so gibt es augenscheinlich kein System, wenn $n=0$ oder $n=1$ ist. Dagegen kann man im Falle $m=2$, $n=2$ ein unzerlegbares System dadurch bilden, daß man in einem Viereck eine Diagonale zieht; dann repräsentieren die durch die Diagonale verbundenen Ecken die zwei dreiwertigen Dinge und die anderen Ecken die zwei zweiwertigen Dinge. Hieraus folgt, daß auch immer unzerlegbare Systeme existieren, wenn $m=2$ und $n>2$ ist; denn man kann ein Viereck bilden, eine Diagonale ziehen und $n-2$ zweiwertige Dinge in Ketten

einschalten. Ist $m=0$, so gibt es immer unzerlegbare Systeme, wenn $n > 2$ ist, da die zweiwertigen Dinge in einen Zyklus gestellt werden können.

Durch diese Betrachtungen haben wir also gefunden, daß es, wenn $p=0$ ist, immer, und zwar nur dann, unzerlegbare Systeme gibt, wenn m eine gerade Zahl ist, wobei die Fälle $m=2, n=1$; $m=2, n=0$; $m=0, n=2$; $m=0, n=1$ ausgenommen werden.

Wir betrachten nun den Fall, daß $p > 0$ und $m-p \geq 0$ ist. Kann man dann ein unzerlegbares System S' von $m-p$ dreiwertigen, $n+p$ zweiwertigen und keinen einwertigen Dingen bilden, so kann man auch ein unzerlegbares System S von m dreiwertigen, n zweiwertigen und p einwertigen Dingen bilden, nämlich dadurch, daß man p der $n+p$ zweiwertigen Dinge in S' mit p zweiwertigen Radikalen, deren jedes aus einem dreiwertigen und einem damit verknüpften einwertigen Dinge besteht, ersetzt.

Ist $m-p$ gerade und > 2 , so ist dies zufolge des schon bewiesenen immer möglich.

Ist $m-p=2$ und $n+p > 1$, dann ist es ebenfalls, wie wir schon sahen, immer möglich. Ist $n+p=1$, so muß, da $p > 0$ sein soll, $n=0$ und $p=1$ sein und folglich $m=3$. In diesem Falle gibt es aber, wie man leicht feststellen kann, kein Paarsystem.

Ist $m-p=0$ und $n+p > 2$, so gibt es immer unzerlegbare Systeme. Ist $n+p=2$, so kann entweder $m=1, n=1, p=1$ sein oder $m=2, n=0, p=2$ sein. In diesen Fällen gibt es keine Paarsysteme, wie man leicht feststellt. Ist $n+p=1$, so muß $m=1, n=0, p=1$ sein, und in diesem Falle gibt es ebenfalls kein Paarsystem.

Es bleibt dann nur der Fall $m-p=-2$ übrig. Ist $m=0, p=2$, so gibt es immer unzerlegbare Systeme; denn man kann eine Kette aus den zweiwertigen Dingen bilden und mit deren Enden die zwei einwertigen Dinge verbinden. In allen anderen Fällen kann man sich zuerst ein unzerlegbares System von $m+n$ zweiwertigen und $p-m=2$ einwertigen Dingen bilden und dann m der zweiwertigen Dinge mit m zweiwertigen Radikalen, jedes aus einem dreiwertigen und einem damit verbundenen einwertigen Dinge bestehend, ersetzen. Man erhält hierdurch ein unzerlegbares System von m drei-, n zwei- und p einwertigen Dingen.

Es gibt also — bis auf die acht erwähnten Ausnahmen — immer unzerlegbare Systeme, wenn $\frac{m-p+2}{2}$ eine nicht-negative ganze Zahl ist, w. z. bw. w.

In Gleichung I' wird $a_{m,n,p}$ durch Zahlen a , deren letzter Index $p-1$ ist, ausgedrückt. Durch wiederholte Anwendung von I' kann man dann,

wenn $p \leq m$ ist, was ja die meisten Fälle umfaßt (nur der Fall $p = m + 2$ wird ausgenommen), $a_{m,n,p}$ durch Zahlen a , deren letzter Index null ist, ausdrücken.

Setzt man

$$a_{m,n,p} = m(m-1) \cdots (m-\mu+1) \sum_0^{n+\mu-1} \alpha_{\mu,r} a_{m-\mu, r+1, p-\mu},$$

so wird zufolge der Gleichung I' auch

$$\begin{aligned} a_{m,n,p} &= m(m-1) \cdots (m-\mu) \sum_0^{n+\mu-1} \alpha_{\mu,r} \sum_0^{r+1} \frac{(r+1)!}{s!} a_{m-\mu-1, s+1, p-\mu-1} = \\ &= m(m-1) \cdots (m-\mu) \sum_0^{n+\mu} \frac{1}{s!} \left(\sum_{s-1}^{n+\mu-1} (r+1)! \alpha_{\mu,r} \right) a_{m-\mu-1, s+1, p-\mu-1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß

$$\alpha_{\mu+1, s} = \frac{1}{s!} \sum_{s-1}^{n+\mu-1} (r+1)! \alpha_{\mu, r}.$$

Ich behaupte nun, daß $\alpha_{\mu, r}$ so ausgedrückt werden kann:

$$\alpha_{\mu, r} = \frac{n!}{r!} \sum_r^{n+\mu-1} s_1 \sum_{s_1-1}^{n+\mu-2} s_2 \cdots \sum_{\substack{s_{\mu'-1} \\ \mu'=\mu-2}}^{n+1} s_{\mu-1};$$

denn wird dies in der eben gefundenen Rekursionsformel rechts eingesetzt, so erhält man

$$\alpha_{\mu+1, s} = \frac{n!}{s!} \sum_{s-1}^{n+\mu-1} (r+1) \sum_r^{n+\mu-1} s_1 \sum_{s_1-1}^{n+\mu-2} s_2 \cdots \sum_{s_{\mu'-1}-1}^{n+1} s_{\mu-1} = \frac{n!}{s!} \sum_s^{n+\mu} r \sum_{r-1}^{n+\mu-1} s_1 \cdots \sum_{s_{\mu'-1}-1}^{n-1} s_{\mu-1},$$

und außerdem sieht man, daß $\alpha_{1, r} = \frac{n!}{r!}$ ist. Der angegebene Ausdruck für $\alpha_{\mu, r}$ ist also allgemein gültig.

Wird $\mu = p$ gewählt, so erhält man

$$I''. \quad a_{m,n,p} = m(m-1) \cdots (m-p+1) \sum_0^{n+p-1} \frac{n!}{r!} \left(\sum_r^{n+p-1} s_1 \sum_{s_1-1}^{n+p-2} s_2 \cdots \sum_{\substack{s_{p'-1} \\ p'=p-2}}^{n+1} s_{p-1} \right) a_{m-p, r+1, 0}.$$

In dem Falle $p = m + 2$ ist es leicht, einen independenten Ausdruck der Zahl a zu finden. Aus den Gleichungen I und II erhält man

durch Gleichsetzen der rechten Seiten und indem man n mit $n+1$ ersetzt

$$\left(\frac{3}{2}m + \frac{p}{2} - 1\right) a_{m,n,p} = m a_{m-1,n+2,p-1} - m a_{m-1,n,p+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2} a_{m-3,n,p+1}.$$

Wird hier $p = m+2$ gesetzt, so erhält man

$$2a_{m,n,m+2} = a_{m-1,n+2,m+1},$$

da sowohl $a_{m-1,n,m+3}$ wie $a_{m-3,n,m+3}$ null sein müssen. Folglich ist

$$a_{m,n,m+2} = \frac{1}{2^m} a_{0,n+2m,2} = \frac{(2m+n)!}{2^m}. \quad (\text{S. p. 34}).$$

Wie man sieht, sind die Gleichungen I und II linear, aber nicht III. Da es mir nicht gelungen ist, einen independenten Ausdruck der Zahl $a_{m,n,p}$ in dem allgemeinen Falle zu finden (ich habe übrigens nicht viele Versuche in dieser Richtung gemacht), so habe ich versucht, eine lineare Rekursionsformel, die III ersetzen könnte, zu finden. Dies ist mir in folgender Weise gelungen.

Entfernt man von den Paarsystemen, die aus $2m$ dreiwertigen und einem zweiwertigen Dinge aufgebaut werden können, die Paare, in denen das zweiwertige Ding vorkommt, so findet man folgende Gleichung:

$$\text{IV}_a. \quad a_{2m,1,0} = \binom{2m}{2} a_{2m-2,2,0} + \binom{2m}{2} \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1,1,0} a_{2m_2,1,0},$$

wobei die Summation über alle Zahlen $2m_1$ und $2m_2$, deren Summe $2m-2$ ist, ausgedehnt werden soll¹. Hieraus erhält man weiter

$$\begin{aligned} \binom{2m-2m_3}{2} \sum \frac{(2m-2m_3-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1,1,0} a_{2m_2,1,0} &= \\ &= a_{2m-2m_3,1,0} - \binom{2m-2m_3}{2} a_{2m-2m_3-2,2,0}, \end{aligned}$$

wodurch

$$\begin{aligned} \frac{(2m-2m_3)!}{2(2m-2m_3-2)!} \sum \frac{(2m-2m_3-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} \frac{(2m)!}{(2m-2m_3)!(2m_3)!} a_{2m_1,1,0} a_{2m_2,1,0} a_{2m_3,1,0} &= \\ = \sum \frac{(2m)!}{(2m-2m_3)!(2m_3)!} a_{2m-2m_3,1,0} a_{2m_3,1,0} - \\ - \sum \frac{(2m-2m_3)(2m-2m_3-1)(2m)!}{2(2m-2m_3)!(2m_3)!} a_{2m-2m_3-2,2,0} a_{2m_3,1,0} \end{aligned}$$

oder

¹ Ich schreibe überhaupt im folgenden alle Summen von Produkten der Zahlen a so, daß die Koeffizienten der Produkte entweder Binomial- oder Polynomkoeffizienten werden.

$$\begin{aligned} & \binom{2m}{2} \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!(2m_3)!} a_{2m_1, 1, 0} a_{2m_2, 1, 0} a_{2m_3, 1, 0} = \\ & = \sum \frac{(2m)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 1, 0} a_{2m_2, 1, 0} - \binom{2m}{2} \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 2, 0} a_{2m_2, 1, 0}. \end{aligned}$$

Nun können wir in Gleichung III $2m$ statt m schreiben, da die Zahl der dreiwertigen Dinge gerade sein muß; dann erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{2m, 0, 0} &= \binom{2m-1}{3} a_{2m-4, 3, 0} + \binom{2m-1}{2} (2m-3) \sum \frac{(2m-4)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 2, 0} a_{2m_2, 1, 0} + \\ &+ (2m-1)(2m-2)(2m-3) \sum \frac{(2m-4)!}{(2m_1)!(2m_2)!(2m_3)!} a_{2m_1, 1, 0} a_{2m_2, 1, 0} a_{2m_3, 1, 0}. \end{aligned}$$

Zwischen dieser Gleichung und der vorhergehenden, wenn in jener $2m-2$ statt $2m$ gesetzt wird, kann nun die Doppelsumme eliminiert werden. Das Ergebnis wird

$$\begin{aligned} a_{2m, 0, 0} &= \binom{2m-1}{3} a_{2m-4, 3, 0} - \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{2} \sum \frac{(2m-4)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 2, 0} a_{2m_2, 1, 0} + \\ &+ 2(2m-1) \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 1, 0} a_{2m_2, 1, 0}. \end{aligned}$$

Werden in den Paarsystemen, die aus $2m$ dreiwertigen und 2 zweiwertigen Dingen aufgebaut werden können, die Paare, welche ein gewisses zweiwertiges Ding enthalten, entfernt, so findet man folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \text{IV. } a_{2m, 2, 0} &= \binom{2m}{2} a_{2m-2, 3, 0} + 2m a_{2m-1, 1, 1} + 2m(2m-1) \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 2, 0} a_{2m_2, 1, 0} + \\ &+ 2m(2m-1) \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 1, 0} a_{2m_2, 1, 0}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 2, 0} a_{2m_2, 1, 0} &= \frac{1}{2m(2m-1)} a_{2m, 2, 0} - \frac{1}{2} a_{2m-2, 3, 0} - \\ &- \frac{1}{2m-1} a_{2m-1, 1, 1} - \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 1, 0} a_{2m_2, 1, 0}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieses Ausdrucks in dem eben gefundenen Ausdruck für $a_{2m, 0, 0}$ findet man

$$\begin{aligned} a_{2m, 0, 0} &= \frac{5}{2} \binom{2m-1}{3} a_{2m-4, 3, 0} + \frac{(2m-1)(2m-2)}{2} a_{2m-3, 1, 1} - \frac{2m-1}{2} a_{2m-2, 2, 0} + \\ &+ \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{2} \sum \frac{(2m-4)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 1, 0} a_{2m_2, 1, 0} + \\ &+ (4m-2) \sum \frac{(2m-2)!}{(2m_1)!(2m_2)!} a_{2m_1, 1, 0} a_{2m_2, 1, 0}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichung IV_a können hier beide Summen eliminiert werden. Nach einiger Rechnung erhält man dann

$$\begin{aligned} a_{2m,0,0} - \frac{2m-1}{2} a_{2m-2,2,0} + \frac{4}{5} (2m-1) a_{2m-2,1,0} + \frac{(2m-1)(2m-2)}{10} a_{2m-3,1,1} + \\ + \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{12} a_{2m-4,3,0} + \frac{3}{10} (2m-1)(2m-2) a_{2m-2,0,0} - \\ - \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{10} a_{2m-4,3,0} + \frac{3}{5} (2m-1)(2m-2)(2m-3) a_{2m-4,1,0} + \\ + \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)}{10} a_{2m-6,1,0} = 0. \end{aligned}$$

Hier können wir (siehe Gl. I')

$$a_{2m-3,1,1} = (2m-3)(a_{2m-4,1,0} + a_{2m-4,2,0})$$

setzen und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} a_{2m,0,0} - \frac{2m-1}{2} a_{2m-2,2,0} + \frac{4}{5} (2m-1) a_{2m-2,1,0} + \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{12} a_{2m-4,3,0} + \\ + \frac{3}{10} (2m-1)(2m-2) a_{2m-2,0,0} + \frac{7}{10} (2m-1)(2m-2)(2m-3) a_{2m-4,1,0} + \\ + \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)}{10} a_{2m-6,1,0} = 0. \end{aligned}$$

Wird hier statt $a_{2m-2,2,0}$ der Ausdruck, den man mit Hilfe von II finden kann, eingesetzt und in der dadurch erhaltenen Gleichung ein Glied $\frac{3}{10} (2m-1) a_{2m-2,1,0}$ mit dem Ausdruck, den man durch II dafür erhalten kann, ersetzt, so wird man nach einiger Rechnung die Gleichung

$$\begin{aligned} \text{V.} \quad a_{2m,0,0} = \frac{3}{4} (2m-1)(2m-2)(a_{2m-2,1,0} - a_{2m-2,0,0}) - \\ - \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{2} \left(\frac{1}{6} a_{2m-4,3,0} - a_{2m-4,2,0} + a_{2m-4,1,0} \right) + \\ + \frac{1}{4} (2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5) a_{2m-6,2,0} \end{aligned}$$

erhalten.

Dies ist eine lineare Rekursionsformel, die III ersetzen kann. Indessen will ich nicht behaupten, daß es zur wirklichen Ausrechnung der Zahlen a leichter ist V als III zu benutzen; es wäre wohl aber möglich, daß V von Vorteil werden könnte, wenn man versuchen wollte, independente Ausdrücke der Zahlen a zu finden.

Die Beweise der rekurrenten Gleichungen I, II und III geben an, auf welche Arten die unzerlegbaren Systeme, die aus einer gewissen Anzahl

Dinge gebildet sind, von den unzerlegbaren Systemen mit einer um eine Eins kleineren Elementenzahl abgeleitet werden können. Man kann dies zur systematischen Auffindung der unzerlegbaren Systeme benutzen. Ich habe eine solche Bestimmung für 1, 2 bis 8 gegebene Dinge ausgeführt. Die Ergebnisse habe ich in einer Tabelle am Schluß dieses Paragraphen zusammengestellt.

Im folgenden will ich einige derselben Probleme wie in § 4 behandeln, nur mit dem Unterschied, daß die Paarsysteme jetzt unzerlegbar sein sollen.

Es sei $b_{m,n,p}$ die Anzahl der Arten, wie m drei-, n zwei- und p einwertige Dinge so unzerlegbar zusammengeknüpft werden können, daß niemals zwei zweiwertige miteinander verbunden werden. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$b_{m,n,p} = mb_{m-1,n+1,p-1} + 2mn b_{m-1,n,p-1} + mn(n-1)b_{m-1,n-1,p} + nb_{m,n-1,p}.$$

$$b_{m,n,p} = \left(\frac{3}{2}m - n + \frac{p}{2} + 1\right)b_{m,n-1,p} + m(m-1)(b_{m-2,n,p} + 2(n-1)b_{m-2,n-1,p} + \\ + (n-1)(n-2)b_{m-2,n-2,p}) + \frac{m(m-1)(m-2)}{2}(b_{m-3,n+1,p+1} + \\ + 2(n-1)b_{m-3,n-2,p+1} + (n-1)(n-2)b_{m-3,n-3,p+1}).$$

$$b_{2m,0,0} = \frac{3}{4}(2m-1)(2m-2)(b_{2m-2,1,0} - b_{2m-2,0,0}) - \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{12}b_{2m-4,3,0} + \\ + \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)}{2}b_{2m-6,1,0} + \\ + \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)(2m-6)(2m-7)}{2}b_{2m-8,1,0}.$$

Die erste dieser Gleichungen wird durch Wegnahme des Paares, in dem ein gewisses einwertiges Ding vorkommt, bewiesen; die zweite Gleichung findet man durch Wegnahme der zwei Paare, in denen ein gewisses zweiwertiges Ding vorkommt, und durch darauffolgende Hinzufügung des Paares, das aus den zwei anderen in jenen Paaren vorkommenden Dingen gebildet wird; die dritte Gleichung erhält man aus V, wenn man in dieser statt der Zahlen a die Zahlen b einführt, was mit Hilfe folgender Relationen geschehen kann:

$$a_{2m,0,0} = b_{2m,0,0}, \quad a_{2m,1,0} = b_{2m,1,0}, \quad a_{2m,2,0} = b_{2m,2,0} + 2b_{2m,1,0} + 2mb_{2m-1,0,1}, \\ a_{2m,3,0} = b_{2m,3,0} + 6b_{2m,2,0} + 6b_{2m,1,0} + 6mb_{2m-1,1,1} + 6mb_{2m-1,0,1},$$

deren Richtigkeit leicht festzustellen ist.

Durch den Dualismus kann man natürlich mit Hilfe der Zahlen b die Anzahl der aus m Tripeln, n Paaren und p »Einsen« bestehenden unzerlegbaren Systeme, die von $\frac{3}{2}m + n + \frac{p}{2}$ Dingen gebildet werden können,

finden, wenn zwei beliebige der Tripel, Paare, Einsen höchstens ein Ding gemein haben sollen, zwei beliebige Paare sogar kein Ding gemein haben sollen, und jedes Ding in zwei der Tripel, Paare, Einsen vorkommen soll. (Vergl. S. 40).

In ähnlicher Weise, wie wir in § 4 die Zahlen $B_{2m,n,0}$ durch die Zahlen $A_{m,n,p}$ ausgedrückt fanden, können wir die Zahl $b_{2m,n,0}$ durch die Zahlen $a_{m,n,p}$ ausdrücken. Man erhält dann (Vergl. S. 44)

$$b_{2m,n,0} = n! \sum_{\mu} \left(\sum_{\gamma}^{\mu} \binom{\mu}{\gamma} \binom{3m-2\mu}{n-\mu-\gamma} \frac{1}{2^{\gamma}} \right) \sum_{\mu_1}^{\mu} \frac{1}{2^{\mu_1}} \frac{(2m)! a_{2m-2\mu-\mu_1, \mu-\mu_1, \mu_1}}{(2m-2\mu-\mu_1)! \mu_1! (\mu-\mu_1)!}.$$

Wenn $n > 3m$, ist $b_{2m,n,0} = 0$. Für $n = 3m$ wird

$$b_{2m,3m,0} = (3m)! \sum_{\mu} \frac{1}{2^{\mu}} \sum_{\mu_1}^{\mu} \frac{1}{2^{\mu_1}} \frac{(2m)! a_{2m-2\mu-\mu_1, \mu-\mu_1, \mu_1}}{(2m-2\mu-\mu_1)! \mu_1! (\mu-\mu_1)!}.$$

In diesem letzteren Falle können auch niemals zwei dreiwertige Dinge verknüpft sein; denn die dreiwertigen Dinge müssen mit den zweiwertigen durch $2 \cdot 3m = 6m$ Bindungen verknüpft sein, und von den $2m$ dreiwertigen Dingen gehen überhaupt nur $6m$ Bindungen aus.

Die Zahlen $b_{2m,3m,0}$ wachsen sehr schnell, wenn m wächst. So ist z. B.

$$b_{2,3,0} = 1. \quad b_{4,6,0} = 1800. \quad b_{6,9,0} = 87998400.$$

Kraft des Dualismus erhält man, daß

$$\frac{(6m)!}{(3m)!(2m)!} b_{2m,3m,0}$$

die Anzahl der Arten ist, $6m$ Dinge gleichzeitig in $2m$ (disjunkte) Tripel und $3m$ (disjunkte) Paare so zu verteilen, daß kein Paar in einem Tripel enthalten ist, wenn die Verteilungen unzerlegbar sein sollen, d. h. keine dieser Verteilungen der $6m$ Dinge soll aus einer Verteilung derselben Beschreibung aus $6m_1$ Dingen für sich und einer anderen Verteilung der $6m - 6m_1$ anderen Dinge für sich zusammengesetzt sein. So ist z. B. die Anzahl der möglichen unzerlegbaren gleichzeitigen Verteilungen von 18 Dingen in 6 Tripel und 9 Paare, so daß kein Paar in einem Tripel enthalten ist, gleich

$$\frac{18!}{9!6!} 87998400 = 24504480 \cdot 87998400 = 2156355032832000.$$

Statt zu verlangen, daß niemals zwei zweiwertige Dinge verknüpft sein sollen, kann man allgemeiner die Paarsysteme studieren, in denen

eine gegebene Zahl von Paaren aus zwei zweiwertigen Dingen bestehen, und man kann auch eine bestimmte Zahl von Paaren, von einem ein- und einem zweiwertigen Dinge gebildet, verlangen. Es sei dann $\mu_{3,3}$ die Zahl der Bindungen zwischen dreiwertigen Dingen, $\mu_{2,3}$ die Zahl der Bindungen zwischen zwei- und dreiwertigen u. s. w. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\mu_{3,3} + \mu_{2,3} + \mu_{1,3} &= 3m, \\ \mu_{2,3} + 2\mu_{2,2} + \mu_{1,2} &= 2n, \\ \mu_{1,3} + \mu_{1,2} &= p^1. \end{aligned}$$

Die zweiwertigen Dinge treten immer in gewissen Ketten auf. Es sei z deren Anzahl, und es seien n_1, n_2, \dots, n_z die Zahl der zweiwertigen Dinge, die in diesen Ketten beziehungsweise enthalten sind. Dann ist also

$$n_1 + n_2 + \dots + n_z = n$$

und, wie man leicht sieht,

$$\mu_{2,2} = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_z - 1 = n - z$$

oder

$$z = n - \mu_{2,2}.$$

Für die Zahl $a_{m,n,p,z}$ der unzerlegbaren Paarsysteme, in welchen die zweiwertigen Dinge in z Ketten auftreten, habe ich den folgenden Ausdruck gefunden:

$$a_{m,n,p,z} = \sum_{\kappa_1}^z A_{m,n,p}^{\kappa, \kappa_1} \sum_{\mu} B_{m,p,\mu}^{\kappa, \kappa_1} \sum_{\mu_1}^{\mu} C_{m,\kappa_1}^{\mu, \mu_1} a_{m', \mu - \mu_1, p'},$$

wo der Kürze halber

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} J_{\kappa, \lambda}^n \frac{(z-\lambda)! (z-\kappa_1)!}{(z-\kappa_1-\lambda)!} \frac{1}{2^{\kappa_1}} \binom{m}{\kappa_1} \binom{p+\kappa_1}{\kappa_1} &= A_{m,n,p}^{\kappa, \kappa_1}, \\ \sum_{\gamma}^{\mu} \binom{\mu}{\gamma} \binom{\frac{3m+p}{2} - \kappa_1 - 2\mu}{z - \kappa_1 - \mu - \gamma} \frac{1}{2^{\gamma}} &= B_{m,p,\mu}^{\kappa, \kappa_1}, \end{aligned}$$

$\frac{1}{2^{\mu_1}} \frac{(m-\kappa_1)!}{(m-\kappa_1-2\mu-\mu_1)! (u-\mu_1)! \mu_1!} = C_{m,\kappa_1}^{\mu, \mu_1}$, $m-\kappa_1-2\mu-\mu_1=m'$ und endlich $p+\kappa_1+\mu_1=p'$ gesetzt ist.

Hier bedeutet $J_{\kappa, \lambda}^n$ die Anzahl der Arten, auf die n Dinge so in z Reihen gestellt werden können, daß jede Reihe mindestens ein Ding und

¹ Es ist immer $\mu_{1,1}=0$, wenn der Fall $m=n=0$, $p=2$ ausgenommen wird; denn wir betrachten hier unzerlegbare Systeme.

jede von λ unter ihnen eben 1 Ding enthält, und weiter die Dinge innerhalb jeder Reihe geordnet gedacht werden.

Da der Beweis ein wenig weitläufig ist, will ich hier nicht darauf eingehen; der Wert dieses Ergebnisses wird ja übrigens auch durch den Umstand etwas verringert, daß die Zahlen $J_{\lambda, \lambda}^n$, deren Definition nicht ganz einfach ist, auftreten.

Übrigens kann die Zahl $a_{m, n, p, q}$, wie allgemeiner die Zahl $a_{m, n, p, \mu_{2, 2}, \mu_{1, 2}}$, die die Zahl der Paarsysteme, welche $\mu_{2, 2}$ Paare von zweiwertigen Dingen und $\mu_{1, 2}$ Paare aus einem ein- und einem zweiwertigen bestehend enthalten, bedeuten soll, durch ein ähnliches Verfahren wie das in § 4 für die Zahlen $C_{2m, n, \mu_{2, 2}}$ angewandte gefunden werden. Man muß dann unzerlegbare Paarsysteme betrachten, die in der Weise aus zwei Reihen von Dingen gebildet sind, daß jedes Paar ein Ding jeder Reihe enthält. Bezeichnet man mit $a_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ die Anzahl dieser Paarsysteme, die aus zwei Reihen, die beziehungsweise m_1 drei-, n_1 zwei-, p_1 einwertige und m_2 drei-, n_2 zwei-, p_2 einwertige Dinge enthalten, gebildet werden können, so kann man auch diese Zahl mit Hilfe dreier rekurrenten Formeln ausrechnen. Durch die Zahlen $a_{m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2}$ kann dann die Zahl $a_{m, n, p, \mu_{2, 2}, \mu_{1, 2}}$ ausgedrückt werden. Ich will hier nicht näher darauf eingehen und verzichte auch darauf, ein anderes Verfahren zur Berechnung der Zahl $a_{m, n, p, \mu_{2, 2}, \mu_{1, 2}}$, die ich gefunden habe, zu besprechen, da dieses ebenfalls ziemlich verwickelt ist.

Dagegen will ich zeigen, wie die Anzahl der unzerlegbaren Systeme, in denen q Mal der Fall eintritt, daß 2 einwertige Dinge mit demselben dreiwertigen Dinge verbunden sind, gefunden werden kann.

Diese Zahl möge $a'_{m, n, p, q}$ heißen, wenn es nicht gegeben ist, *welche* $2q$ der einwertigen Dinge in dieser Weise mit q dreiwertigen verbunden sind, und auch nicht *welche* von den dreiwertigen Dingen diese q Dinge sind. Soll aber gegeben sein, welche $2q$ einwertige und welche q dreiwertige Dinge in dieser Weise in Betracht kommen, und auch für jedes dieser q dreiwertigen Dinge gegeben, mit welchen einwertigen Dingen es verknüpft sein soll, so mag die Anzahl $a'_{m, n, p, q}$ heißen. Dann ist

$$a_{m, n, p, q} = \binom{m}{q} \binom{p}{2q} \frac{(2q)!}{2^q} a'_{m, n, p, q} = \frac{m! p!}{q! (m-q)! (p-2q)! 2^q} a'_{m, n, p, q}.$$

Für die Zahlen $a'_{m, n, p, q}$ gilt aber folgende Rekursionsformel:

$$a'_{m, n, p, q} = a'_{m-1, n, p-1, q-1} + (m-q)(p-2q) a'_{m-1, n, p-1, q},$$

die man leicht dadurch beweist, daß man sich aus den Paarsystemen die zwei Paare, welche zwei mit demselben dreiwertigen Dinge verknüpften einwertige Dinge enthalten, entfernt denkt. Die Rekursionsformel ist deshalb

immer gültig, wenn $q > 0$ ist. Weiter ist natürlich $a'_{m,n,p,q} = 0$, wenn $p < 2q$. Durch diese Rekursionsformel können dann alle Zahlen $a'_{m,n,p,q}$ durch die Zahlen der Form $a'_{m,n,p,0}$ ausgedrückt werden. Die letzten Zahlen können aber sehr leicht durch die Zahlen $a_{m,n,p}$ ausgedrückt werden, indem

$$a'_{m,n,p,0} = a_{m,n,p,0} = \sum_{\pi} \binom{m}{\pi} \binom{n}{p-\pi} p! a_{m-\pi, n-p+2\pi, p-\pi}$$

ist. Diese Gleichung wird dadurch gefunden, daß man sich aus den Paarsystemen alle Paare, in denen die einwertigen Dinge sich befinden, entfernt denkt, wenn man weiter bemerkt, daß, wenn niemals zwei einwertige Dinge mit demselben Dinge verknüpft sind, im allgemeinen Falle π der einwertigen Dinge mit je einem dreiwertigen und die $p-\pi$ übrigen mit je einem zweiwertigen Dinge verknüpft sind werden.

Ich will indessen auch zeigen, wie man mit Hilfe der erwähnten rekurrenten Formel für $a'_{m,n,p,q}$ diese Zahl independent durch die Zahlen $a'_{m,n,p,0}$ ausdrücken kann. Setzt man

$$a'_{m,n,p,q} = b_{m-p,n,p,q},$$

so erhält man

$$b_{m-p,n,p,q} = b_{m-p,n,p-1,q-1} + (m-q)(p-2q)b_{m-p,n,p-1,q}.$$

Der Kürze halber lasse ich die zwei ersten Indizes, die überall dieselben sind, weg. Dadurch erhält man, wenn man $b_{p,q} = c_{p-q,q}$ setzt,

$$c_{p-q,q} = c_{p-q,q-1} + (m-q)(p-2q)c_{p-q-1,q}$$

oder

$$c_{p,q} = c_{p,q-1} + (m-q)(p-q)c_{p-1,q}.$$

Da $a'_{m,n,p,q} = 0$, wenn $p < 2q$, ist $c_{p,q} = 0$, wenn $p < q$. Durch wiederholte Anwendung der letzten Gleichung kann deshalb $c_{p,q}$ durch Zahlen der Form $c_{p,0}$ ausgedrückt werden. Der Koeffizient der Zahl $c_{r,0}$ wird dann die Summe über $s_1, s_2 \dots$ von

$$(p-q+s_1)(p-q-1+s_1+s_2) \cdots (1+r-q+s_1+s_2+\cdots+s_{p-r})$$

multipliziert mit

$$(m-q+s_1)(m-q+s_1+s_2) \cdots (m-q+s_1+s_2+\cdots+s_{p-r}),$$

indem die Summation über alle Werte von s_1, s_2, \dots, s_{p-r} , für die

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{p-r} = q$$

ist, ausgedehnt werden soll.

Folglich ist $c_{p,q}$ gleich der Summe über r von 1 bis p und über s_1, s_2, \dots von dem Produkte von

$$\prod_{\varrho=1}^{p-r} (p - q - \varrho + 1 + s_1 + s_2 + \dots + s_{\varrho})$$

und

$$\prod_{\varrho=1}^{p-r} (m - q + s_1 + s_2 + \dots + s_{\varrho}) c_{r,0},$$

und da $b_{p,q} = c_{p-q,q}$, wird

$$b_{p,q} = \sum_r^{p-q} \sum_{(s)}^{p-q-r} \prod_{\varrho=1}^{p-q-r} \left(p - 2q - \varrho + 1 + \sum_{\sigma=1}^{\varrho} s_{\sigma} \right) \prod_{\varrho=1}^{p-q-r} \left(m - q + \sum_{\sigma=1}^{\varrho} s_{\sigma} \right) b_{r,0},$$

und da $a'_{m,n,p,q} = b_{m-p,n,p,q}$, erhält man $a'_{m,n,p,q}$ gleich

$$\sum_r^{p-q} \sum_{(s)}^{p-q-r} \prod_{\varrho=1}^{p-q-r} \left(p - 2q - \varrho + 1 + \sum_{\sigma=1}^{\varrho} s_{\sigma} \right) \prod_{\varrho=1}^{p-q-r} \left(m - q + \sum_{\sigma=1}^{\varrho} s_{\sigma} \right) a'_{m-p+r,n,r,0}$$

und folglich $a_{m,n,p}$ gleich dem Produkte von

$$\frac{m! p!}{q! (m-q)! (p-2q)! 2^q}$$

und

$$\sum_r^{p-q} \sum_{(s)}^{p-q-r} \prod_{\varrho=1}^{p-q-r} \left(p - 2q - \varrho + 1 + \sum_{\sigma=1}^{\varrho} s_{\sigma} \right) \prod_{\varrho=1}^{p-q-r} \left(m - q + \sum_{\sigma=1}^{\varrho} s_{\sigma} \right) a_{m-p+r,n,r,0},$$

wenn die Summation mit Rücksicht auf $s_1, s_2, \dots, s_{p-q-r}$ über alle Werte dieser Zahlen, für die

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{p-q-r} = q$$

ist, ausgedehnt wird.

Oben haben wir aber $a_{m,n,p,0}$ durch die Zahlen $a_{m,n,p}$ ausgedrückt gefunden. Wird nun in der letzten Gleichung statt $a_{m-p+r,n,r,0}$ die Zahlen $a_{m,n,p}$ eingeführt, so wird also $a_{m,n,p,q}$ in independenter Weise durch diese ausgedrückt.

Zuletzt will ich ein interessantes Theorem die Zykel der unzerlegbaren Systeme betreffend beweisen.

Hat man zwei Zykel, die zwei oder mehr Dinge gemein haben (diese bilden dann natürlich eine Kette), so kann man von diesen einen dritten

Zyklus durch Wegnahme der gemeinsamen Paare bilden. Ich sage dann, daß der dritte Zyklus aus den zwei ersten *abgeleitet* ist, und bezeichne mit (ab) den von zwei Zykeln a und b abgeleiteten Zyklus.

Dann gelten folgende Sätze:

Satz 1. Es ist immer

$$(ab) = (ba).$$

Dies ist unmittelbar einleuchtend.

Satz 2. Es ist

$$((ab)c) = ((ac)b) = ((bc)a).$$

Der Beweis kann am leichtesten durch Logikkalkül geführt werden, der ja hier angewandt werden darf, weil die Zykel Klassen sind. Es ist nämlich in SCHRÖDERScher Bezeichnungsweise

$$(ab) = a\bar{b} + \bar{a}b,$$

und folglich wird

$$(ab)c = (a\bar{b} + \bar{a}b)\bar{c} + (ab + \bar{a}\bar{b})c = abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c.$$

Da der erhaltene Ausdruck vollständig symmetrisch mit Rücksicht auf die drei Klassen a, b, c ist, so ist also

$$(ab)c = (ac)b = (bc)a$$

w. z. b. w.

Infolge dieser Sätze kann jede Komposition von gewissen Zykeln a_1, a_2, \dots, a_n als ein symbolisches Produkt so geschrieben werden:

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}.$$

Nun verschwindet aber die Komposition (aa) eines Zyklus mit sich selbst vollständig, und deshalb kann jede symbolische Potenz mit geradem Exponenten fortgelassen werden. Folglich kann jede Komposition gewisser Zykeln immer als ein symbolisches Produkt der Form

$$a_1 a_2 \dots a_\gamma,$$

geschrieben werden, wo $a_1, a_2, \dots, a_\gamma$ verschiedene Zykel bezeichnen.

Hieraus erhält man leicht die beiden folgenden spezielleren Sätze:

Satz 3. Ist ein Zyklus Z , der ein gewisses Ding d nicht enthält, aus einem Zyklus Z_1 , welcher d enthält, und gewissen anderen Zykeln Z_2, Z_3, \dots, Z_n , die d nicht enthalten, abgeleitet, so kann er von den Zykeln Z_2, \dots, Z_n allein abgeleitet werden.

Z muß ja als ein symbolisches Produkt von nur symbolischen ersten Potenzen darstellbar sein, so daß entweder

$$Z = Z_1 Z_{r_1} Z_{r_2} \cdots Z_{r_\mu}$$

oder

$$Z = Z_{r_1} Z_{r_2} \cdots Z_{r_\mu}$$

ist, wenn r_1, r_2, \dots, r_μ einige (oder alle) der Zahlen $2, 3, \dots, n$ sind. Im ersteren Falle müßte aber Z augenscheinlich das Ding d enthalten. Also muß der letztere Fall eintreten.

Satz 4. Ist ein Zyklus Z , der ein Ding d nicht enthält, aus zwei Zykeln Z_1 und Z_2 , welche d enthalten und außerdem so beschaffen sind, daß auch $Z_1 Z_2$ das Ding d enthalten, und gewissen anderen Zykeln Z_3, Z_4, \dots, Z_n abgeleitet, so kann Z aus den Zykeln Z_3, \dots, Z_n allein abgeleitet werden.

Denn Z muß von einer der vier folgenden Formen sein:

$$Z_1 Z_2 Z_{r_1} Z_{r_2} \cdots Z_{r_\mu}, \quad Z_1 Z_{r_1} \cdots Z_{r_\mu}, \quad Z_2 Z_{r_1} \cdots Z_{r_\mu}, \quad Z_{r_1} Z_{r_2} \cdots Z_{r_\mu},$$

wobei r_1, r_2, \dots, r_μ einige (oder alle) der Zahlen $3, 4, \dots, n$ sind. In allen drei ersteren Fällen aber müßte Z das Ding d enthalten. Also muß der letztere Fall eintreten.

Man kann — und gewöhnlich auf mehrere Weisen — in jedem Paarsystem gewisse Zykel Z_1, Z_2, \dots, Z_n so wählen, daß alle anderen Zykel aus diesen abgeleitet werden können. Ist es außerdem nicht möglich, einen der Zykel aus den übrigen abzuleiten, so können wir sagen, daß sie zusammen ein *Fundamentalsystem* oder ein *System von Fundamentalzykeln* ausmachen. Ich will nun folgendes Theorem beweisen:

Theorem I. *Jedes System von Fundamentalzykeln innerhalb eines unzerlegbaren Paarsystems, das von m drei-, n zwei- und p einwertigen Dingen gebildet ist, enthält $\frac{m-p+2}{2}$ Zykeln.*

Der Beweis läßt sich durch vollständige Induktion führen. Ich nehme an, daß der Satz gültig ist, wenn $m+n+p < N$ ist, und zeige unter dieser Voraussetzung, daß er auch, wenn $m+n+p = N$ ist, seine Gültigkeit behält.

Es sei also ein Paarsystem S , aus m drei-, n zwei- und p einwertigen Dingen gebildet, gegeben, wobei $m+n+p = N$ ist. Ich unterscheide dann drei Fälle.

1. Es ist $p > 0$.

Dann können wir von unserem Paarsystem S das Paar, das ein gewisses einwertiges Ding d enthält, weglassen, wodurch ein neues Paarsystem S' entsteht, ohne daß dies auf die vorkommenden Zykeln Einfluß ausübt. Folglich ist dann jedes System von Fundamentalzykeln für S'

auch ein solches System für S und umgekehrt. Das Ding d muß in S entweder mit einem drei- oder einem zweiwertigen Dinge verknüpft sein. Im ersteren Falle wird S' $m-1$ drei-, $n+1$ zwei- und $p-1$ einwertige Dinge und im zweiten Falle m drei-, $n-1$ zwei- und p einwertige Dinge enthalten. Der Voraussetzung zufolge wird dann innerhalb S' jedes System von Fundamentalzykeln im ersten Falle aus $\frac{(m-1)-(p-1)+2}{2} = \frac{m-p+2}{2}$ Zykeln und im zweiten Falle auch aus $\frac{m-p+2}{2}$ Zykeln bestehen. Folglich besteht auch jedes Fundamentalsystem in S aus $\frac{m-p+2}{2}$ Zykeln.

2. Es ist $p=0$, aber $n > 0$.

In diesem Falle können wir von unserem Paarsystem S die Paare, in denen ein gewisses zweiwertiges Ding d vorkommt, entfernen, wodurch ein Paarsystem S' zurückbleibt. Dieses System braucht aber nicht unzerlegbar zu sein. Es können in der Tat zwei Fälle vorkommen:

I. S' ist unzerlegbar.

II. S' besteht aus zwei getrennten Teilsystemen S'_1 und S'_2 , die beide unzerlegbar sind. Die Anzahl der in S'_1 und S'_2 vorkommenden drei-, zwei- und einwertigen Dinge kann dann beziehungsweise m_1, n_1, p_1 und m_2, n_2, p_2 heißen.

Weiter haben wir sowohl im Falle I wie im Falle II drei Unterfälle, nämlich:

- a) Das Ding d ist in S mit zwei dreiwertigen Dingen verknüpft.
- b) d ist in S mit einem drei- und einem zweiwertigen Dinge verknüpft.
- c) d ist in S mit zwei zweiwertigen Dingen verknüpft.

Im Falle a) wird S' $m-2$ drei- und $n+1$ zweiwertige Dinge enthalten. Im Falle b) wird S' von $m-1$ drei-, $n-1$ zwei- und 1 einwertigen Dinge gebildet sein. Im Falle c) wird S' m drei-, $n-3$ zwei- und 2 einwertige Dinge enthalten.

Nach der Voraussetzung besteht im Falle I jedes Fundamentalsystem für S' aus $\frac{m-2+2}{2} = \frac{m}{2}$ Zykeln. Im Falle II wird jedes System von Fundamentalzykeln für das System S'_1 aus $\frac{m_1-p_1+2}{2}$ und für das System S'_2 aus $\frac{m_2-p_2+2}{2}$ Zykeln bestehen; folglich besteht jedes Fundamentalsystem für S' aus $\frac{m_1+m_2-(p_1+p_2)+4}{2}$ Zykeln. Da im Unterfalle a) $m_1+m_2=m-2$, $p_1+p_2=0$, im Unterfalle b) $m_1+m_2=m-1$, $p_1+p_2=1$ und im Unterfalle c) $m_1+m_2=m$, $p_1+p_2=2$ ist, so

besteht also im Falle II jedes Fundamentalsystem für S' immer aus $\frac{m+2}{2}$ Zykeln.

Im Falle I muß jedes Fundamentalsystem F für S teils aus Zykeln, die auch zu S' gehören, und teils aus Zykeln, die nicht in S' vorkommen, bestehen. Die letzteren enthalten das Ding d ; sie können $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\gamma'}$ heißen; während die in S' enthaltenen Fundamentalzykeln $Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{\gamma'}$ ein System F_1 ausmachen. Nun sind aber die Zykeln $(Z_r Z_s)$ alle in S' enthalten, und es ist weiter

$$Z_2 = Z_1(Z_1 Z_2), \quad Z_3 = Z_1(Z_1 Z_3), \quad \dots, \quad Z_{\gamma'} = Z_1(Z_1 Z_{\gamma'}),$$

d. h. alle Zykel $Z_2 \dots Z_{\gamma'}$ können von Z_1 und den Zykeln $(Z_1 Z_r)$, die sämtlich in S' enthalten sind, abgeleitet werden. Weiter kann keiner der Zykeln $(Z_1 Z_2), (Z_1 Z_3), \dots, (Z_1 Z_{\gamma'}), Z_1, Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{\gamma'}$ von den übrigen abgeleitet werden. Ließe sich z. B. $(Z_1 Z_2)$ von den übrigen dieser Zykel ableiten, dann würde auch $Z_2 = Z_1(Z_1 Z_2)$ von diesen Zykeln ableitbar sein, und da diese letzteren wieder von $Z_1, Z_3, \dots, Z_{\gamma'}, Z'_1, Z'_2 \dots Z'_{\gamma'}$ ableitbar sind, müßte also Z_2 von diesen ableitbar sein, was der Voraussetzung, daß die Zykel $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\gamma'}, Z'_1, Z'_2 \dots Z'_{\gamma'}$ ein Fundamentalsystem bilden sollen, widerspricht. Es machen daher $Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{\gamma'}$ in Verbindung mit den Zykeln $(Z_1 Z_2) \dots (Z_1 Z_{\gamma'})$ und Z_1 auch ein Fundamentalsystem für S aus. Weiter läßt sich aber auch zeigen, daß F' , wenn das der Inbegriff der Zykel $Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{\gamma'}, (Z_1 Z_2), (Z_1 Z_3), \dots, (Z_1 Z_{\gamma'})$ bedeutet, ein Fundamentalsystem für S' sein muß. Denn jeder Zyklus in S' muß von Z_1 und den Zykeln des Systems F' ableitbar sein, und da er d nicht enthält, muß er nach dem Satze 3 von den Zykeln in F' abgeleitet werden können. Der Voraussetzung gemäß muß also F' aus $\frac{m}{2}$ Zykeln bestehen (Siehe oben).

Das Zyklen-system, das aus F' und Z_1 besteht, enthält also $\frac{m}{2} + 1$ Zykel, und folglich besteht auch das willkürlich gegebene Fundamentalsystem F aus $\frac{m+2}{2}$ Zykeln.

Im Falle II sind die Zykel des Systems S' dieselben, wie die Zykel des Systems S . Wir haben oben gefunden, daß jedes Fundamentalsystem für S' aus $\frac{m+2}{2}$ Zykeln besteht, und folglich besteht auch in diesem Falle jedes Fundamentalsystem für S aus $\frac{m+2}{2}$ Zykeln.

3. Es ist $n = p = 0$.

In diesem Falle können wir von unserem Paarsystem S die Paare, in denen ein gewisses dreiwertiges Ding d vorkommt, entfernen, wodurch ein Paarsystem S' entsteht. Es können hier drei Fälle vorkommen:

- I. S' ist unzerlegbar.
 II. S' zerfällt in zwei Teilsysteme S'_1 und S'_2 , die unzerlegbar sind.
 III. S' zerfällt in drei Teilsysteme S'_1 , S'_2 und S'_3 , die unzerlegbar sind.

Da das Ding d innerhalb S mit drei dreiwertigen Dingen verbunden ist, so wird S' in jedem Falle $m-4$ drei- und 3 zweiwertige Dinge enthalten. Im Falle II können m_1, n_1 und m_2, n_2 beziehungsweise die Zahlen der drei- und zweiwertigen Dinge in S'_1 und S'_2 sein. Im Falle III können m_1, n_1, m_2, n_2 und m_3, n_3 diese Zahlen für die Systeme S'_1, S'_2 und S'_3 sein.

Der Voraussetzung gemäß besteht im Falle I jedes Fundamentalsystem für S' aus $\frac{m-4+2}{2} = \frac{m-2}{2}$ Zykeln. Im Falle II besteht jedes Fundamentalsystem für S' aus $\frac{(m_1+m_2)+4}{2} = \frac{m-4+4}{2} = \frac{m}{2}$ Zykeln. Im Falle III muß jedes Fundamentalsystem für S' aus $\frac{m_1+m_2+m_3+6}{2} = \frac{m+2}{2}$ Zykeln bestehen.

Im Falle I werden die Zykeln eines Fundamentalsystems F für S teils in S' enthalten sein — sie machen ein System F_1 aus — und teils das Ding d enthalten. Sind d_1, d_2, d_3 die drei mit d (innerhalb S) verknüpften Dinge, so werden die Zykeln, die d enthalten, teils auch d_1 und d_2 , teils d_1 und d_3 und teils d_2 und d_3 enthalten. Es seien $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\gamma_1}$ die Zykeln in F , die d, d_1 und d_2 enthalten, $Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{\gamma_2}$ die Zykeln, die d, d_1 und d_3 enthalten, und $Z''_1, Z''_2, \dots, Z''_{\gamma_3}$ die Zykeln in F , die d, d_2 und d_3 enthalten. Dann haben wir erstens

$$Z''_1 = (Z_1 Z'_1) ((Z_1 Z'_1) Z''_1), Z''_2 = (Z_1 Z'_1) ((Z_1 Z'_1) Z''_2), \dots, Z''_{\gamma_3} = (Z_1 Z'_1) ((Z_1 Z'_1) Z''_{\gamma_3}),$$

und die Zykeln $(Z_1 Z'_1) Z''_1, (Z_1 Z'_1) Z''_2, \dots, (Z_1 Z'_1) Z''_{\gamma_3}$ sind alle in S' enthalten. Zweitens ist auch

$$Z_2 = Z_1 (Z_1 Z_2), \quad Z_3 = Z_1 (Z_1 Z_3), \quad \dots, \quad Z_{\gamma_1} = Z_1 (Z_1 Z_{\gamma_1})$$

$$Z'_2 = Z'_1 (Z'_1 Z'_2), \quad Z'_3 = Z'_1 (Z'_1 Z'_3), \quad \dots, \quad Z'_{\gamma_2} = Z'_1 (Z'_1 Z'_{\gamma_2}),$$

und die Zykeln $Z_1 Z_2, Z_1 Z_3, \dots, Z_1 Z_{\gamma_1}, Z'_1 Z'_2, Z'_1 Z'_3, \dots, Z'_1 Z'_{\gamma_2}$ sind auch alle in S' enthalten. Wir können mit F' das System, das aus den Zykeln in F_1 und den Zykeln $Z_1 Z_2, Z_1 Z_3, \dots, Z_1 Z_{\gamma_1}, Z'_1 Z'_2, Z'_1 Z'_3, \dots, Z'_1 Z'_{\gamma_2}$ und $(Z_1 Z'_1) Z''_1, (Z_1 Z'_1) Z''_2, \dots, (Z_1 Z'_1) Z''_{\gamma_3}$ gebildet wird, bezeichnen. Dann machen die Zykeln in F' in Verbindung mit den beiden Zykeln Z_1 und Z'_1 ein Fundamentalsystem für S aus. Weiter läßt sich aber noch zeigen, daß F' ein Fundamentalsystem für S' ist. Das beruht

darauf, daß ein Zyklus, der von Z_1 , Z'_1 und den Zykeln in F' abgeleitet ist und nicht d enthält, nach Satz 4 immer aus den Zykeln in F' abgeleitet werden kann. Nun enthält F' $\frac{m-2}{2}$ Zykel. Folglich besteht das willkürlich gegebene Fundamentalsystem F aus $\frac{m-2}{2} + 2 = \frac{m+2}{2}$ Zykeln.

Im Falle II müssen von den drei mit d verknüpften Dingen d_1, d_2, d_3 die zwei z. B. d_1 und d_2 in einem der Teilsysteme S'_1 und S'_2 , z. B. S'_1 , vorkommen, während das dritte Ding d_3 in S'_2 vorkommt. Die Zykel eines Fundamentalsystems F für S sind dann teils in S' enthalten — sie machen ein System F_1 aus — und teils enthalten sie die Dinge d, d_1, d_2 . Es seien $Z_1, Z_2, \dots, Z_\gamma$ diese letzten Zykel. Dann ist

$$Z_2 = Z_1(Z_1 Z_2), \quad Z_3 = Z_1(Z_1 Z_3), \quad \dots, \quad Z_\gamma = Z_1(Z_1 Z_\gamma),$$

und die Zykel $(Z_1 Z_2) \dots (Z_1 Z_\gamma)$ sind in S' enthalten. Die Zykel in F_1 und die Zykel $Z_1 Z_2, \dots, Z_1 Z_\gamma$ machen ein System F' aus. Die Zykel in F' und Z_1 machen zusammen ein Fundamentalsystem für S aus. Weiter wird F' ein Fundamentalsystem für S' . Nach der Voraussetzung besteht dann F' aus $\frac{m}{2}$ Zykeln. Folglich besteht F aus $\frac{m+2}{2}$ Zykeln.

Im Falle III sind die Zykel innerhalb S' dieselben, wie die Zykel innerhalb S . Da der Voraussetzung gemäß jedes Fundamentalsystem für S' aus $\frac{m+2}{2}$ Zykeln bestehen muß, besteht also auch jedes Fundamentalsystem in S aus $\frac{m+2}{2}$ Zykeln.

Durch diese Betrachtungen ist bewiesen, daß das Theorem für jedes Paarsystem, von N Dingen gebildet, gültig sein muß, wenn es für die Paarsysteme, die von kleineren Anzahlen von Dingen gebildet sind, gültig ist. Es ist nun sehr leicht zu sehen, daß das Theorem für die Paarsysteme, die aus zwei oder drei Dingen gebildet werden können, gültig ist. Es ist demnach allgemeingültig, w. z. b. w.

Auf den früheren Satz, daß $\frac{m-p+2}{2}$ immer eine nicht-negative ganze Zahl sein muß (Seite 71), fällt hierdurch ein neues Licht; denn $\frac{m-p+2}{2}$ ist die Anzahl der Zykel jedes Fundamentalsystems.

Das Theorem kann in folgender Weise verallgemeinert werden:

Theorem II. Jedes System von Fundamentalzykeln innerhalb eines unzerlegbaren Paarsystems, das von m_γ γ -wertigen, $m_{\gamma-1}$ $(\gamma-1)$ -wertigen u. s. w. bis m_1 einwertigen Dingen gebildet ist, besteht aus

$$\sum_1^{\gamma} \frac{q-2}{2} m_q + 1$$

Zykeln.

Dies ist sehr leicht zu beweisen. Man kann nämlich in dem Paarsystem jedes q -wertige Ding, $q > 3$, mit $q-2$ dreiwertigen Dingen, die nacheinander in einer Reihe zusammengeknüpft sind — sie machen ja dann zusammen ein q -wertiges Radikal aus —, ersetzen. Dadurch erhält man ein Paarsystem mit $\sum_3^{\gamma} (q-2)m_q$ dreiwertigen, m_2 zweiwertigen und m_1 einwertigen Dingen, und die Zykeln des letzten Systems entsprechen in leicht ersichtlicher Weise den Zykeln des gegebenen Systems eineindeutig unter Beibehalt der Kompositionsverhältnisse. Nach Theorem I muß aber die Zahl der Zykeln jedes Fundamentalsystems für das letzte Paarsystem gleich

$$\frac{\sum_3^{\gamma} (q-2)m_q - m_1 + 2}{2} = \sum_1^{\gamma} \frac{q-2}{2} m_q + 1$$

sein, wodurch die Richtigkeit des Theorems II also ebenfalls bewiesen ist.

Man könnte natürlich auch versuchen, die Anzahl der in einem unzerlegbaren Paarsysteme überhaupt vorkommenden Zykeln als Funktion der Zahlen m_q zu finden. Dies ist jedoch nicht möglich; denn die Anzahl der Zykeln kann für zwei Paarsysteme verschieden sein, trotzdem die Zahlen m_q für beide dieselben sind. Dagegen kann die Anzahl der Zykelnkomplexe als Funktion der Zahlen m_q ausgedrückt werden, indem ich unter einem »Zykelnkomplex« sowohl jeden Inbegriff mehrerer Zykeln wie jeden einzelnen Zyklus verstehe. Wenn a und b zwei Zykelnkomplexe sind, so kann man von diesen einen dritten Zykelnkomplex c dadurch ableiten, daß man alle gemeinsamen Paare (oder Bindungen) entfernt. Ich schreibe dann wie vorher $c = (ab)$. Es ist nun leicht zu sehen, daß die Zahl der von γ gegebenen Zykeln ableitbaren Zykelnkomplexe gleich

$$2^{\gamma} - 1$$

sein muß, wenn keiner der γ Zykeln von den übrigen abgeleitet werden kann. Denn jeder Zykelnkomplex wird als ein symbolisches Produkt von nur ersten Potenzen von gewissen der gegebenen Zykeln darstellbar sein, und zwei verschiedene solche Produkte können niemals derselbe Zykelnkomplex darstellen. Hätte man nämlich eine Identität der Form

$$a_1 a_2 a_3 \dots = b_1 b_2 \dots,$$

so könnte man mit $a_2 a_3 \dots$ beiderseits symbolisch multiplizieren und erhielte dann

$$a_1 = a_2 a_3 \dots b_1 b_2 \dots,$$

d. h. der Zyklus a_1 ließe sich gegen unsere Voraussetzung aus den anderen Zykeln ableiten. Die Anzahl der überhaupt ableitbaren Zykelkomplexe muß also gleich der Anzahl der verschiedenen symbolischen Produkte von nur ersten Potenzen der γ Zykel sein. Diese Anzahl ist aber augenscheinlich $2^\gamma - 1$. Wir können dann vom Theorem II das folgende Theorem deduzieren:

Theorem III. *Die Anzahl der in einem von m_γ γ -wertigen, $m_{\gamma-1}$ $(\gamma - 1)$ -wertigen u. s. w. bis m_1 einwertigen Dingen gebildeten Paarsysteme vorkommenden Zykelkomplexe ist gleich*

$$2^{1 + \sum_{\gamma=1}^{\gamma} \binom{\gamma-2}{2} m_\gamma} - 1.$$

TABELLE

der möglichen unzerlegbaren Paarsysteme für zwei, drei, ..., acht gegebene Dinge¹, wenn jedes Ding in einem, zwei oder drei Paaren vorkommen soll, und alle Paare verschieden sein sollen.

2 Dinge:

$$m = 0, n = 0, p = 2$$



1

3 Dinge:

$$m = 0, n = 1, p = 2$$



1

$$m = 0, n = 3, p = 0$$



1

4 Dinge:

$$m = 0, n = 2, p = 2$$



2

$$m = 0, n = 4, p = 0$$



3

$$m = 1, n = 0, p = 3$$



1

$$m = 1, n = 2, p = 1$$



1

$$m = 2, n = 2, p = 0$$



1

$$m = 4, n = 0, p = 0$$

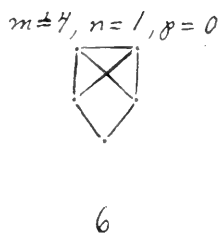
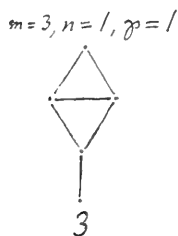
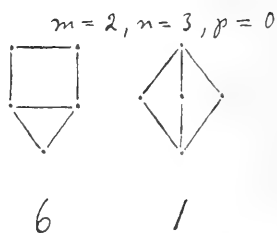
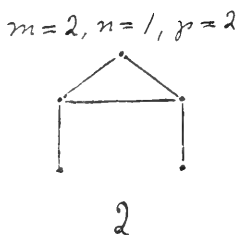
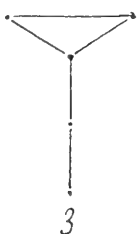
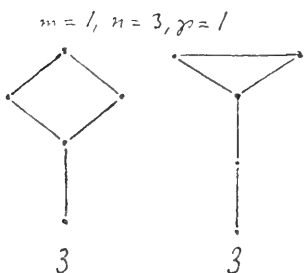
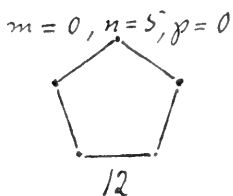
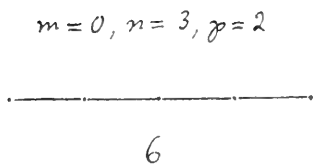


1

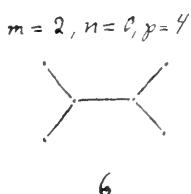
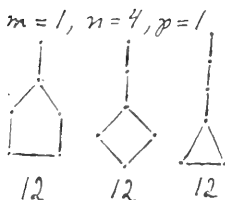
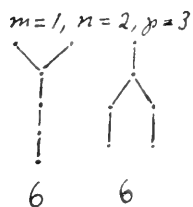
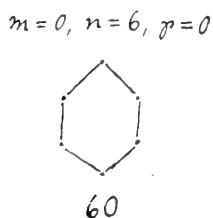
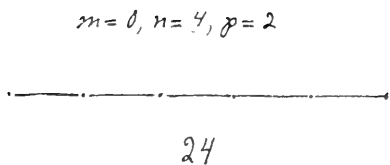
¹ Ist nur ein Ding gegeben, so kann natürlich kein Paarsystem gebildet werden.

Die unter einer Figur aufgeschriebene Zahl gibt die Anzahl der Paarsysteme, die durch diese Figur dargestellt werden, an.

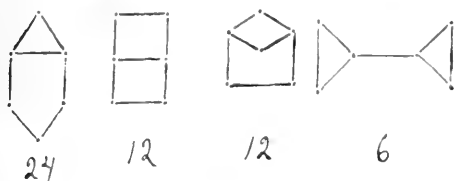
5 Dinge:



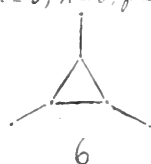
6 Dinge:



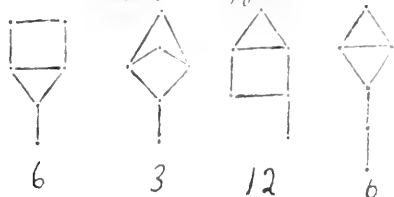
$$m=2, n=4, p=0$$



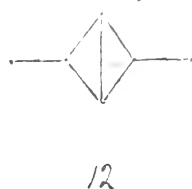
$$m=3, n=0, p=3$$



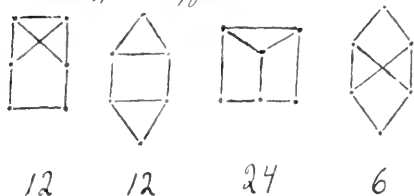
$$m=3, n=2, p=1$$



$$m=4, n=0, p=2$$



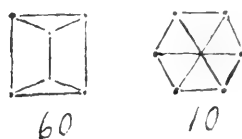
$$m=4, n=2, p=0$$



$$m=5, n=0, p=1$$

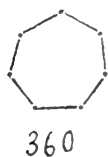


$$m=6, n=0, p=0$$

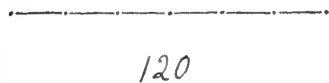


7 Dinge:

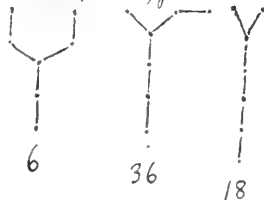
$$m=0, n=7, p=0$$



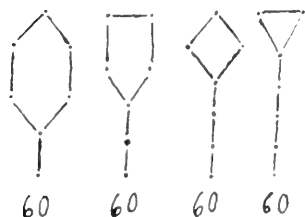
$$m=0, n=5, p=2$$



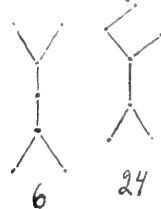
$$m=1, n=3, p=3$$



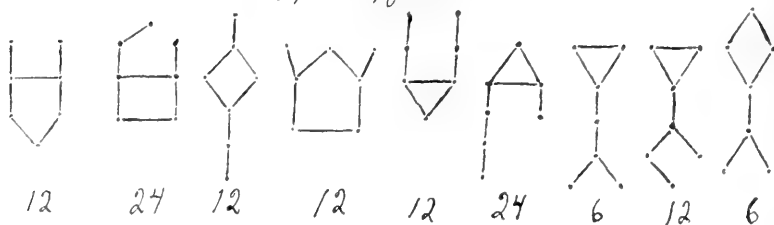
$$m=1, n=5, p=1$$



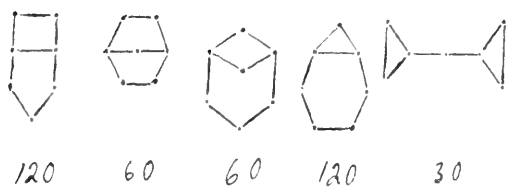
$$m=2, n=1, p=4$$



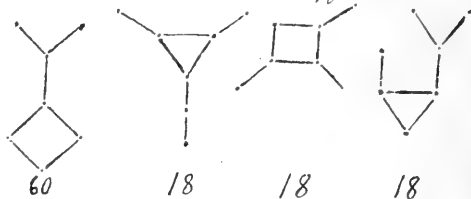
$$m=2, n=3, p=2$$



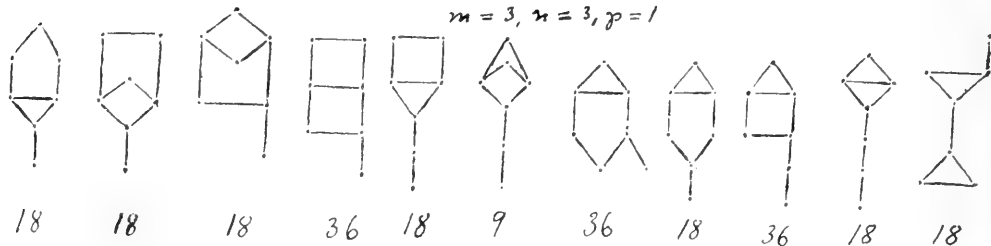
$$m=2, n=5, p=0$$



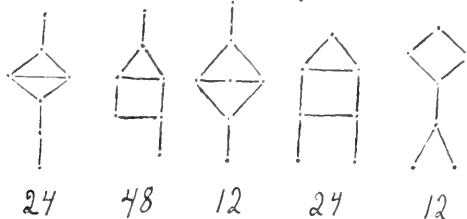
$$m=3, n=1, p=3$$



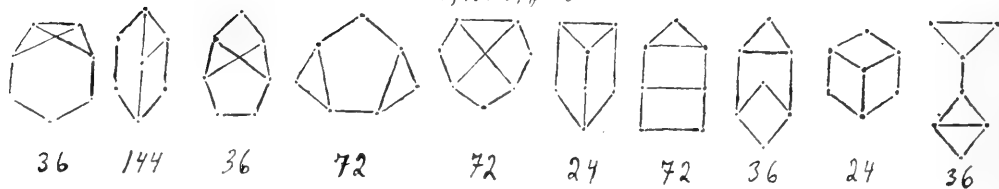
$$m=3, n=3, p=1$$



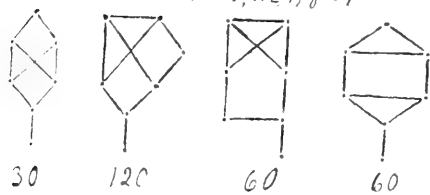
$$m=4, n=1, p=2$$



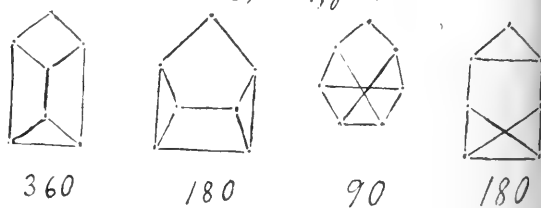
$$m=4, n=3, p=0$$



$$m=5, n=1, p=1$$



$$m=6, n=1, p=0$$



8 Dinge:

$$m=0, n=6, p=2$$



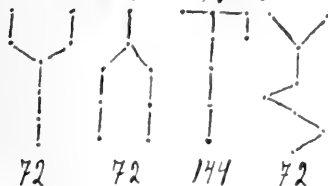
720

$$m=0, n=8, p=0$$



2520

$$m=1, n=4, p=3$$



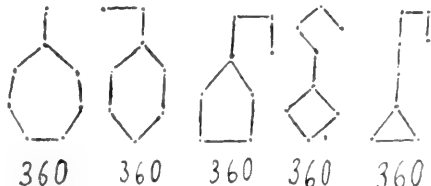
72

72

144

72

$$m=1, n=6, p=1$$



360

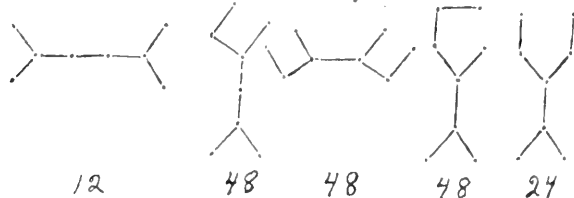
360

360

360

360

$$m=2, n=2, p=4$$



12

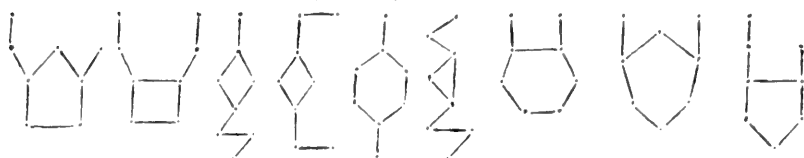
48

48

48

24

$$m=2, n=4, p=2$$



96

48

48

24

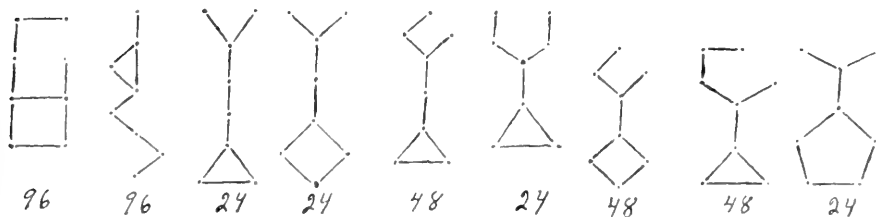
24

96

48

48

96



96

96

24

24

48

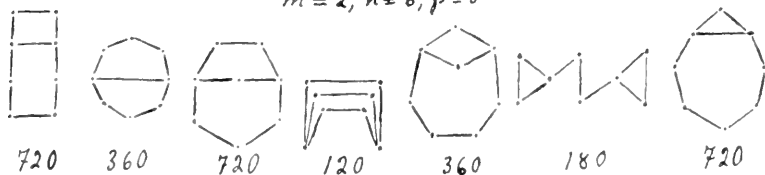
24

48

48

24

$$m=2, n=6, p=0$$



720

360

720

120

360

180

720

$$m=2, n=6, p=0$$

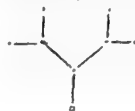


360

180

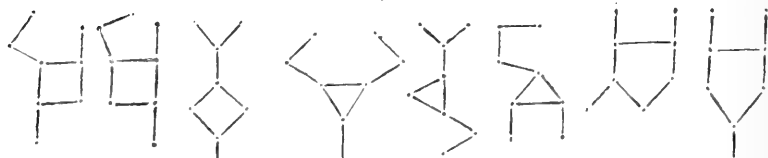
360

$$m=3, n=0, p=5$$



90

$$m=3, n=2, p=3$$



36

72

18

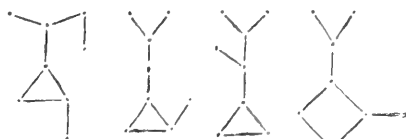
36

36

36

36

36



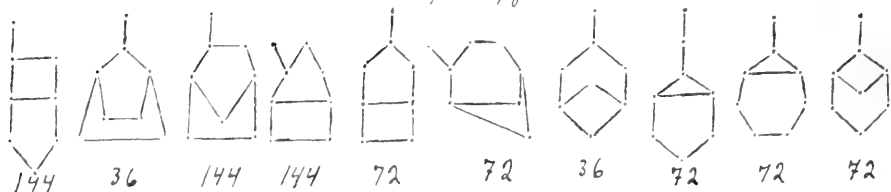
72

36

18

36

$$m=3, n=4, p=1$$



144

36

144

144

72

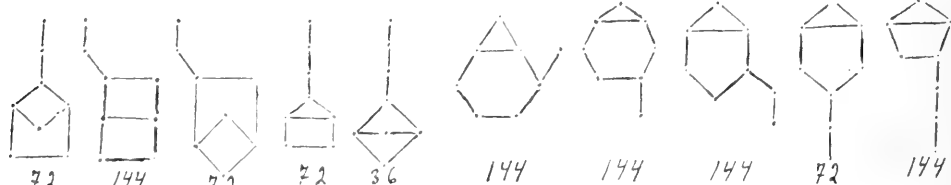
72

36

72

72

72



72

144

72

72

36

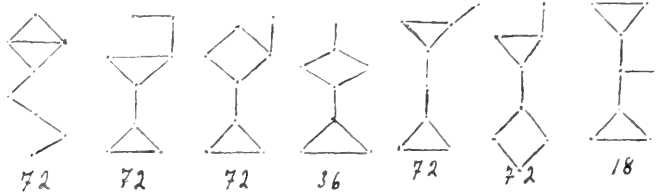
144

144

144

72

144



72

72

72

36

72

72

18

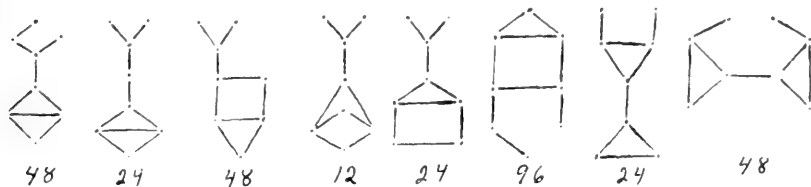
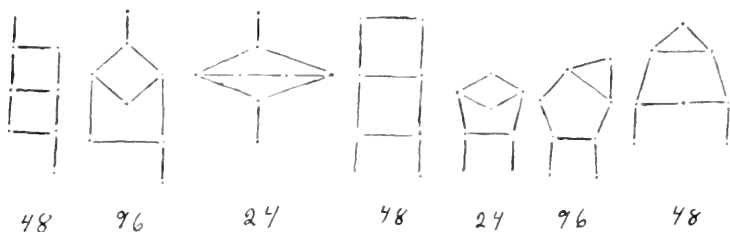
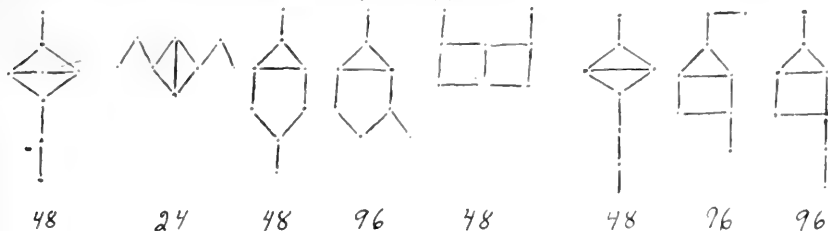
$$m=4, n=0, p=4$$



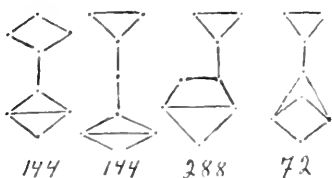
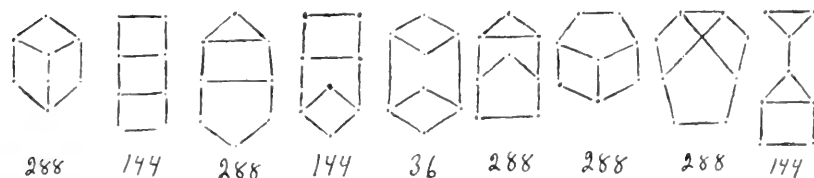
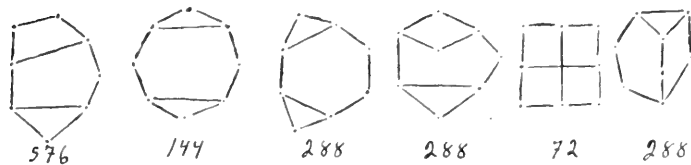
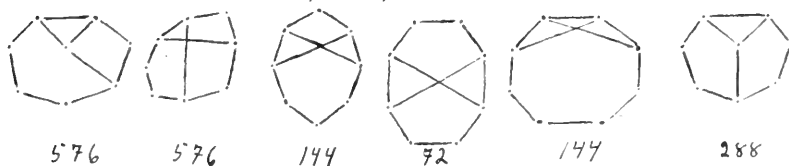
72

144

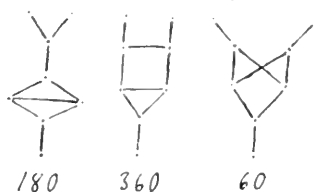
$$m = 4, n = 2, p = 2$$



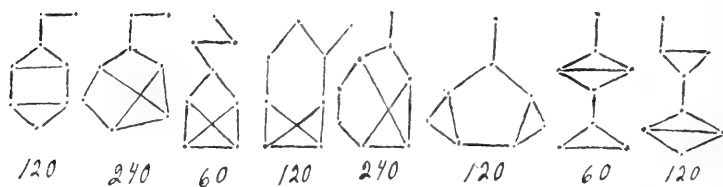
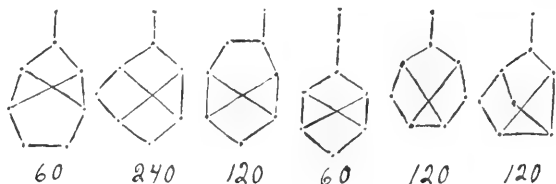
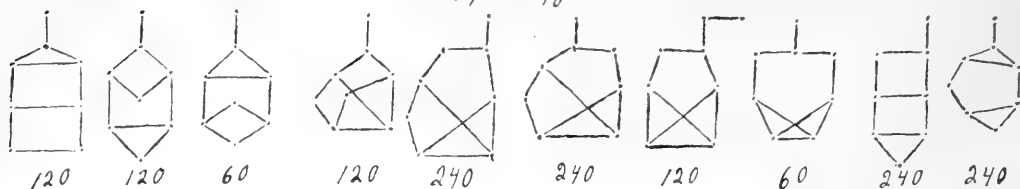
$$m = 4, n = 4, p = 0$$



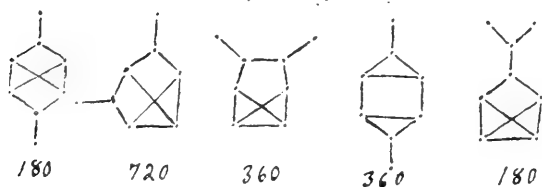
$$m = 5, n = 0, p = 3$$



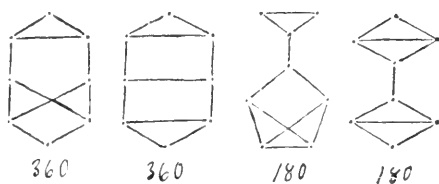
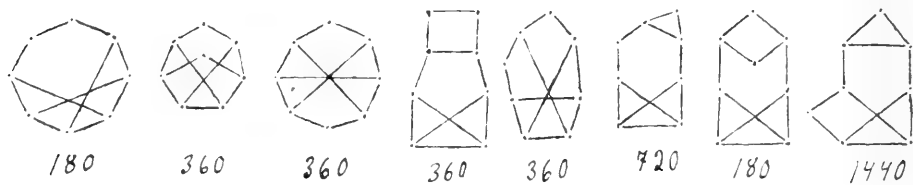
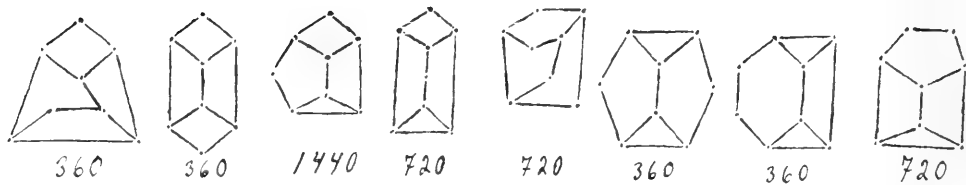
$$m=5, n=2, p=1$$



$$m=6, n=0, p=2$$



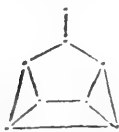
$$m=6, n=2, p=0$$



$$m = 7, n = 0, \gamma = 1$$



2520



1260



630



1260

$$m = 8, n = 0, \gamma = 0$$



2520



10080



3360



2520



840

Gedruckt 5. April 1918.



SKRIFTER

UTGIT AV

VIDENSKAPSSELSKAPET

I KRISTIANIA

1918

I. MATEMATISK-NATURVIDENSKABELIG KLASSE



KRISTIANIA

I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1919

SKRIFTER

UTGIT AV

VIDENSKAPSSKAPET

I KRISTIANIA

1918

I. MATEMATISK-NATURVIDENSKABELIG KLASSE



KRISTIANIA

I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1919



Indhold.

Nr.		Side
1.	J. H. L. Vogt. Die Sulfid: Silikatschmelzlösungen.	
	I. Die Sulfidschmelzen und die Sulfid: Silikatschmelzen. Mit 45 Figuren	
	im Texte	1—132
" 2.	Richard Birkeland. Sur le mouvement d'un fluide dans le cas général	
	où les accélérations ne dérivent pas d'un potentiel	1— 15
" 3.	Paul Winge. Psykiatriske bemærkninger om sprogets oprindelse . .	1— 50
" 4.	Axel Thue. Berechnung aller Lösungen gewisser Gleichungen von	
	der Form $ax^r - by^r = f$	1— 9

DIE SULFID : SILIKAT SCHMELZLÖSUNGEN

I.

DIE SULFIDSCHMELZEN UND DIE SULFID :
SILIKATSCHEMELZEN

VON

J. H. L. VOGT

Mit 45 Figuren im Texte.

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NAT. KLASSE. 1918. No. 1)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA

I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

1919

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 1. juni 1917.

*Bei dem hundertjährigen Jubiläum (Sept. 1919) der
Berghochschule in Stockholm sei diese Arbeit dem An-
denken meiner hoch geschätzten und lieben Lehrer im
Anfange der 1880-er Jahre*

*Professor A. RICHARD ÅKERMÄN,
Professor VICTOR EGGERTZ (†) und
Professor O. GUSTAF NORDENSTRÖM (†)*

in Verehrung gewidmet.

Vorwort.

Diese Arbeit, die hauptsächlich im Winter 1915—16 geschrieben wurde und im Winter 1916—17 abgeschlossen war, wurde in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Gesellschaft der Wissenschaften zu Kristiania am 1ster Juni 1917 zum Druck vorgelegt. Der vielen Schwierigkeiten des Krieges wegen fing jedoch der Druck zuerst in dem Frühling 1919 an.

Als eine Fortsetzung dieser Arbeit ist eine Studie, mit Haupttitel «Die Sulfid : Silikatschmelzlösungen II» über die sulfidisch-magmatischen Erzlagerstätten, namentlich die Nickel-Magnetkieslagerstätten, geplant. Während der Ausarbeitung dieser Studie musste ich mich ziemlich eingehend mit der Petrographie der Norite beschäftigen, und dies führte weiter zu einer mehr generellen, jetzt beinahe abgeschlossenen Untersuchung über «Die Krystallisation und die magmatische Differentiation der basischen Tiefengesteine».

Weil ich schon seit ein Paar Jahren voraussah, daß die Publikation der hier vorliegenden Arbeit wie auch der Fortsetzung über die Nickel-Magnetkieslagerstätten eine lange Zeit in Anspruch nehmen würde, habe ich ein Resumé mit Titel «Die Sulfid : Silikatschmelzlösungen» in Norsk Geologisk Tidsskrift (Kristiania, Band IV, S. 151 - 247) veröffentlicht.

— Ich bringe «Den Tekniske Høiskoles Fond» meinen besten Dank für die ökonomische Unterstützung zu experimentellen Untersuchungen, Analysen usw. zu der hiesigen Arbeit.

Johan H. L. Vogt.

Trondhjem, 4. Juni 1919.

Inhaltsverzeichnis.

I. Die Sulfidschmelzen.

	Seite
Schmelzpunkte einiger Sulfide	I
Über einige binären Sulfid Systeme und über die Molekulargröße der geschmolzenen Sulfide	6
Über das System $\text{Cu}_2\text{S} : \text{FeS}$ nebst Bemerkungen über die Zusammensetzung der Kupfersteine	18
Über die Löslichkeit von Eisen, Nickeisen usw. in Sulfidschmelzen	21
Über die Löslichkeit von Fe_3O_4 in Sulfidschmelzen	28
Über die fehlende oder minimale Löslichkeit von Silikat in (Schwermetall-)Sulfidschmelzen	36

II. Die Sulfid : Silikat-Schmelzen.

Über die begrenzte gegenseitige Löslichkeit von FeS , bezw. $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$ und FeO ., bezw. $\text{FeO} + \text{ZnO}$ -reichen Silikatschmelzen	38
Über die Löslichkeit von $\text{CaS} - \text{MnS}$ in Silikatschmelzen (unbegrenzte gegenseitige Löslichkeit von $\text{CaS} - \text{MnS}$ und basischen, CaO - bezw. MnO -reichen Silikatschmelzen)	51
Über $\text{CaS} - \text{MnS}$, Oldhamit—Manganblende in Silikatschmelzen	60
Über das Eutektikum $\text{CaS} : \text{Äkermanit}$ und über die eutektische Grenzlinie zwischen $\text{CaS} - \text{MnS}$ und Melilith, Olivin usw	66
Über die Molekulardepression einiger Sulfide und über die Molekulargröße der in Silikatschmelzen gelösten Sulfide	79
Über $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$ in Silikatschmelzen	81
Über die Krystallisationsbeziehung zwischen Spinell und Silikat und zwischen Spinell und Sulfid	86
Über FeS in Silikatschmelzen	91
Über die mechanisch beigemengten Steinpartikelchen in den Rohschlacken usw.	103
Über das Auftreten des Kupfers in den Schlacken von Steinschmelzen ausschließlich oder beinahe ausschließlich als Steinkugeln, und über die fehlende oder minimale „chemische“ Verschlackung (minimale Löslichkeit von Cu_2S in FeS -haltigen Silikatschmelzen)	108
Über das Gleichgewicht zwischen R in RS und R in der Silikatschmelze	119
Vergleich zwischen der Schmelzpunkt-Erniedrigung einerseits der Sulfidschmelzlösungen und andererseits der Silikatschmelzlösungen	121
Über die frühzeitige Krystallisation von „Apatit und Erz“ — oder der „telechemischen“ Mineralien	128

LIBRARY
NEW YORK
BOTANICAL
GARDEN

I.

DIE SULFIDSCHMELZEN.

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung einiger aus den späteren Jahren, mit Benutzung der modernen Arbeitsmethoden herrührenden Bestimmungen der

Schmelzpunkte einiger Sulfide.

Ag₂S (künstlich):

Nach FRIEDRICH ¹	812° (oder ein wenig höher)
" FRIEDRICH ²	835°
" TRUTHE ³	834°

Bleiglanz (natürlich):

Nach FRIEDRICH und LEROUX ⁴	1103°
" BILTZ	1100°
" FRIEDRICH ²	1114°
" FRIEDRICH ¹	1120°
" TRUTHE ³	1106°
" WAGENMANN ⁵	1109°

Cu₂S (künstlich):

Nach E. HEYN und O. BAUER ⁶ , bei 99.71 0/0 Cu ₂ S	1127°
" FRIEDRICH ⁷ , bei 99.6 0/0 Cu ₂ S	1121°
Hieraus schloss FRIEDRICH, dass der Schmelzpunkt von chemisch reinem Cu ₂ S ist	1135° ± 10°
Nach TRUTHE (l. c.)	1114°

An dem Geophysischen Laboratorium zu Washington⁸ ist der Schmelzpunkt in Vacuum von chemisch reinem Cu₂S genau bestimmt 1130° ± 1°

- ¹ K. FRIEDRICH: Metallurgie (Met.), V, 1908.
- ² Met. IV, 1907.
- ³ W. TRUTHE (am Institut Tammann, Göttingen): Zeitschr. für anorganische Chemie (Z. f. anorg. Ch.), 75, 1912.
- ⁴ Met. II, 1905.
- ⁵ Siehe unten, S. 6.
- ⁶ Met. III, 1906.
- ⁷ Met. IV und V, 1907 u. 1908.
- ⁸ E. POSNJAK, E. T. ALLEN and H. E. MERWIN: The Sulphides of Copper. Econ. Geol. X, 1915.

JUN 24 1920

Cu_2S mag etwas CuS in fester Lösung enthalten, wodurch der Schmelzpunkt herabgesetzt wird, und zwar nicht unwesentlich (Schmelzpunkt bei einem Überschuß, über Cu_2S , von 1.40 % $\text{S} = 1096^\circ$ und bei einem Überschuß von 2.70 % $\text{S} = 1057^\circ$).

Die Umbildungstemperatur von regulärem, bei hoher Temp. entstandenen Cu_2S zu rhombischem Cu_2S (Kupferglanz) beträgt, ebenfalls zufolge dem Washingtoner Laboratorium, bei chemisch reinem Cu_2S ... 91° .

Magnetkies und FeS.

Nach FRIEDRICH¹ . . . Magnetkies 1187°

— » — . . . Reines FeS 1171°

Zufolge äußerst genauen Untersuchungen von E. T. ALLEN, J. L. CRENSHAW und J. JOHNSON² (an dem Geophysischen Laboratorium zu Washington):

Magnetkies (FeS mit ein wenig S^3 in fester Lösung):

in S -Atmosphäre 1188° {
- H_2S -Atmosphäre 1183° }

Reines FeS $1170^\circ (\pm 5^\circ)$

Zufolge G. RÖHL:⁴

FeS (geglühter reiner Schwefelkies, der FeS
mit einem ganz geringen Überschuß von S in
fester Lösung gab) 1188°

MnS. Zufolge RÖHL (l. c.) Schmelzpunkt = 1620° .

Mehrere relativ leicht schmelzbare Sulfide usw. hauptsächlich zufolge L. H. BORGSTROM:⁵

Realgar, AsS 310°
Auripigment, As_2S_3 $320^\circ 6$
Antimonglans, Sb_2S_3 $546^\circ 7$
 Bi_2Te_3 $573^\circ 8$
Tetradymit, Bi_2Te_3 . Bi_2S_3 . . 600°
Guanajuatit, Bi_2Se_3 690°
Wismuthglans, Bi_2S_3 718°

¹ l. c., Met. IV und V.

² The Mineral Sulphides of Iron. Amer. Journ. of Sc. 33, März 1912.

³ Es mag übrigens nicht S , sondern FeS_2 sein, das in fester Lösung hineingeht; siehe eine Abh. von C. W. CARSTENS in Norsk Geol. Tidsskr. III, 1914, und die in Band II gelieferte Erörterung.

⁴ Die Konstitution der Sulfideinschlüsse in Eisen und Stahl und der Entschwefelungsprozeß. In The Iron and Steel Institute, Carnegie Scholarship Memoirs, Vol. IV, 1912. — Ausführliches Referat in Ferrum, XI, 1913, S. 220–223, und in Stahl und Eisen, 1913, S. 565–567.

⁵ The melting- and boiling- points of metalloid sulphide-, selenide- and tellurideminerals. Finska Vet.-Soc. Förh., Helsingfors, LVII, Afd. A, No. 24, 1915.

⁶ Zufolge JONHER, Zeitschr. anorg. Ch., 62, 1909: $\text{AsS} = 320^\circ$ und $\text{As}_2\text{S}_3 = 310^\circ$.

⁷ Zufolge verschiedenen anderen Bestimmungen: 550° , 546° und 530° . — WAGENMANN fand 540° (siehe unten).

⁸ Zufolge MÖNKEMEYER, Zeitschr. ang. Ch., 46, 1905.

ZnS (Zinkblende und Wurtzit).

Zufolge genauen und eingehenden Untersuchungen von E. T. ALLEN und J. L. CRENSHAW¹ ist Wurtzit, bzw. Zinkblende stabil

Wurtzit (α -ZnS) oberhalb 1020°

Zinkblende (β -ZnS) unterhalb 1020°

Der Umwandlungspunkt wird durch eine isomorphe Beimengung von FeS in der Konstitution des Minerals erniedrigt, durch andere Beimengungen dagegen erhöht.

ZnS beginnt bekanntlich schon unterhalb des Schmelzpunktes sich zu verflüchtigen, und zwar sehr erheblich.

Die gerade erwähnten amerikanischen Forscher erhitzen Zinkblende schnell zu 1550°, bei welcher Temperatur das Mineral *nicht* geschmolzen war.

Zufolge FRIEDRICH² gibt ZnS mit PbS, bzw. Ag₂S und FeS ein Eutektikum. Der Kurvenzweig zwischen diesem Eutektikum und ZnS — wie auch die Schmelzkurve zwischen Cu₂S und ZnS — wurde, wegen der starken Verflüchtigung von ZnS, nur bis zu einem gewissen Prozentsatz von ZnS erforscht; durch Extrapolation des restierenden Kurvenzweiges (siehe Fig. 1) ergibt sich annähernd der Schmelzpunkt, nämlich:

bei PbS : ZnS	Schmelzp. von ZnS, etwa 1625°
„ Cu ₂ S : ZnS	„ - — „ 1690°
„ Ag ₂ S : ZnS	„ - — „ 1670°
„ FeS : ZnS	„ - — „ 1680°,

somit wahrscheinlich etwa 1650°.

Bei einer — in elektrischem Tiegel-Schmelzofen (siehe unten, S. 5) ausgeführten — Untersuchung von mir (mit Assistance von Stud. chem. LEPSØE) über die Verflüchtigung und über den Schmelzpunkt von ZnS ergab sich als Resultat:

1350°—1375° (zufolge Messung mit optischem Pyrometer; Einwäge 149.5 gr. ZnS); nur eine ganz geringe Verflüchtigung.

1380°—1390°: eine geringe Verflüchtigung.

1400°—1410°: nicht unwesentliche Zunahme der Verflüchtigung.

1425°—1440°: fortwährend Zunahme der Verflüchtigung.

1475°—1500°: sehr starke Verflüchtigung; die ZnS-Dämpfe waren bei 1500° so dicht, daß man mit Wanner-Pyrometer nur zur Not durch die Dämpfe durchsehen konnte.

¹ Die Sulfide von Zink, Cadmium und Quecksilber, Z. f. anorg. Ch. 79, 1913.

² Die Zinkblende als Steinbildner. Met. V, 1908.

Oberhalb 1500° wurde die Temperatur, auf Grundlage der angewandten Stromstärke und der bis 1500° gemessenen Temperatur, extrapoliert.¹

Bei 1550° — 1600° gewaltige Verflüchtigung, — und noch mehr bei rund 1650° .

Die Erhitzung oberhalb 1350° dauerte:

1350° — 1400°	8 Minuten
1400° — 1500°	29 —
1500° —etwa 1650°	16 —

Von der ursprünglichen Einwäge, 149.5 gr., war nach dieser Erhitzung nur 54.8 gr. zurück; es wurden somit nicht weniger als rund 64 % verflüchtigt.

Das ursprünglich aus Pulver bestehende Sulfid war zusammengesmolzen, und die Schmelze hatte die innere Kontur des Tiegels (Graphittiegels) angenommen.

Das bei der Schmelzung erstarrte Sulfid bestand aus Wurtzit² (und nicht aus Zinkblende); dabei hatte sich an dem oberen, relativ kalten Ende des Tiegels eine dünne Schicht von sublimierten Wurtzit-Krystallen abgesetzt.

— Die Dampfdichte von festem Zinksulfid erreicht bei Temperatur 1500° und etwas darüber einen sehr hohen Betrag, jedoch nicht ganz 1 Atmosphäre; und ZnS hat (bei dem Druck von einer Atmosph.) einen wirklichen Schmelzpunkt, der zufolge meinem obigen Experiment bei ungefähr 1650° liegt. Dies stimmt mit dem durch Extrapolation von FRIEDRICH gefundenen Wert.

CaS. P. LEBEDEW³ konnte im Kryptolofen, wo CaSiO_3 (zufolge seiner Angabe mit Schmelzpunkt 1512°) sich leicht schmelzen ließ, selbst bei der höchsten erreichbaren Temperatur nicht CaS zum Schmelzen bringen.

¹ Bei dem vorliegenden Experiment entsprach: zu 40 Amp. ca. 1385° ; zu 45 Amp. ca. 1405° ; zu 49 Amp. ca. 1430° ; zu 55 Amp. ca. 1480° . — Die Extrapolation war selbstverständlich mit gewissen Fehlern verknüpft. — Oberhalb 1500° waren die ZnS-Dämpfe so dicht, daß man nicht mit dem optischen Pyrometer durchsehen konnte.

² Der erstarrte Wurtzit zeigte in Stückform eine lichtgelbe Farbe. — In Dünnschliff von der üblichen Dicke ist das Mineral durchsichtig, jedoch nur schwach durchsichtig; also mit sehr starker Lichtabsorption. — Die Krystalle sind optisch einachsigt; von Basis und hexagonaler Säule begrenzt; der Typus ist kurz säulenförmig. — Die Lichtbrechung ist extrem stark. — In einem relativ dicken Dünnschliff erreichen die Interferenzfarben das Gelb erster Ordnung; die Art der Doppelbrechung ist positiv, und die Doppelbrechung ist erheblich niedriger als 0.05. — Diese Kriterien stimmen mit den von ALLEN usw. gelieferten Angaben für Wurtzit.

³ Z. f. anorg. Ch, 70, 1911; die Arbeit von LEBEDEW (und von WOLOSOW) wurde im mineralogischen Laboratorium (Prof. F. J. LEVINSON-LESSING) des Polytechn. Instituts zu Petrograd ausgeführt.

Zufolge einer Untersuchung von mir liegt der Schmelzpunkt von CaS höher als 1900°.

CaS (Einwäge 85 gr.) wurde in einem elektrischen Ofen von demselben Typus, wie er in TAMMANN's Laboratorium an der Universität Göttingen gebraucht wird (mit dem Graphitiegel als Leiter des Stromes), erhitzt, und die Temperatur mit optischem Pyrometer gemessen (und zwar oftmals).

Nach Erhitzung:

24	Minuten bei Temp.	1700°—1800°
26	— „ —	1800°—1900°
36	— „ —	ca. 1900°

war keine Andeutung zum Schmelzen wahrzunehmen.

Aus einigen unten beschriebenen Schmelzversuchen (siehe S. 58 und Fig. 26) von 25 Gew.-Przt. CaS : 75 Gew.-Przt. $(\text{Ca}, \text{Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_{10}$, 50 % CaS : 50 % Ca-Sil., 73 % CaS : 27 % Ca-Sil. und 83 % CaS : 17 % Ca-Sil. folgt, daß der Schmelzpunkt von CaS ziemlich sicher nicht viel höher als 1900° liegen mag.

Der Schmelzpunkt von CaO ist = 2572°; weil die Sulfide im allgemeinen niedrigere Schmelzpunkte als die Oxyde haben, dürfte auch aus diesem Grunde der Schmelzpunkt von CaS niedriger — und-zwar nicht unwesentlich niedriger — als 2500° liegen.

BaS; zufolge A. WOŁOSKOW¹ liegt der Schmelzpunkt sehr hoch; wahrscheinlich bei mindestens 1600°—1700°.

Zusammenstellung einiger Schmelzpunkte:

Sb ₂ S ₃	546°
Bi ₂ S ₃	718°
Ag ₂ S	834°
PbS	1114°
Cu ₂ S	1130°
FeS	1170°
Magnetkies	1183°
MnS	ca. 1620°
ZnS	etwa 1650°
BaS	— sehr hoch; wahrscheinlich mindestens 1600° —1700°.	

CaS — besonders hoch, nämlich höher als 1900°, jedoch wahrscheinlich nicht viel höher.

¹ Schmelzversuche über Bisilikate mit Sulfiden und Halogenverbindungen. Ann. de l'Inst polytechnique, St. Pétersbourg 1911, vol. XV. (Die Abhandlung ist rußisch, mit einem ganz kurzen Resumé in deutsch).

Dabei geben wir nach C. W. KANOLT¹ die Schmelzpunkte einiger Oxyde an: $\text{Cr}_2\text{O}_3 = 1990^\circ$; $\text{Al}_2\text{O}_3 = 2050^\circ$; $\text{CaO} = 2572^\circ$; $\text{MgO} = 2800^\circ$ (und $\text{Pt} = 1775^\circ$).

In Bezug auf das Verhältnis zwischen den Schmelzpunkten der Sulfide und der meist verbreiteten Silikatmineralien bemerken wir:

a) Einige Sulfide, wie z. B. Sb_2S_3 , Bi_2S_3 und Ag_2S , haben einen niedrigeren Schmelzpunkt als selbst die am leichtesten schmelzbaren Silikatmineralien.

b) Andere Sulfide, wie PbS , Cu_2S , FeS (und Magnetkies), ergeben Schmelzpunkte ungefähr wie die am leichtesten schmelzbaren Silikatmineralien, und etwas höhere als das Eutektikum von Silikatgemischen, die aus sehr leicht schmelzbaren Mineralien bestehen.

c) Wiederum andere Sulfide, wie ZnS , MnS , BaS und CaS , ergeben Schmelzpunkte, die nicht unwesentlich höher als diejenigen der meist verbreiteten natürlichen Silikatmineralien liegen.

Über einige binäre Sulfid-Systeme und über die Molekulargrösse der geschmolzenen Sulfide.

Wir geben eine Übersicht über die wichtigsten bisher ausgeführten Untersuchungen, nämlich über die Systeme²

$\text{Ag}_2\text{S} : \text{PbS}$, $\text{Cu}_2\text{S} : \text{PbS}$, $\text{PbS} : \text{FeS}$, $\text{Ag}_2\text{S} : \text{ZnS}$, $\text{PbS} : \text{ZnS}$, $\text{FeS} : \text{ZnS}$ (und $\text{Ag}_2\text{S} : \text{Cu}_2\text{S}$) nach K. FRIEDRICH's schon oben zitierten Abhandlungen in Metallurgie (1907–1908).

$\text{Ag}_2\text{S} : \text{FeS}$, nach P. SCHOEN, ebenda, VIII, 1911.

$\text{Cu}_2\text{S} : \text{FeS}$ (Litteraturcit., siehe unten).

$\text{PbS} : \text{Sb}_2\text{S}_3$, nach K. WAGENMANN, ebenda, IX, 1912.

$\text{FeS} : \text{MnS}$, nach G. RÖHL (l. c.).

Keine der obigen Abhandlungen sind von genügend eingehenden mineralogischen Untersuchungen begleitet; mehrere Fragen sind deswegen nicht endgültig erörtert worden.

Bezüglich $\text{Ag}_2\text{S} : \text{Cu}_2\text{S}$ neigt FRIEDRICH auf Grundlage seiner thermischen und mikroskopischen Analyse »der Ansicht zu, daß sie eine ununterbrochene Reihe von Mischkrystallen bilden.« — Ich verweise auf die Isodimorphie der betreffenden Verbindungen und auf das Mineral Silberkupferglanz, mit wechselndem Verhältnis zwischen Ag_2S und Cu_2S .

¹ Z. f. anorg. Ch. 85, 1914.

² Bezüglich der Umwandlungen einiger der Sulfide (Ag_2S , Cu_2S , FeS , mehrere $n\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$ -Verbindungen) bei niedriger Temperatur, verweise ich auf die Originalarbeiten; hier beschäftigen wir uns nur mit dem Uebergange von der flüssigen zu der festen Phase.

Die Schmelzdiagramme der eutektischen Sulfid-Systeme $FeS : ZnS$, $PbS : ZnS$, $Ag_2S : ZnS$, $PbS : FeS$, $Ag_2S : PbS$, $PbS : Cu_2S$ (nach FRIEDRICH) und $Ag_2S : FeS$ (nach SCHOEN) reproduziere ich auf Fig. 1.

Bei diesen Systemen handelt es sich um diskontinuierliche, *Bakhuiss Roozebooms* Typus V angehörige Mischkristalle, freilich derart, daß in den meisten Fällen, wie bei $PbS : ZnS$, $Ag_2S : ZnS$, $PbS : FeS$, $Ag_2S : FeS$, das Mineral A nur eine ganz geringe Menge der Komponente *b* und

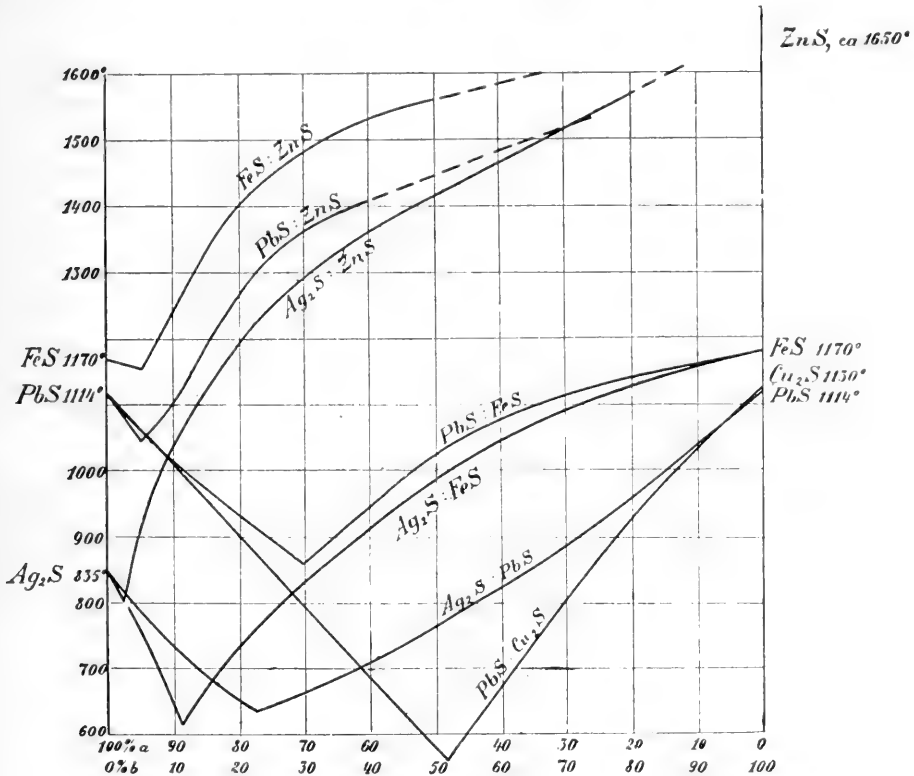


Fig. 1. Das Schmelzdiagramm einiger binären Sulfid-Systeme, mit Eutektikum (nach FRIEDRICH, $Ag_2S : FeS$ nach SCHOEN). Einige dieser Systeme bilden Mischkristalle mit Eutektikum, und zwar mit relativ viel der Komponente *a* in dem Mineral *B* (Beispiel: FeS in $(Zn, Fe) S$). — Die Komponente mit dem niedrigerem Schmelzpunkt ist überall links eingezeichnet. — Das Prozent-Verhältnis bezieht sich auf Gewichtsprozent (und nicht auf Molekularprozent).

ebenfalls das Mineral *B* nur eine ganz geringe Menge *a* aufnehmen kann. In entsprechender Weise mag Silberglanz nur ganz wenig PbS , aber Bleiglantz mindestens 1 Przt., vielleicht ein Paar Przt. Ag_2S aufnehmen. — Andererseits mag Zinkblende (und Wurtzit) ziemlich viel FeS (nämlich Zinkblende mindestens 25 % FeS) enthalten. Dies bewirkt ein relative geringe Schmelzpunkt-Erniedrigung von FeS durch ZnS .

Fig. 2 (oben) gibt das Schmelzdiagramm $FeS : MnS$ nach RÖHL² wieder. Derselbe meint, daß das Diagramm in zwei Teildiagramme zerfallen sollte, nämlich $FeS : Fe_3Mn_2S_5$ und $Fe_3Mn_2S_5 : MnS$. Zwischen den beiden letzteren weist er eine unbegrenzte Löslichkeit in der festen Phase nach.

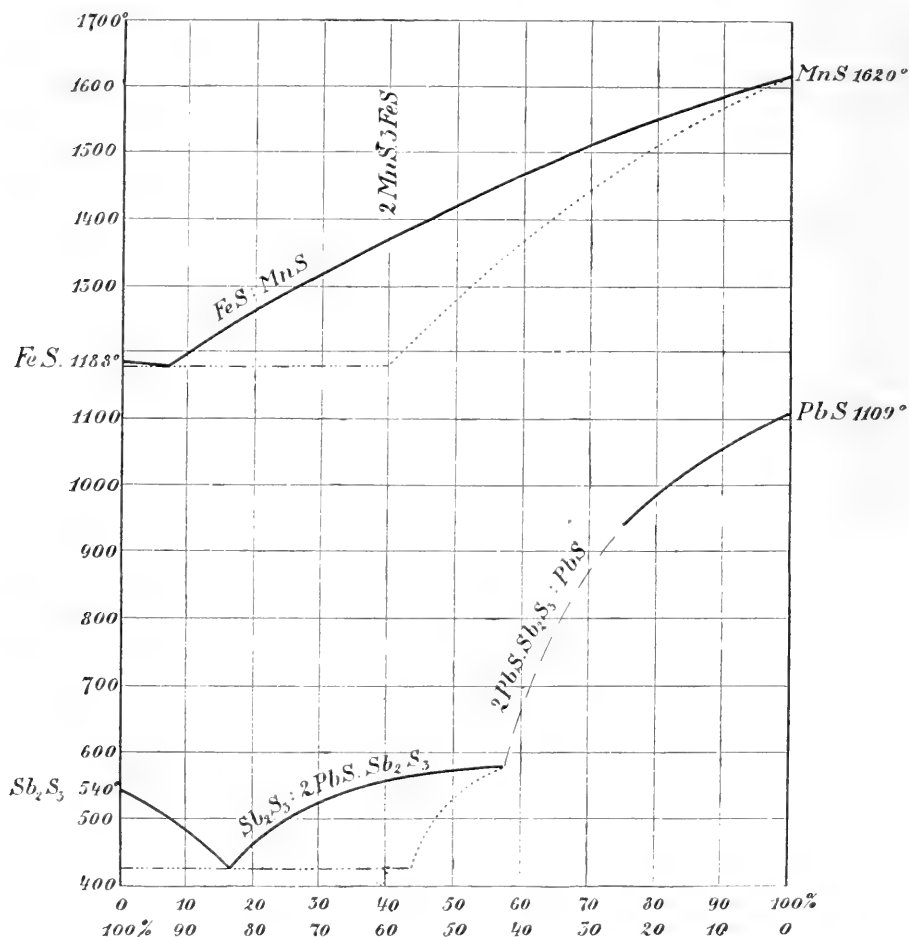


Fig. 2. Das Schmelzdiagramm zwischen FeS und MnS , und zwischen Sb_2S_3 und PbS .

Das letztere bedeutet, daß das auskristallisierte MnS -Mineral, das mit Manganblende identisch ist, erhebliche Mengen von FeS aufnehmen kann. RÖHL hat nach meiner Meinung nicht die Selbständigkeit der Verbindung $Fe_3Mn_2S_5$ festgestellt. Vielmehr dürfte zwischen FeS und MnS eine diskontinuierliche Mischungsreihe — in ähnlicher Weise wie zwischen FeS und ZnS — vorliegen, indem Manganblende viel FeS , während FeS nur ganz wenig MnS aufnehmen kann. Hierdurch erklärt sich auch die geringe Schmelzpunkt-Erniedrigung von FeS durch MnS . — Meine Auffassung beleuchte ich durch die punktierten Linien auf Fig. 2 (oben).

WAGENMANN erhielt zwischen Sb_2S_3 (Schmelzp. 540°) und PbS die Verbindung $2\text{PbS} \cdot \text{Sb}_2\text{S}_3$ (Schmelzp. 577°), die mit dem Mineral Heteromorphit (Jamesonit) chemisch identisch ist. Sb_2S_3 und $2\text{PbS} \cdot \text{Sb}_2\text{S}_3$ bilden (siehe Fig. 2, unten) miteinander ein Eutektikum (bei 17 % PbS und 426°), indem $2\text{PbS} \cdot \text{Sb}_2\text{S}_3$ etwas Sb_2S_3 in fester Lösung aufnehmen mag. — Wegen spärlicher Beobachtungen zeichne ich die Schmelzkurve zwischen PbS und $2\text{PbS} \cdot \text{Sb}_2\text{S}_3$ z. T. nur durch eine punktierte Linie.

Die verschiedenen Forscher, die sich mit thermischen Untersuchungen über die Sulfide beschäftigt haben, heben hervor, daß die Sulfide im allgemeinen *ohne nachweisbare Unterkühlung* krystallisieren.

Selbst sehr schnell¹ erstarrte (Schwermetall-)Sulfidschmelzen zeigen eine krystalline Struktur, was sich durch gesetzmäßige Ätzfiguren² kundgibt. Ein «Sulfid-Glas» ist bisher nie nachgewiesen worden.

Die geschmolzenen, aus FeS, PbS, Ag_2S , Cu_2S , Sb_2S_3 , Bi_2S_3 bestehenden Sulfide, bzw. Sulfidgemische (die letzteren außer den obigen auch mit etwas NiS oder ZnS) sind *sehr dünnflüssig*, und zwar nach meiner Erfahrung viel dünnflüssiger als selbst die dünnflüssigsten Silikatschmelzen. — Die Krystallisation der Sulfide nur bei minimaler Unterkühlung dürfte in Verbindung mit der ausgeprägten Dünnflüssigkeit stehen.³

Die **Molekulargröße der geschmolzenen Sulfide** lässt sich auf Grundlage von VAN'T HOFFS Gesetz über die molekulare Schmelzpunkt-Erniedrigung in verdünnten Lösungen bestimmen. In der Formel

$$\Delta T = 0.0199 \cdot \frac{T^2}{q}$$

bedeutet: T = die absolute Temperatur, in Celsiusgrad. q = die (latente) Schmelzwärme pr. gr. Substanz des Lösungsmittels. — ΔT die von dem Grammäquivalent der gelösten Substanz b in 100 gr. a hervorgerufene Schmelzpunkt-Erniedrigung.

Die Formel gilt bekanntlich in der obigen einfachen Form nur für verdünnte Lösungen. Die generelle Formel lautet:

$$\frac{dT}{db} \cdot m = 0.0199 \cdot \frac{T^2}{q},$$

wo m = Molekulargewicht und dT , bzw. db = Differential der Temperatur-Erniedrigung, bzw. der Konzentration der b -prozentischen Lösung.

¹ Nämlich bei einer Dauer der Erstarrung von mindestens einigen Minuten.

² Ich stütze mich hierbei auf meine Untersuchungen unter dem „Metall“-Mikroskop von geschliffenen und geätzten Flächen einer Reihe hauptsächlich aus FeS, Cu_2S und NiS (neben etwas PbS, ZnS, CoS) bestehenden Sulfidschmelzen (Rohstein, Kupferstein usw.).

³ Ich verweise auf meine frühere Erörterung über die Beziehung zwischen Viskositätsgrad und Krystallisationstendenz bei den Silikatschmelzen.

Wo die Substanz b elektrolytisch dissoziiert ist, muss $0.0199 \cdot \frac{T^2}{q}$ mit einem Faktor i multipliziert werden, wo $i = 1 + (k - 1) \alpha$. α ist der Dissoziationsgrad und k die Anzahl Ionen, in welche das Molekul zerfallen ist. Bildet sich nur ein Kation und ein Anion ($k = 2$), so vereinfacht sich der Faktor zu $1 + \alpha$.

Das Glied

$$0.0199 \cdot \frac{T^2}{q}$$

ist für ein und dasselbe Lösungsmittel konstant und heißt Molekulardepression (E).

Um die Formel für die molekulare Schmelzpunkt-Erniedrigung auf die eutektischen Sulfid-Systeme benutzen zu können, rechne ich zuerst die Gewichtsprozente (wie m % PbS : (100— m) % Cu₂S) auf n gr. b zu 100 gr. a um (n gr. PbS : 100 gr. Cu₂S; n gr. Cu₂S : 100 gr. PbS). — Zu dieser Umrechnung eignet sich nur eine begrenzte Anzahl der von FRIEDRICH und SCHOEN gelieferten Beobachtungstabellen, nämlich die folgenden :

Beobachtet (FRIEDRICH).					Umgerechnet.		Schmelzp.-Erniedr.
100	0/0 PbS :	0	0/0 Ag ₂ S	1114°	100 gr. PbS :	0	gr. Ag ₂ S 0°
95	" "	: 5	" "	1073°	100	" "	: 5.3 " " 41°
89.7	" "	: 10.3	" "	1027°	100	" "	: 11.5 " " 87°
80	" "	: 20	" "	960°	100	" "	: 25 " " 154°
75	" "	: 25	" "	928°	100	" "	: 33.3 " " 186°
70	" "	: 30	" "	903°	100	" "	: 42.9 " " 211°
60.2	" "	: 39.8	" "	841°	100	" "	: 66.1 " " 273°
					100 gr. PbS :	0	gr. Cu ₂ S 0°
100	0/0 PbS :	0	0/0 Cu ₂ S	1114°	100	" "	: 12.1 " " 127°
89.2	" "	: 10.8	" "	1063°	100	" "	: 25.3 " " 240°
79.8	" "	: 20.2	" "	1042°	100	" "	: 46.9 " " 350°
68.46	" "	: 31.54	" "	1015°	100	" "	: 66.7 " " 452°
60	" "	: 40	" "	929°			
					100 gr. PbS :	0	gr. ZnS 0°
100	0/0 PbS :	0	0/0 ZnS	1114°	100	" "	: 2.04 " " 18°
98	" "	: 2	" "	1096°	100	" "	: 3.2 " " 45°
96.9	" "	: 3.1	" "	1069°	100	" "	: 4.3 " " ca. 70°
95.9	" "	: 4.1	" "	ca. 1044°			
					100 gr. Ag ₂ S :	0	gr. PbS 0°
100	0/0 Ag ₂ S :	0	0/0 PbS	835°	100	" "	: 11.1 " " 94°
90	" "	: 10	" "	739°	100	" "	: 17.6 " " 144°
85	" "	: 15	" "	691°	100	" "	: 19.9 " " 168°
83.4	" "	: 16.6	" "	667°			

Beobachtet (SCHOEN).

100	0/0 Ag ₂ S :	0	0/0 FeS	812°
97.5	" "	2.5	" "	757.5°
95	" "	5	" "	714°
92.5	" "	7.5	" "	680°
90	" "	10	" "	629°

100 gr. Ag ₂ S :	0	gr. FeS	0°
100 " "	2.56	" "	54.5°
100 " "	5.2	" "	98°
100 " "	8.1	" "	132°
100 " "	11.1	" "	183°

Beobachtet (nach FRIEDRICH).

100	0/0 Ag ₂ S :	0	0/0 ZnS	843°
99	" "	1	" "	830°
98.5	" "	1.5	" "	818°
98	" "	2	" "	809°
Eutektikum	ca. 3	" "	ca. 807°	

100 gr. Ag ₂ S :	0	gr. ZnS	0°
100 " "	1.01	" "	13°
100 " "	1.52	" "	25°
100 " "	2.04	" "	34°
Eutektikum			ca. 36°

100	0/0 Cu ₂ S :	0	0/0 PbS	1121°
87.73	" "	12.27	" "	1033°
78.62	" "	21.38	" "	909°
68.72	" "	31.28	" "	781°

100 gr. Cu ₂ S :	0	gr. PbS	0°
100 " "	14.0	" "	88°
100 " "	27.2	" "	212°
100 " "	45.5	" "	340°

100	0/0 FeS :	0	0/0 PbS	1187°
93.9	" "	6.1	" "	1170°
72.4	" "	27.6	" "	1117°
69.4	" "	30.6	" "	1105°
52.0	" "	48.0	" "	1033°

100 gr. FeS :	0	gr. PbS	0°
100 " "	6.5	" "	17°
100 " "	38.1	" "	70°
100 " "	44.2	" "	82°
100 " "	92.3	" "	154°

Beobachtet (nach SCHOEN).

100	0/0 FeS :	0	0/0 Ag ₂ S	1171° ¹
95	" "	5	" "	1170°
90	" "	10	" "	1155°
80	" "	20	" "	1124°
70	" "	30	" "	1088°
60	" "	40	" "	1046°

100 gr. FeS :	0	gr. Ag ₂ S	0°
100 " "	5.3	" "	17°
100 " "	11.1	" "	32°
100 " "	25	" "	63°
100 " "	42.9	" "	99°
100 " "	66.7	" "	141°

Diese Systeme bilden freilich in allen oder beinahe allen Fällen Mischkrystalle miteinander, jedoch derart, daß der feste Körper *A* nur eine ganz geringe Menge *b* und *B* nur eine ganz geringe Menge *a* aufnimmt. Für die hier vorliegende Untersuchung mögen *a* und *b* somit als praktische gerechnet voneinander »unabhängige« Komponenten betrachtet werden.

¹ Dieser Wert, der nicht von SCHOEN bestimmt ist, indem er ihn aus älteren Angaben entnommen hat, glaube ich durch 1187° ersetzen zu müssen. — Andernfalls würde man für 5 0/0 Ag₂S beinahe keine Schmelzpunkt-Erniedrigung erhalten.

Anders verhält es sich mit n gr. ZnS, bzw. MnS in 100 gr. FeS; deswegen sind diese Systeme nicht mitgenommen.¹

Die erhaltenen Resultate beleuchte ich graphisch² durch Fig. 3, wo jede einzelne Beobachtung eingezeichnet ist. Die Abszisse stellt n gr. (somit nicht Molekulargewicht) b auf 100 gr. a dar; die Ordinate repräsentiert die Schmelzpunkt-Erniedrigung.

Wo genügend viele Beobachtungen bei wenig b zu 100 gr. a vorliegen, ergibt sich, daß die Kurven bis etwa 10, 15 oder 20 gr. b zu 100 gr. a als beinahe gerade Linien, mit Ausgangspunkt in Origo, verlaufen. Die Schmelzkurven in der Nähe von Origo berechtigen somit zu einer ganz guten Berechnung der molekulären Schmelzpunkt-Erniedrigung in verdünnten Lösungen.

Die Molekulargewichte sind:

FeS	88.1
ZnS	97.5
Cu ₂ S	159.3
PbS	239.0
Ag ₂ S	247.9

Zur Kritik der Ergebnisse dient:

1. Dieselben Gewichtsmengen PbS und Ag₂S, die alle beide annähernd gleich hohe Molekulargewichte haben, bewirken in 100 gr. FeS annähernd dieselbe Schmelzpunkt-Erniedrigung.
2. Dieselben Gewichtsmengen Ag₂S, Cu₂S und ZnS bewirken in 100 gr. PbS eine in umgekehrter Relation zu den Molekulargewichten (247.9, 159.3 und 97.5) jedenfalls in den großen Zügen proportional steigende Schmelzpunkt-Erniedrigung, — wie es die Theorie verlangt.
3. Dasselbe gilt auch für die gleichen Gewichtsmengen PbS, (ZnS) und FeS in 100 gr. Ag₂S.
4. Die von denselben Grammengen (oder Molekulargewichten) PbS und Ag₂S bewirkte Schmelzpunkt-Erniedrigung in 100 gr. FeS ist geringer als diejenige von denselben Mengen in 100 gr. der anderen Sulfide bewirkte Erniedrigung. Dies dürfte darauf beruhen, daß die latente Schmelzwärme von FeS größer — und folglich die Molekulardepression von FeS kleiner — wie von Ag₂S, PbS und Cu₂S ist.

Diese Kritik besagt, daß die Kurven jedenfalls in den großen Zügen ziemlich zuverlässig sind; die unvermeidlichen Beobachtungsfehler sind von untergeordneter Bedeutung.

¹ Wegen der Bildung von Zwischenstufe-Verbindungen sind die Systeme FeS : Cu₂S und PbS : Sb₂S₃ außer Betracht gesetzt. — Wegen vielleicht etwas fraglicher Bestimmungen bei wenig FeS zu viel PbS ist das Glied n gr. FeS zu 100 gr. PbS vernachlässigt; dagegen dürfte das andere Endglied, n gr. PbS zu 100 gr. FeS benutzt werden.

² Wegen der spärlichen Beobachtungen auf dem ganz kurzen Kurvenzweig (bis zum Eutektikum) von n gr. ZnS zu 100 gr. PbS ist diese Kurve nur punktiert aufgezogen.

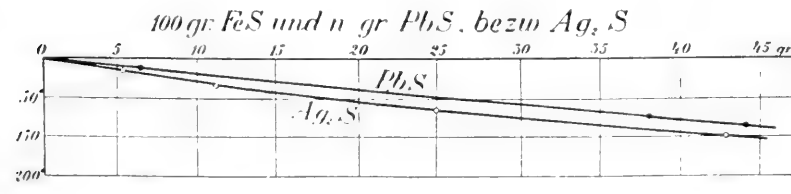
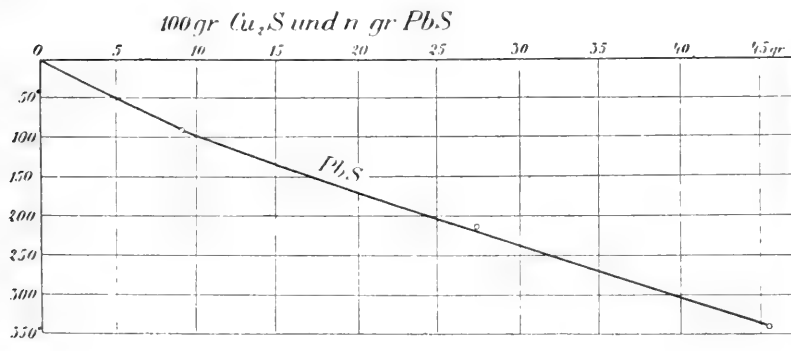
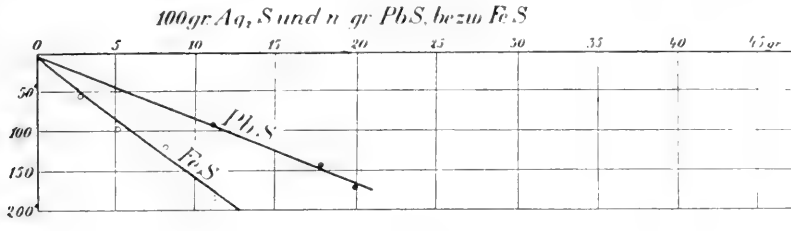
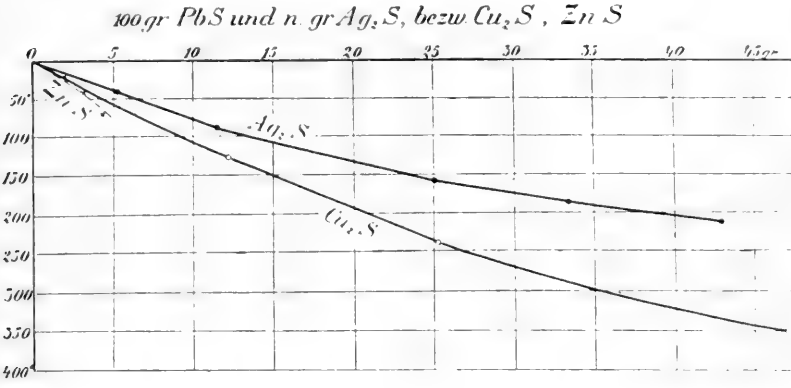


Fig. 3. Schmelzpunkt-Erniedrigung von n Gramm Sulfid b in 100 Gramm Sulfid a . \circ bezeichnet den Schmelzpunkt von Sulfid a . Die Ordinate bezeichnet die von n Gramm Sulfid b in 100 Gramm Sulfid a bewirkte Schmelzpunkt-Erniedrigung. Die kleinen Kreise stellen die Beobachtungspunkte dar.

Leider fehlen bisher Bestimmungen der Schmelzwärme der Sulfide. Eine exakte Berechnung über die Molekulargröße der gelösten Sulfide ist somit zur Zeit nicht möglich.

Wir können jedoch schon jetzt eine angenäherte Darstellung liefern.

Aus LANDOLT-BÖRNSTEINS Physikalisch-chemische Tabellen (1905) und J. W. RICHARDS Metallurgical Calculations (1910) — nebst den aus den späteren Jahren stammenden Präzisionsbestimmungen der Schmelzpunkte — entnehme ich die beistehende Übersicht über sp. Wärme, Schmelzpunkt und latente Schmelzwärme.

	Sp. Wärme ca. 10—100° Etwas höhere Temp.			Schmelzp.	Latente Schmelz- wärme, Cal. pr. gr.	
Pb	0.0310			326	5.37, 5.86	
Ag	0.0559	15—350°	0.0576	960	24.35	
		660—900°	0.066			
Cu	0.0936	900°	0.1259	1082.6	43.3	
Fe	0.1162	720—1000°	0.218	ca. 1600	70 (?)	
		1000—1200°	0.1989			
		Roheisen, weißes		ca. 1150	ca. 33	
S	0.1844	119—147° (flüßig)	0.2346	115	9.37	
PbS	0.0466	0—300°	0.0478	1114		Q = 104 Cal.
Ag ₂ S	0.0737	15—324°	0.0903	834		
Cu ₂ S	0.1212	190°	0.1454	1130		
FeS	0.1357			1170		
FeS ₂	0.1301					
CuFeS ₂	0.1291					
PbO	0.0512					
Cu ₂ O	0.111					
CuO	0.142					
Fe ₂ O ₃	0.1645					
PbCl ₂	0.0651			485	20.9	
AgCl	0.0911	160—380°	0.0978			
CuCl	0.1383					
PbBr ₂	0.0533			490	12.34	
AgBr	0.0739					
PbI ₂	0.0427			375	11.50	
AgI	0.0616					

Die Schmelzwärme steht bekanntlich in einer gewissen Relation zu der spezifischen Wärme der Körper; ferner steigt sie im großen ganzen gerechnet mit der Temperatur, oder richtiger ausgedrückt, mit der absoluten Temperatur (T), während sie anderseits um-

gekehrt proportional dem Molekulargewicht ist.¹ Eine Berechnung T mal 2.1 und dividiert mit dem Molekulargewicht (oder Atomgewicht bei den Metallen) gibt für die meisten Schwermetalle — wie auch für die an Schwermetallen reichen Verbindungen — in der Regel eine auffallend gute Übereinstimmung (siehe RICHARDS, l. c.); so für Pb, Ag und Cu:

Latente Schmelzwärme		
	Gefunden	Berechnet $2.1 \times T : \text{Mol.gew.}$
Pb	5.8 Cal.	6.3 Cal.
Ag	24.35 "	24.0 "
Cu	43.3 "	44.8 "

Für S erhalten wir dagegen keine Übereinstimmung (25.3 statt 9.37).

Eine Berechnung $2.1 \times T : \text{Mol.gew.}$ gibt für unsere Sulfide:

PbS	12.2 Cal.
Ag ₂ S	9.4 "
Cu ₂ S	18.5 "
FeS	34.4 "

PbS. Eine Berechnung, proportional der absoluten Temp. und umgekehrt proportional den Molekulargewichten, würde, ausgehend von den latenten Schmelzwärmen von PbCl₂, PbBr₂ und PbI₂, eine bedeutend höhere Schmelzwärme wie 12.2 für PbS liefern. Deswegen rechne ich für PbS mit 16 Cal.

Die „totale Schmelzwärme“ Q (von 0° gerechnet) — die Erhitzung von 0° bis zum Schmelzpunkt und dabei die Schmelzwärme umfassend — für geschmolzenes PbS beträgt, zufolge RICHARDS, 104 Cal. Es wird angegeben „bei 1050° geschmolzen“; sicher muß es sich aber um eine noch höhere Temp. gehandelt haben, und das Bleisulfid dürfte sogar etwas oberhalb 1114° erhitzt gewesen sein. Die Angabe berechtigt somit nicht zu einer sicheren Berechnung der latenten Schmelzwärme; nur sieht man, daß diese keinen sehr hohen Wert erreichen kann.

Ag₂S und Cu₂S. Wegen der relativ hohen sp. Wärmen derselben glaube ich die berechneten Werte 9.4 und 18.5 auf bezw. 12 und 21 erhöhen zu müssen.

Für FeS nehmen wir 35 Cal. an.

Wir werden eine Berechnung durchführen unter Voraussetzung der folgenden, freilich fraglichen, jedoch nicht gänzlich irreleitenden Werte für die latente Schmelzwärme:

PbS	16 Cal.
Ag ₂ S	12 »
Cu ₂ S	21 »
FeS	35 »

Die Molekulardepression $\left(0.0199 \cdot \frac{T^2}{q}\right)$ berechnet sich hieraus zu:

Molekulardepression	
PbS	2390 ⁰
Ag ₂ S	2030 ⁰
Cu ₂ S	1860 ⁰
FeS	1180 ⁰

¹ Siehe RICHARDS (l. c.).

Wir geben eine Berechnung über «Beobachtet» und «Berechnet» bei $\frac{1}{20}$ Molekulargewicht Sulfid *b* in 100 gr. Sulfid *a*, indem wir von den einfachen Molekulan (PbS, Ag₂S, Cu₂S, ZnS, FeS) ausgehen. $\frac{1}{20}$ Molekulargewicht entspricht bezw. 12.0 gr. PbS, 12.4 gr. Ag₂S, 8.0 gr. Cu₂S, 4.9 gr. ZnS und 4.4 gr. FeS. — «Beobachtet» finden wir durch Interpolation zwischen den nächstliegenden Beobachtungspunkten an Fig. 3 (oder an der Tabelle S 10—11).

Schmelzpunkt-Erniedrigung bei $\frac{1}{20}$ Molekulargewicht Sulfid *b* auf 100 gr. Sulfid *a*:

Auf 100 gr. PbS.

	Beobachtet	Berechnet
Ag ₂ S (12.4 gr.)	95 ⁰	} . . 120 ⁰
Cu ₂ S (8.0 gr.)	84 ⁰	
ZnS ¹ (4.9 gr.)	etwa 75 ⁰	

Auf 100 gr. Ag₂S.

	Beobachtet	Berechnet
PbS (12.0 gr.)	101 ⁰	} . . 101.5 ⁰
FeS (4.4 gr.)	88 ⁰	

Auf 100 gr. Cu₂S.

	Beobachtet	Berechnet
PbS (12.0 gr.)	75 ⁰	93 ⁰

Auf 100 gr. FeS.

	Beobachtet	Berechnet
PbS (12.0 gr.)	ca. 31 ⁰	} . . 59 ⁰
Ag ₂ S (12.4 gr.)	38 ⁰	

Trotz der Unsicherheit bei den angenommenen Werten der latenten Schmelzwärme und trotz der unvermeidlichen Beobachtungsfehler darf man aus der in großen Zügen angenäherten Übereinstimmung zwischen «Beobachtet» und «Berechnet» den Schluß ziehen, daß *eine starke Polymerisation der geschmolzenen Sulfide ausgeschlossen ist.*

Auch dürfte eine Polymerisation zu 2 (gleich Fe₂S₂, Pb₂S₂, Cu₄S₂ usw.) ausgeschlossen sein. Nach aller Wahrscheinlichkeit liegen die geschmolzenen Sulfide in der *einfachen Molekulargröße* (FeS, PbS, Cu₂S usw.) vor. Aus theoretischen Gründen ist dabei eine gewisse elektrolytische Dissoziation besonders in den verdünnten Lösungen anzunehmen. Ein endgültiger Schluß hierüber muß jedoch der Zukunft überlassen werden.

¹ Durch Extrapolation.

Über die Abhängigkeit der Lage des Eutektikums von dem Schmelzpunkt-Unterschied.

Die Lage des Eutektikums im binären System ist bekanntlich eine Funktion einer ganzen Reihe von Faktoren¹:

1. Der Verlauf der Schmelzkurve (Tangente der Kurve) am Origo (oder die Molekulardepression, abhängig von der abs. Temperatur und der latenten Schmelzwärme von a und von dem Molekulargewicht und der elektrolytischen Dissoziation von b);

2. die Krümmung der Schmelzkurve (oder Ersetzung von ΔT durch $\frac{\partial T}{\partial b} \cdot m$).

3. der Schmelzpunkt-Unterschied zwischen den beiden Komponenten.

4. bei den diskontinuierlichen Mischkrystallen kommt noch hinzu der Einfluß der Löslichkeit in der festen Phase von b in A und von a in B .

Die Abhängigkeit von dem Schmelzpunkt-Unterschied ersieht man aus Fig. 1 und 2² und aus der folgenden Tabelle:

Unabhängige Komponenten oder eutektische Mischkrystall-Komponenten mit wenig b in A und wenig a in B .

	Schmelzp. der beiden Komponenten	Schmelzpunkt-Unterschied	Zusammensetz. des Eutektikums. Gew.-Proz. der am höchsten schmelzenden Komponente	Schmelzpunkt des Eutektikums	Schmelzp.-Erniedrigung am Eutektikum, verglichen mit dem Schmelzp. der am niedrigsten schmelzenden Komponente
Ag ₂ S : ZnS	Ag ₂ S 835°; ZnS ca. 1650°	ca. 815°	ca. 3 0/0 ZnS	800°	35°
PbS : ZnS	PbS 1114°; ZnS ca. 1650°	- 536°	- 6 0/0 ZnS	1045°	69°
Ag ₂ S : FeS	Ag ₂ S 812°; FeS 1170°	- 258°	- 11 0/0 FeS	612°	200°
Ag ₂ S : PbS	Ag ₂ S 835°; PbS 1114°	279°	- 23 0/0 PbS	630°	205°
Sb ₂ S ₃ : 2PbS, Sb ₂ S ₃	Sb ₂ S ₃ 540°, - 577°	37°	- 30 0/0 Sb ₂ S ₃	426°	114°
PbS : FeS	PbS 1114°; FeS 1170°	56°	- 30 0/0 FeS	863°	251°
PbS : Cu ₂ S	PbS 1114°; Cu ₂ S 1130°	16°	- 51 0/0 Cu ₂ S	540°	574°

¹ Siehe meine Erörterung in Silikatschmelzlös. II, S. 128—135, und in Tscherm. Min. Petrogr. Mitt. XXVII, 1908, S. 110—115.

² Bezüglich den binären Silikat-Systemen verweise ich auf die unten folgende Fig. 45 (und bezüglich den Metallen auf Fig. 26 und 27 in meiner gerade zitierten Abh. in Tscherm. Mitt.).

Eutektische Mischkristall-Systeme, mit relativ viel von der am leichtesten schmelzbaren Komponente (FeS) in der am schwersten schmelzbaren Komponente (ZnS, MnS):

	Schmelzpunkt von FeS	Schmelzp.- Unterschied	Proz. ZnS, bezw. MnS im Eutektikum	Schmelzp.-Erniedr., verglichen mit FeS
FeS : ZnS	1170°	ca. 480°	ca. 6 0/0 ZnS	ca. 35°
FeS : MnS	1188°	- 430°	- 7 0/0 MnS	- 7°

Es wiederholt sich somit auch bei den Sulfiden, daß die Zusammensetzung des Eutektikums bei einem bedeutenden Schmelzpunkt-Unterschied in der Nähe der am leichtesten schmelzbaren Komponente liegt; in solchen Fällen ist die Schmelzpunkt-Erniedrigung am Eutektikum ziemlich gering (in Graden gemessen). — Bei abnehmendem Schmelzpunkt-Unterschied verschiebt sich die Lage des Eutektikums in der Richtung gegen die Mitte zwischen den beiden Komponenten; und hier mag eine bedeutende Schmelzpunkt-Erniedrigung am Eutektikum eintreten.

— Die hier besprochenen, bei dem Drucke von einer Atmosphäre ausgeführten Untersuchungen, namentlich betreffend die Mineralien Magnetkies, Bleiglanz, Kupferglanz, Silberglanz und Zinkblende (oder Wurtzit), mögen im wesentlichen auch auf die Bildung der Sulfid-Mineralien bei hohem Druck durch Auskristallisation aus Sulfid-Magmen übertragen werden.

Über das System $\text{Cu}_2\text{S} : \text{FeS}$ nebst Bemerkungen über die Zusammensetzung der Kupfersteine.

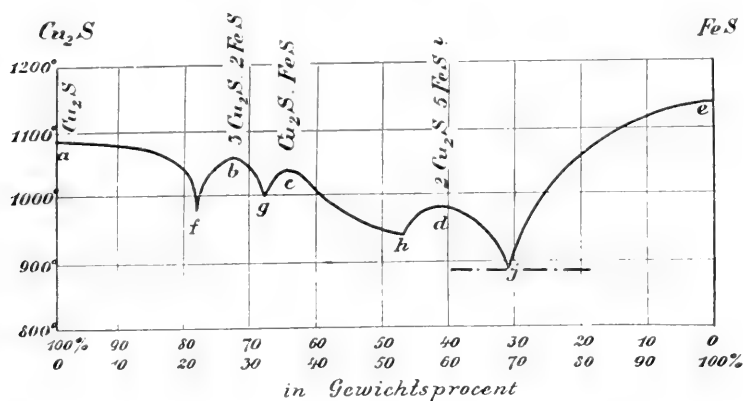
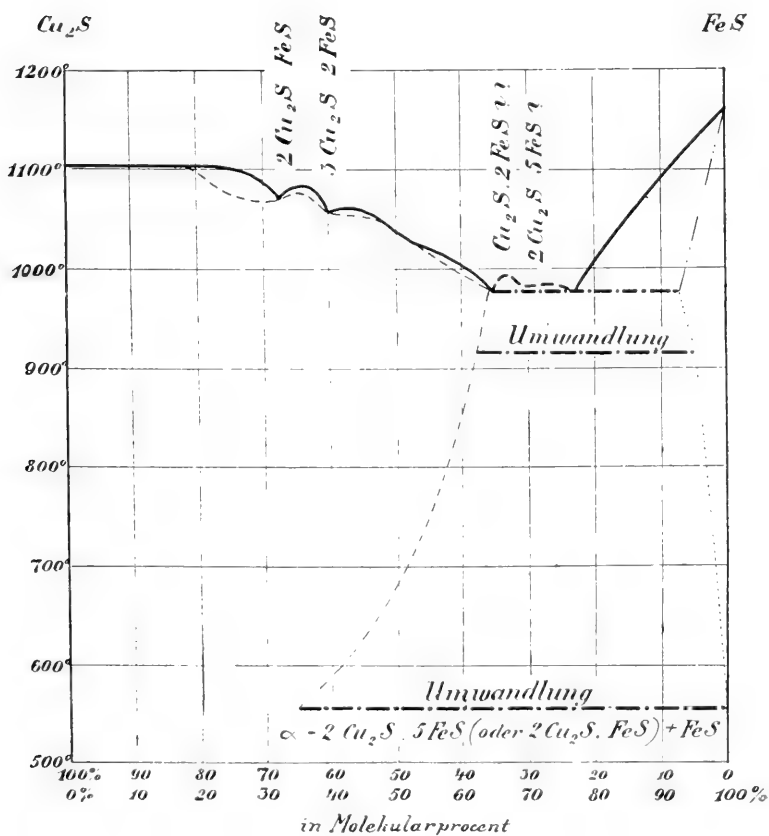
Das System $\text{Cu}_2\text{S} : \text{FeS}$ ist von mehreren Forschern studiert worden, und zwar namentlich von P. RÖNTGEN¹ (1906) und von K. BORNEMANN und E. SCHREYER² (1909); auch verweisen wir auf eine noch jüngere Untersuchung von N. JUSCHKEWITSCH³ (1912).

Nach RÖNTGEN entstehen bei der Auskristallisation: a) Cu_2S , b) $3\text{Cu}_2\text{S} \cdot 2\text{FeS}$, c) $\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$, d) $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot 5\text{FeS}(?)$ und e) FeS. Dabei meint er durch die thermische Untersuchung (siehe Fig. 4) Eutektika zwischen den verschiedenen Komponenten (a : b, b : c, c : d, d : e) nachgewiesen

¹ Metallurgie, III, 1906.

² Ebenda, VI, 1909; hier wird auch eine Reihe etwas älterer Untersuchungen erwähnt.

³ Ebenda, IX, 1912.

Fig. 4. Das System $\text{Cu}_2\text{S} : \text{FeS}$, nach RÖNTGEN.Fig. 5. Das System $\text{Cu}_2\text{S} : \text{FeS}$, nach BORNEMANN & SCHREYER.

zu haben. Bei der Abkühlung spalten sich seiner Darstellung zufolge die Doppelsulfide.

Nach BORNEMANN und SCHREYER bilden sich durch die Erstarrung aus Schmelzfluß (siehe Fig 5) wahrscheinlich die Verbindungen $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$, $3\text{Cu}_2\text{S} \cdot 2\text{FeS}$ und außerdem jedenfalls noch eine Verbindung, die nach den sehr unsicheren Daten der Erstarrungskurve $\text{Cu}_2\text{S} \cdot 2\text{FeS}$ sein könnte, nach den z. T. sicherer beobachteten Umwandlungen in der festen Phase aber wahrscheinlicher $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot 5\text{FeS}$ ist. Die Verbindungen, außer $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$ sind nur bei höherer Temperatur beständig. Sie zerfallen mit z. T. merkbarem thermischen Effekt. — $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot 5\text{FeS}$ erleidet zunächst bei 915^0 eine Umwandlung, um dann erst zwischen 500^0 und 600^0 unter Abscheidung von $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$ und FeS zu zerfallen. Diese Abscheidung hellgelber FeS -Krystalle ist von 33.5^1 % bis 100 % Mol.proz. FeS wahrnehmbar. Zwischen 230^0 und 180^0 wird auch $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$ unbeständig, indem jedoch etwas $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$ unzersetzt bleibt. Dabei werden u. a. die Bedingungen für die, zufolge B. & S. bei relativ niedriger Temperatur stattfindende sekundäre Ausscheidung von metallischem Kupfer erörtert.

JUSCHKEWITSCH meint, die Existenz der Verbindung $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$ verifiziert und dieselbe auch im erkalteten Kupferstein nachgewiesen zu haben.

— Ich lenke die Aufmerksamkeit darauf, daß in dem ausgeschmolzenen und sehr langsam — oftmals wochenlang — abgekühlten Sulfid bei dem Rösten von Kupfererzen bisweilen Doppelverbindungen von Kupfer- und Eisensulfiden angetroffen worden sind.

Nach den vorliegenden Beschreibungen handelt es sich um ein regulär krystallisierendes Mineral, mit Flächen hauptsächlich (111) und (110), und damit stimmt auch meine eigene Erfahrung. Die einschlägigen Untersuchungen stammen aus früheren Jahrzehnten, meist aus den 1850- bis 70-Jahren, zu welcher Zeit man noch keine genügende Kritik in Bezug auf Reinheit des Analysenmaterials ausübte. Die älteren Analysen berechtigen somit nicht zu der Aufstellung bestimmter stöchiometrischer Formeln, — und das mir zur Verfügung stehende Material ist nicht genügend reichhaltig für eine erschöpfende Untersuchung. Ich hoffe später, wenn ich mehr Material erhalten habe, auf diese Frage zurückkommen zu können. Hier will ich nur betonen, daß diese regulären Krystalle aus einer Doppelverbindung zwischen Kupfersulfid und Eisensulfid bestehen; sie nähern sich jedenfalls bisweilen der Zusammensetzung $\text{Cu}_2\text{S} \cdot 2\text{FeS}$.

In den aus überwiegend Cu_2S (nebst etwas FeS) bestehenden Kupfersteinen beobachtet man bisweilen *regulär* aufgebaute Krystall-Skelette, von

¹ Nach meinen Untersuchungen von Kupfersteinen unter dem Metall-Mikroskop (u. d. M.M.) tritt FeS in erkaltetem Stein auch bei noch etwas weniger FeS auf.

Cu_2S (oder Cu_2S nebst etwas FeS). — Cu_2S krystallisiert bekanntlich bei hoher Temperatur regulär; bei niedriger Temperatur (nämlich zufolge POSNJAK, ALLEN und MERWIN, l. c., S. 2, bei 91°) findet eine Umbildung zu $\beta\text{-Cu}_2\text{S}$, Kupferglanz, statt.

— Die thermische Untersuchung über das System $\text{Cu}_2\text{S} : \text{FeS}$ wird dadurch erschwert, daß Cu_2S ein wenig CuS und FeS ein wenig FeS_2 ¹ auflösen mag. Bei der Zusammenschmelzung von Cu_2S und FeS ist somit die Möglichkeit vorhanden, daß sich auf Kosten des einen Sulfids eine etwas höher geschwefelte Stufe des anderen Sulfids bilden kann, und dies wiederum mag einen jedenfalls einige Grad betragenden Einfluß auf die Schmelzkurve ausüben.

Bei der Zusammenschmelzung von Cu_2S und FeS erhält man somit wahrscheinlich nicht ein einfaches binäres, sondern ein mehr zusammengesetztes System. Diese Komplikationen mögen vielleicht die fehlende Übereinstimmung zwischen den von RÖNTGEN und von BORNEMANN & SCHREYER erhaltenen Schmelzkurven erklären.

Hauptsächlich um das Aussehen (oder den mineralogischen Charakter) der von Schlacken eingeschlossenen Steinkügelchen kennen zu lernen, habe ich eine Reihe Polierschliffe von Kupfersteinen usw. im Metall-Mikroskop studiert. Außer Cu_2S (oder Cu_2S mit etwas FeS in fester Lösung) und FeS gibt es im erkalteten Stein mindestens zwei zwischenliegende Verbindungen. Dieselben sind aber so äußerst fein zusammengewachsen, daß es mir nicht gelingt, sie für chemische Analyse zu isolieren.

Über die Löslichkeit von Eisen, Nickeleisen usw. in Sulfidschmelzen (Rohstein, Kupferstein usw.).

Wie es schon in der Mitte der 1870-Jahre von meinem Lehrer Prof. E. B. MÜNSTER² nachgewiesen wurde, enthalten die Rohsteine, Kupfersteine, Kupfer-Nickel-Steine usw. oftmals etwas metallisches Eisen, bezw. eine an Eisen und Nickel reiche Legierung.

Als Beispiel nehmen wir den sogenannten Rohstein von Kongsberg, bestehend aus:³

¹ Siehe die gerade zitierte Abhandlung wie auch die Abhandlungen über FeS usw. an dem Geophysischen Laboratorium zu Washington.

² Om Hytteproduktet Sten. Archiv for Matematik og Naturvidenskab, I, 1876, Kristiania.

³ Siehe die Analysenzusammenstellung in einer Abhandlung von mir in Norsk Teknisk Tidsskrift 1882.

Analyse Nr. 1.

Fe	63—68	%
Cu	2—	3.5 .
Ni, Co	0.15—0.5	.
Zn	0.3—	0.4 .
Pb	0.1—	0.4 .
Ag	0.3—	0.5 .
S	27—29	.
Unlösliches	0.3—	0.5 .

Nach der Berechnung von S zu Cu_2S , Ag_2S und FeS , nebst ein wenig NiS , ZnS , PbS , bleibt ein Überschuß von Eisen, dessen Vorhandensein von MÜNSTER durch das Ausziehen mit Magnet festgestellt wurde. Aus mehreren aus den Jahren 1877—80 herstammenden Analysen des Rohsteins habe ich die Menge des metallischen Eisens auf 18—23 Gew.proz. Fe, gegen 82—77 % Sulfid, hauptsächlich FeS , berechnet.

Einige Polierschliffe des Rohsteins zeigen unter dem Metall-Mikroskop (u. d. M.M.) skelettförmig auskristallisiertes Eisen, und man erhält (wenn wir von dem in geringer Menge beigemengten Cu_2S -haltigen Mineral absehen) dieselbe Struktur wie z. B. auf Fig. 7 und Fig. 8 (mit bezw. 36 % Fe : 64 % FeS und 28 % Fe : 72 % FeS) in der Abhandlung von R. LOEBE und E. BECKER über Das System Eisen-Schwefeleisen.¹ — Der Kongsberger Rohstein mit 18—23 Gew.proz. Eisen liegt zufolge der Untersuchung über die Krystallisationsfolge auf der Fe-Seite des Fe : FeS -Eutektikums, und dies stimmt mit der eben erwähnten Untersuchung von LOEBE und BECKER, die das Eutektikum zu ca. 15 % Fe : 85 % FeS (und bei Temperatur 985°) bestimmten. In Schmelzen von FeS mit etwas Cu_2S scheint jedoch das Eutektikum (oder die eutektische Grenzlinie zwischen Fe und den Sulfiden) bei noch etwas weniger Fe zu liegen.

Einige längst² von mir ausgeführte Analysen von dem mit Magnet ausgezogenen — und lange Zeit wiederholt mit Magnet gereinigten — Eisen aus verschiedenen Proben von Rohstein von Kongsberg ergaben 0.065, 0.075 und 0.09 % C; es handelt sich somit um ein an Kohle ganz armes Eisen. — Das mit Magnet ausgezogene Eisen enthielt 0.16—0.18 % S, was ausschließlich von einem kleinen, noch beihängenden Rest von Steinpulver herrühren möchte. — Selbst bei der Auskristallisation des Eisens aus einer Schmelzlösung mit rund 80 % FeS : 20 % Fe resultiert somit ein Eisen gänzlich ohne FeS (oder höchstens mit einer fraglichen minimalen Menge von FeS) in fester Lösung. Dies stimmt mit dem von LOEBE und BECKER hervorgehobenen Ergebnis, nämlich daß das aus FeS -armen

¹ Zeitschr. f. anorg. Ch., Bd. 77, 1912.

² Norsk Teknisk Tidsskrift, 1882.

FeS : Fe-Schmelzen auskristallisierte Eisen keine Spur von FeS in fester Lösung enthält.

Das in den flüssigen, an der Fe-Seite des Eutektikums liegenden Steinen auskristallisierte Eisen wird der Schwere wegen jedenfalls zum Teil gegen den Boden zu hinuntersinken.

Beim Ausstecken z. B. des Kongsberger Rohsteins (mit ungefähr 20 % metallischem Eisen) bildet sich nach kurzer Zeit eine untere Scheibe *b*, die rund 50 % Eisen zu 50 % Sulfid (FeS nebst etwas Cu_2S , Ag_2S usw.) enthält, während die obere Scheibe *a* aus überwiegend FeS, Cu_2S , Ag_2S usw. neben nur wenig metallischem Eisen besteht. Durch besondere Analysen von der unteren und der oberen Scheibe ist weiter festgestellt worden, daß das Silber und Kupfer ausschließlich (oder beinahe ausschließlich)

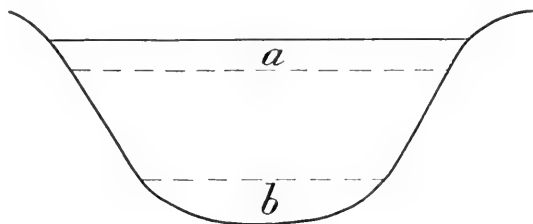


Fig. 6.

in Sulfidverbindungen auftreten, während das ausgeschiedene Eisen Null oder nur Spuren dieser Metalle enthält. Andererseits wird erfahrungsmäßig Nickel — und noch mehr Kobalt — in dem hinuntersinkenden Eisen angereichert.

Das relativ schnelle Hinuntersinken des frühzeitig auskristallisierten Eisens (oder der etwas Nickel, Kobalt usw. enthaltenden Eisenlegierung) — von sp. Gew. ungefähr 7.5 — in den Sulfidschmelzen — von sp. Gew. ungefähr 5 — wird durch die ausgeprägte Dünnschmelze selbst gleich oberhalb dem Erstarrungs-Intervall der Sulfidschmelze befördert.

Wenn der geschmolzene Stein eine längere Zeit stehend bleibt, sondert sich das hinuntersinkende Eisen für sich ab. Es entstehen hierdurch die sogenannten «eisernen Säue», welche viele technische Schwierigkeiten veranlassen können.

— Zufolge MÜNSTERS oben zitiierter Untersuchung aus dem Jahre 1876, wo er sich auf den Paramagnetismus der Steine, das Ausziehen mittels Magnet und das Studium von Polierschliffen mit einer starken Lupe stützte, wie auch zufolge meiner eigenen ergänzenden Untersuchungen beim Studium von Polierschliffen u. d. M.M., führen beinahe alle aus Schachtöfen (mit relativ starker Reduktion mittels Kohle) herstammende Rohsteine,

Kupfersteine (hinauf bis rund 50 % Cu), Nickelsteine¹ usw. etwas metallisches Eisen, bezw. Nickel-Eisen (siehe die Analysen Nr. 2—5). Nur ganz ausnahmsweise habe ich in solchen Steinen das Fehlen von ausgeschiedenem Eisen, bezw. Nickel-Eisen nachweisen können. — Dabei begegnen wir entsprechendem Metall auch in vielen aus Flammöfen (mit niedrigerer Reduktion) herstammenden Steinen.

Andrerseits fehlt metallisches Eisen in den von mir untersuchten aus dem Bessemerv erfahren wie auch aus Flammöfen herstammenden reichen, aus überwiegend Cu_2S bestehenden Kupfersteinen (mit 60 bis 79 % Cu, entsprechend rund $2\text{Cu}_2\text{S} \cdot \text{FeS}$ bis beinahe reines Cu_2S). — Fe scheint in Cu_2S wie auch in Schmelzen, die aus überwiegend Cu_2S neben wenig FeS bestehen, nur wenig löslich zu sein.

— An dem aus der Sulfidlösung auskrystallisierten Eisen (mit einem niedrigen Gehalt von Nickel, Kobalt usw.) beobachten wir gelegentlich einen Skelettaufbau, wie z. B. bei Magnetit, Alaun usw. — Die aus der Eisen-Nickel-Kupfer-Sulfidschmelze Nr. 4 auskrystallisierte Legierung Nr. 4 b (mit 55.60 % Fe, 40.40 % Ni, 1.76 % Co und 2.20 % Cu) erscheint in großen, aber dünnen — sogar bis 1 à 2 cm. breiten und 0.5 à 1 mm. dicken — Krystalltafeln, die nach einer Würfelfläche plattenförmig und sonst nur von (011) und (111) begrenzt sind. — Die auskrystallisierten Eisen- und Nickel-Eisen-Legierungen scheinen durchgängig regulär zu krystallisieren.

Über das Gleichgewicht zwischen Fe, Ni, Co, Cu usw. in dem ausgeschiedenen Metall und in den Sulfiden.

Um diese Frage zu erörtern, stelle ich zusammen einige Analysen einerseits von dem mit Magnet (bezw. in Betriff Nr. 4 b mit Pincet) ausgezogenen metallischen, in der Regel noch mit etwas Sulfid verunreinigten Teil und andererseits von dem sulfidischen, noch mit etwas Metall verunreinigten Teil.

Die Analysen Nr. 2, 3, 5 entnehme ich E. B. MÜNSTERS oben zitierter Arbeit, vom Jahre 1876, und Nr. 4 einer Abhandlung von mir in Norsk Teknisk Tidsskrift, Sonderabdruck vom Jahre 1897, S. 27. — Nr. 2 ist ein Rohstein von Kongsberg, von dem Boden des Aussteckstiegl, wo ziemlich viel Eisen (cfr. S. 23) hinuntergesunken war; die ganze Probe enthielt (ohne Berücksichtigung von Schlackenbeimengung) ca. 47 % Metall und 53 % Sulfid. — Nr. 3 ist eine eiserne Sau von demselben Rohsteinschmelzen zu Kongsberg, jedoch aus einem anderen Jahre als Nr. 2. — Nr. 5 ist ein Nickel-Kupfer-Stein (Konzentrationsstein) von Klefva Nickelwerk in Schweden. — Nr. 4 ist ein Nickel-Kupfer-Stein (Konzentrationsstein) von Ringerikes Nickelwerk in Norwegen (siehe oben diese Seite).

Auf Grundlage der Analysen von bezw. etwas mit Metall verunreinigtem Sulfid (a) und von etwas mit Sulfid verunreinigtem Metall (b) habe ich die Zusammensetzung des reinen

¹ In den entsprechenden Bleisteinen erscheint dabei häufig metallisches Blei.

Sulfids (a') und des reinen Metalls (b') berechnet, und zwar bei Nr. 2 und 3 unter der Voraussetzung, daß das Sulfid, wie es von MÜNSTER nachgewiesen wurde, in chemischer Beziehung aus FeS und Cu_2S (nebst ein wenig Ag_2S usw.) besteht. — Bei den Analysen Nr. 2 u. 3 wird diese Berechnung einigermaßen genau; bei Nr. 4 a und 5, a u. b , sind dagegen die Fehlerquellen etwas größer; auch mag es fraglich sein, ob Nickel in dem sulfidischen Teil als NiS ¹ erscheint, indem eine andere Sulfidstufe möglich sein dürfte.

Analysen von a etwas mit Metall verunreinigtem Sulfid, und b etwas mit Sulfid verunreinigtem Metall.
(bei Nr. 4 b jedoch ohne Sulfid)

	Kongsberg		Kongsberg		Ringerike		Klefva	
	Rohstein		Eiserne Sau		Nickel-Kupfer-Stein		Nickel-Kupfer-Stein	
	Sulfid Nr. 2 a	Metall Nr. 2 b	Sulfid Nr. 3 a	Metall Nr. 3 b	Sulfid Nr. 4 a	Metall Nr. 4 b	Sulfid Nr. 5 a	Metall Nr. 5 b
Fe	57.57	90.87	60.51	93.26	43.19	55.60	3.92	12.84
Ni	0.03	0.45	0.33	0.51	9.6	40.40	36.21	57.73
Co	0.25	1.68		2.02		1.76	3.85	4.05
Cu	3.55	1.56	1.15	0.84	16.37	2.20	31.04	18.42
Pb	0.32	0.16	0.04					
Ag	0.21	0.42(?)	0.002	0.001				
S	32.84	2.19	34.79	3.04	30.25		25.05	5.52
Unlösliches . . .	4.11	1.18	2.12	0.53			0.14	0.15
Summe	98.88	98.51	98.94	100.20	99.41	99.96	100.21	98.71

Aus diesen Analysen berechnet sich die Zusammensetzung des reinen Sulfids (a') und des reinen Metalls (b'):

	Nr. 2 a'	Nr. 2 b'	Nr. 3 a'	Nr. 3 b'	Nr. 4 a'	Nr. 4 b'	Nr. 5 a'	Nr. 5 b'
Fe	60.0	95.8	62.5	96.4	41	55.60	3	15
Ni	0.03	0.5	0.3	0.6	8	40.40	32.5	65
Co	0.25	1.8		2.2		1.76	3.5	4.3
Cu	3.8	(1.4) ¹	1.2	(0.8 ?)	18	2.20	33	15
Pb	0.35	0.1						
Ag	0.25	0.3(?)						
S	35.4		36.0		33		28	
Summe	100.0	100.0	100.0	100.0	100	99.96	100	100

¹ Eine isolierte Probe ergab nur Spuren von Kupfer.

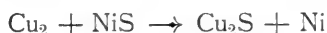
¹ Ich gehe hier nicht auf der Frage ein, ob das Nickelsulfid in einer anderen Stufe als NiS vorliegt.

In dem metallischen Teil wird Fe, Ni und Co angereichert, während anderseits der Gehalt von Cu in dem Eisen, bezw. Nickel-Eisen durchgängig abnimmt, und zwar in wesentlichem Grade. — Das mit Magnet aus Kongsberger Rohstein ausgezogene und wiederholt mit Magnet gereinigte metallische Eisen ergibt in der Tat nur Spuren von *Kupfer* (siehe S. 23). Daraus folgt, daß das in der gegenseitigen Metall : Sulfid-Lösung stattfindende Gleichgewicht



bei ganz überwiegend Cu_2S , Fe und nur wenig FeS, Cu_2 liegt.

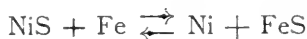
Auch in die Nickel-Eisen-Legierungen Nr. 4 b' und Nr. 5 b' geht nur relativ wenig Kupfer hinein. Das Gleichgewicht



liegt somit bei sehr viel Cu_2S , Ni neben relativ wenig NiS, Cu_2 .

Wir haben schon oben (S. 23) erwähnt, daß das *Silber* hauptsächlich oder beinahe ausschließlich als Sulfid gebunden wird, und nichts oder nur eine Spur davon geht in das ausgeschiedene Eisenmetall hinein. Hiermit stimmen übrigens nicht die Analysen Nr. 2 a und Nr. 2 b.

Nickel plus Kobalt wird in der hinauskristallisierten Eisen-Nickel-Legierung angereichert. Das Gleichgewicht



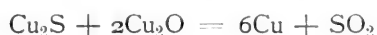
liegt etwas näher der Ni, FeS-Seite als der NiS, Fe-Seite.

Namentlich aus den Analysen Nr. 2 und 3 folgt, daß *Kobalt* ziemlich stark in dem ausgeschiedenen Eisen angereichert wird. Hiermit stimmt eine alte von schwedischen und norwegischen Kupferwerken, wo Kupfererz mit einem geringen Kobaltgehalt geschmolzen wurde, stammende Erfahrung, nämlich daß die »eisernen Säue« durch eine relative hohe Kobaltmenge gekennzeichnet werden.

Auch wird ein eventuell vorhandener kleiner Gehalt von *Molybdän* in dem Kupfererz sehr stark in den »eisernen Säuen« angereichert.

Im Gegensatz zu der anfänglich aufgelösten und später *auskristallisierten* Eisen- oder Nickel-Eisen-Legierung, die nur einen geringen Kupfergehalt enthält, steht die *Bildung durch Sekundärvorgänge von metallischem Kupfer*.

An Sprüngen und an der Oberfläche, wie auch in Gasblasen oder Poren von Kupfersteinen, die aus viel Cu_2S neben etwas FeS bestehen, beobachtet man überaus häufig, öfters sogar 1 bis 2 oder 3 cm. lange, kanellierte Drähtchen von metallischem Kupfer. Dieselben sind, wie es schon von E. B. MÜNSTER (l. c.) längst nachgewiesen wurde, durch den Prozeß



entstanden.¹

Außerdem findet man in Kupfersteinen, mit niedrigeren Gehalten von Cu_2S und höheren Gehalten von FeS , metallisches Kupfer inmitten des Steins, und zwar unabhängig von Sprüngen, Gasblasen usw. Hier ist eine Reaktionsbildung von $\text{Cu}_2\text{S} + 2\text{Cu}_2\text{O}$ ausgeschlossen. Einige frühere Forscher haben auf die Reaktion



hingewiesen. Hierdurch kann man jedoch die hier besprochene Entstehung von gediegenem Kupfer nicht erklären, indem das Gleichgewicht, wie oben (S. 26) erörtert, in der nächsten Nähe der linken Seite (Cu_2S , Fe) liegt.

RÖNTGEN (1906, l. c.) und BORNEMANN & SCHREYER (1909, l. c.) meinen, die sekundäre Entstehung von Kupfer — bei relativ niedriger Temperatur und bei der Gegenwart von ziemlich viel FeS — durch die Gleichung



zu deuten. In der Tat findet diese Auffassung eine Stütze in dem seit ein paar Jahren an dem Geophysischen Laboratorium zu Washington gelieferten Nachweis über die Löslichkeit von etwas FeS_2 in FeS .

¹ Siehe einige Bemerkungen von mir in Zeitschr. f. prakt. Geol. 1890, S. 113—114.

Über die Löslichkeit von Fe_3O_4 in Sulfidschmelzen.

Bei der Untersuchung u. d. M.M. (mit starker Vergrößerung, wie 375 oder 750) einer Reihe von Polierschliffen von Kupfersteinen usw. wurde meine Aufmerksamkeit auf ein in sehr spärlicher Menge vorhandenes Mineral gelenkt, das auf Grundlage der folgenden Kriterien als Magnetit bestimmt wurde:

1. Es erscheint in kleinen Oktaëdern, bzw. oktaëdrischen Skeletten¹.
2. Es ist stark magnetisch.
3. Es ist (in isoliertem Pulver) schwarz und undurchsichtig.
4. Es zeigt u. d. M.M. denselben Glanz wie Magnetit in Gesteinen und Schlacken.
5. Ein durch Magnet (nämlich einen schwachen Elektromagnet) aus einem feingeriebenen Kupfer-Bessemerstein von Röros ausgezogenes Pulver, das nach langdauernder magnetischer Reinigung übrigens noch durch beigemengtes Kupferstein-Pulver verunreinigt war, wurde eine kurze Zeit mit verdünnter, heißer Salzsäure behandelt; hierdurch löste sich unser Mineral ohne Entwicklung von Schwefelwasserstoff (indem das Sulfid-Pulver ungelöst blieb), und die Lösung ergab Reaktion sowohl auf Eisen-Oxydul wie auf -Oxyd, dagegen nicht auf Kupfer.

Es handelt sich somit um ein oktaëdrisches, stark magnetisches, aus FeO und Fe_2O_3 bestehendes Mineral, dessen Farbe (und Glanz) identisch mit derjenigen von Magnetit ist. Dies genügt, um das Mineral als Magnetit zu bestimmen. — Außerdem erwähnen wir, daß unser Mineral in den Polierschliffen sich als ein wenig härter als die umgebenden Sulfid-mineralien erweist.²

Zu einer etwas eingehenderen Untersuchung, u. a. um die Magnetit-Menge quantitativ zu bestimmen, wurde ein Kupfer-Bessemerstein (ohne sekundäre Ausscheidung von metallischem Kupfer³) von Röros gewählt. Diese Bessemersteine bestehen analytisch aus ganz überwiegend Cu_2S , dabei ein wenig FeS (in etwas wechselnder Menge, gern zwischen ca. 1 und ca. 6 0/0 FeS), ca. 0.4 0/0 $\text{Ni}+\text{Co}$, entsprechend ca. 0.6 0/0 $\text{NiS}+\text{CoS}$, 0.00—0.02 0/0 PbS und Null oder nicht bestimmbare Spuren von Zink. — Der für die Untersuchung gewählte Kupfer-Bessemerstein (cfr. Fig. 11) enthielt (siehe unten) 3.30 0/0 Fe , davon nur 0.26 0/0 in Fe_3O_4 hineingehend; macht 0.36 0/0 Fe_3O_4 . Der Rest von Fe erscheint als FeS (hauptsächlich in das Cu_2S -Mineral hineingehend).

¹ Entweder in regulären Oktaëdern oder in Pyramiden mit Winkeln so nahe dem Oktaëder, daß ein Unterschied, unter dem Mikroskop, bei isolierten, parallel einer 111-Fläche liegenden Krystallen sich nicht nachweisen läßt.

² Dies zeigt sich dadurch, daß das Mineral eine minimale Erhöhung an der Schliff-fläche bildet.

³ Metallisches Eisen fehlt in diesen an Cu_2S sehr reichen Bessemersteinen vollständig.

Die Zusammensetzung des ganzen Kupfersteins ist somit:

Analyse Nr. 6.

Cu_2S	ca. 94	$\frac{0}{100}$
FeS	4.78	"
Fe_3O_4	0.36	"
NiS, CoS	ca. 0.6	"

U. d. M.M. beobachtet man bei starker Vergrößerung (wie 375 oder 750) drei Bestandteile, nämlich:

- in ganz geringer Menge die hier besprochenen Magnetit-Oktaëder (siehe Fig. 11), in winzig kleinen, bis 0.01—0.02 mm. großen Individuen;
- ebenfalls in ganz geringer Menge, wie höchstens 0.5 $\frac{0}{100}$ (und nach Ermessen nur 0.2—0.3), ein Mineral mit dem charakteristischen Aussehen wie FeS (siehe S. 20);
- ganz überwiegend ein graublaues Mineral, das durch Cu_2S gekennzeichnet wird. Dasselbe besteht aus Cu_2S nebst ein wenig FeS in fester Lösung.

Eine feingeriebene Probe (Einwäge 45.965 gr.) dieses Steines wurde mit Magnet (Elektromagnet) behandelt, und das ausgezogene Pulver lange Zeit wiederholt mit Magnet gereinigt. Es resultierten drei Produkte: a) Ein nicht magnetischer Teil, 93.75 $\frac{0}{100}$ betragend; derselbe wurde lange Zeit mit einem starken Magnet behandelt, um sämtliche sowohl stark wie schwach magnetische Teile ausziehen. b) Ein Zwischenprodukt, 6.05 $\frac{0}{100}$ betragend; dies wurde lange Zeit mit einem schwachen Magnet behandelt. c) Ein Endprodukt, 0.205 $\frac{0}{100}$ betragend, mit Anreicherung der magnetischen Bestandteile. Die Menge des letzteren Teils betrug nur 0.094 gr.; infolge der kleinen Einwäge wurde die quantitative Analyse nicht ganz genau.

Das Resultat war, zufolge Analyse von TH. FALCK MUUS, Assistent für chemische Analyse am hiesigen Laboratorium:

	$\frac{0}{100}$ Fe	$\frac{0}{100}$ Cu	$\frac{0}{100}$ S
Nr. 6 a (nicht magnetisch, 93.75 $\frac{0}{100}$)	3.04	75.5 ¹	20.8 ¹
Nr. 6 b („Zwischenprodukt“, 6.05 $\frac{0}{100}$)	6.31	71.39	19.64
Nr. 6 c („Endprodukt“, 0.20 $\frac{0}{100}$)	19.3	46.2	14.8

Die hohen Cu- und S-Gehalte in Nr. 6 c zeigen, daß es bei weitem nicht gelang, ein reines magnetisches Endprodukt darzustellen. Dies beruht auf den winzigen Dimensionen der Magnetit-Individuen und weiter auf der intimen Zusammenwachsung von Magnetit und Kupfersulfür, mit Einschlüssen des letzteren innerhalb der z. T. skelettförmig aufgebauten Magnetitkrystalle (cfr. Fig. 7—9).

Nr. 6 a. Die Untersuchung u. d. M.M. ergibt höchstens 0.5 $\frac{0}{100}$ (wahrscheinlich nur 0.2—0.3 $\frac{0}{100}$) FeS, das vollständig oder jedenfalls beinahe vollständig ausgezogen wurde. Die analytisch festgestellte Menge 4.8 $\frac{0}{100}$ FeS (= 3.04 $\frac{0}{100}$ Fe) steckt somit — vielleicht jedoch nach Abzug von etwa 0.1 $\frac{0}{100}$ — in dem ausgeschiedenen, einheitlichen Kupfersulfür-Mineral. Bei der Auskrystallisation des regulären Cu_2S -Minerals mag somit jedenfalls ca. 4.7 $\frac{0}{100}$ FeS in fester Lösung in das Mineral hineingehen, — und soviel FeS mag auch bei der späteren Umbildung des Cu_2S -Minerals in der rhombischen Modifikation stecken bleiben.

Nr. 6 b; sehr unreines „Zwischenprodukt“, mit etwas Fe_3O_4 und etwas FeS. 71.39 $\frac{0}{100}$ Cu verlangt für Cu_2S 17.96 $\frac{0}{100}$ S; Rest 1.38 $\frac{0}{100}$ S, entsprechend 2.41 $\frac{0}{100}$ Fe für FeS; Rest 3.90 $\frac{0}{100}$ Fe, entsprechend 1.46 $\frac{0}{100}$ O für Fe_3O_4 ; gibt 5.36 $\frac{0}{100}$ Fe_3O_4 . Bei dieser Berechnung summieren sich die Analysenfehler.

Nr. 6 c; sehr unreines „Endprodukt“, mit erheblicher Zunahme von Fe und erheblicher Abnahme von S (dabei auch von Cu). Dies ergibt eine bedeutende Anreicherung von einer oxydischen Eisenverbindung. 46.2 $\frac{0}{100}$ Cu verlangt für Cu_2S 11.62 $\frac{0}{100}$ S; Rest 3.18 $\frac{0}{100}$ S, entsprechend 5.55 $\frac{0}{100}$ Fe für FeS; Summe 8.73 $\frac{0}{100}$ FeS; Rest 13.79 $\frac{0}{100}$ Fe, entsprechend 5.25 $\frac{0}{100}$ O für Fe_3O_4 ; gibt 19.04 $\frac{0}{100}$ Fe_3O_4 . — Außer Magnetit wurde somit auch etwas freies FeS in diesem magnetischen Endprodukt angereichert.

¹ Diese zwei Angaben sind, ausgehend von der Zusammensetzung Cu_2S nebst 4.8 $\frac{0}{100}$ FeS (und ganz wenig NiS), berechnet worden.

Von der Gesamtmenge, 3,30 % Fe in dem ganzen Gestein, erscheint somit (in Nr. 6 b und 6 c) nur 0,26 % Fe als Fe_3O_4 , entsprechend 0,36 % Fe_3O_4 . — Die Menge von freiem FeS läßt sich nicht ganz genau bestimmen; es handelt sich um etwa 0,3 %.

U. d. M.M. habe ich Magnetit in einer ganzen Reihe von Kupfer-Bessemersteinen (mit ca. 73—79 % Kupfer) von Röros und Birtavarre nachgewiesen, freilich durchgängig nur in ganz geringer Menge, nämlich ungefähr wie in dem oben besprochenen Bessemerstein (somit ca. $\frac{1}{3}$ %). Dabei in mehreren Kupfersteinen mit ungefähr 60 % Kupfer, aus Flammöfen wie auch Schachtföfen, außerdem in einigen Kupfer-Rohsteinen mit nur 30—35 % Kupfer. In den letzteren steigt die Magnetitmenge jedenfalls gelegentlich bis ca. 3 %.¹

In sämtlichen Kupfersteinen, wo ich Magnetit gefunden habe, fehlt auskrystallisiertes metallisches Eisen gänzlich². Andererseits habe ich u. d. M.M. in den ziemlich vielen von mir untersuchten Polierschliffen von Kupfersteinen, die metallisches Eisen (oder Nickel-Eisen) führen, vergebens nach Magnetit gesucht. Beispielsweise erwähne ich einige Kupfer-Rohsteine aus dem Schachtofenschmelzen zu Röros, mit ungefähr demselben Kupferprozent (ca. 30 %): in einem Stein (Fig. 10) ohne metallisches Eisen beträgt die Magnetitmenge rund 3 %; in einer Reihe anderer Steine mit einigen Prozenten metallisches Eisen habe ich dagegen wiederholt, aber jedesmal vergebens nach Magnetit gesucht.

In dieser Verbindung mache ich darauf aufmerksam, daß E. B. MÜNSTER bei seiner sehr sorgfältigen Untersuchung über die Konstitution der Steine — freilich zu einer Zeit (1876) vor der Anwendung des Metall-Mikroskops — bei dem Ausziehen mit Magnet nirgends Magnetit zusammen mit metallischem Eisen fand. Andererseits beschrieb er einige Steine ohne metallisches Eisen, aber trotzdem mit einem ganz bemerkenswerten Paramagnetismus, und er meinte, ohne es freilich feststellen zu können, daß hier eine magnetische Verbindung von Eisenoxydul und Eisenoxd vorliegen müßte.

Aus den obigen Beobachtungen halte ich es für berechtigt, den Schluß zu ziehen, daß *Fe und Fe_3O_4 als Lösungskomponenten in geschmolzenem Sulfid nicht nebeneinander bestandfähig sind*, oder jedenfalls, daß Fe_3O_4 nicht in geschmolzenem Sulfid mit einer nennenswerten Menge von aufgelöstem Eisen bestandfähig ist. Dies mag dadurch erklärt werden, daß Fe und Fe_3O_4 aufeinander einwirken, unter Bildung von FeO; der letztere wird im allgemeinen gleich in die Schlacke übergeführt werden.

¹ Auch in mehreren dieser zuletzt erwähnten Steine wurde der Magnetit mit Magnet ausgezogen, — das Vorhandensein von FeO und Fe_2O_3 festgestellt, — und die Menge des Minerals approximativ nach der Quantität des magnetischen Teils bestimmt.

² Dies läßt sich leicht feststellen, — teils durch das Ausziehen mit Magnet, und teils dadurch, daß das auskrystallisierte Eisen in Polierschliffen u. d. M.M. sich sehr markiert kundgibt.

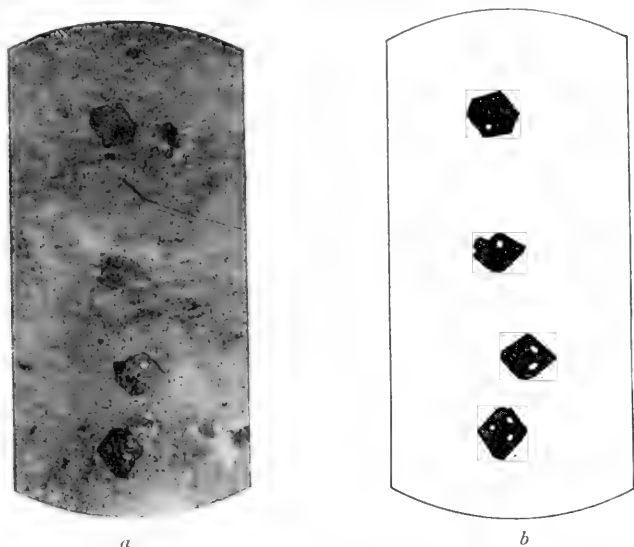


Fig. 7. Vergrößerung 500:1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.).
a Magnetit in Spurstein (mit ca. 63 % Cu) von Oker am Harz.
b gibt eine Handzeichnung der vier Magnetit-Individuen von *a*.

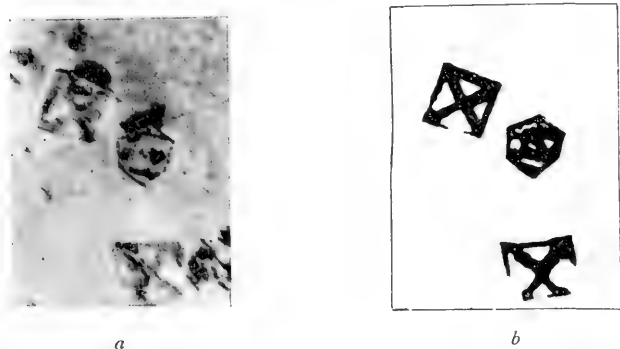


Fig. 8. Vergrößerung 500:1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.).
a Magnetit in Spurstein (mit ca. 63 % Cu) von Oker am Harz;
 von einer anderen Polierfläche wie Fig. 7.
b gibt eine Handzeichnung der drei Magnetit-Individuen von *a*.



Fig. 9. Vergrößerung 1000:1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.).
 Oktaëdrische Skelette und beinahe fertig entwickelte Oktaëder von Magnetit in Spurstein (mit ca. 63 % Cu) von Oker (cfr. Fig. 7 *a* und 8 *a*). Bei 750-facher Vergrößerung u. d. M.M. gezeichnet.

Der Magnetit in unseren Steinen erscheint teils in oktaëdrischen Skeletten und teils in vollständig oder beinahe vollständig entwickelten Oktaëdern. Ich verweise in dieser Hinsicht auf die nebenstehenden Photographien, Fig. 7—8 und 10—11, sowie auf Fig. 9, wo ich einige Individuen so naturgetreu wie möglich kopiert habe. Andere Flächen als (111) habe ich nirgends beobachtet.

Die Magnetit-Krystalle liegen bald in dem Kupferglanz (Cu_2S mit ein wenig FeS in fester Lösung) und bald — was die kupferärmeren Steine anlangt — in den Doppelverbindungsmineralien $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n \text{FeS}$ (wo n jedenfalls zwei verschiedene Werte haben mag) eingebettet.

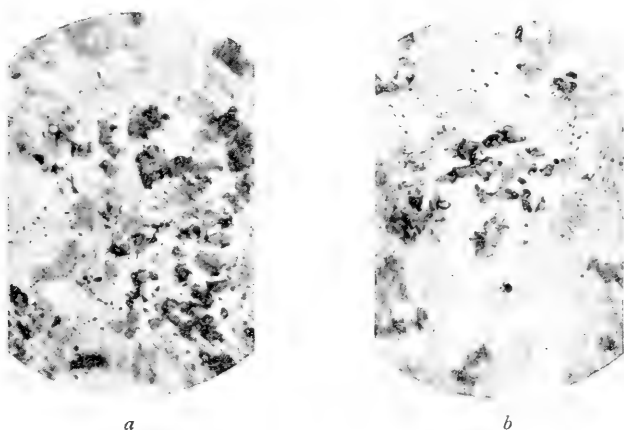


Fig. 10. Vergrößerung 400 : 1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.).
Magnetit in Kupfer-Rohstein (mit ca. 30 % Cu) von Rösros.

Überaus häufig begegnet man lokalen Anhäufungen des Magnetits (siehe z. B. Fig. 11). So gibt es in den Polierschliffen von Kupfersteinen mit ca. $\frac{1}{3}$ bis ca. 1 % Magnetit viele Lichtfelder, wo man bei 375-facher Vergrößerung kein einziges Magnetit-Individuum wahrnehmen kann. In benachbarten Lichtfeldern mag man dagegen bisweilen zehn, zwanzig und ausnahmsweise sogar noch mehrere Magnetit-Individuen zählen. Dies ergibt eine Zusammenschwemmung der Magnetit-Individuen, während das Sulfid sich noch in der flüssigen Phase befand. — Die idiomorphe Kontur der Magnetit-Individuen, die nach außen zu stellenweise von scharfen Oktaëderflächen begrenzt sind, ergibt ebenfalls eine frühzeitige Krystallisation.

Dies bedeutet, daß die eutektische Grenze zwischen Magnetit und den Sulfiden (Cu_2S , $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n \text{FeS}$ und FeS) bei ganz wenig, nämlich bei einem kleinen Bruchteil von einem Prozent Magnetit gegen beinahe 100 Prozent Sulfid liegen muß.

Nehmen wir als Beispiel den Kupfer-Bessemerstein von Röros (mit ca. $\frac{1}{3}\%$ Magnetit), so erscheint der Magnetit — trotz seiner geringen Menge — in z. T. beinahe vollständig entwickelten und lokal angehäuften kleinen Oktaëdern; die eutektische Grenze muß somit hier bei einem kleinen Bruchteil von $\frac{1}{3}\%$ Magnetit, wie etwa 0.05% Magnetit gegen 99.95% Sulfid liegen.

In den an Magnetit etwas reicheren — und an Kupfer etwas ärmeren — Kupfersteinen, mit $1-3\%$ Magnetit (wie in einigen Steinen mit ca. 30 bis ca. 60 $\%$ Cu) mag die eutektische Grenze höchstens $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}\%$ Magnetit enthalten.

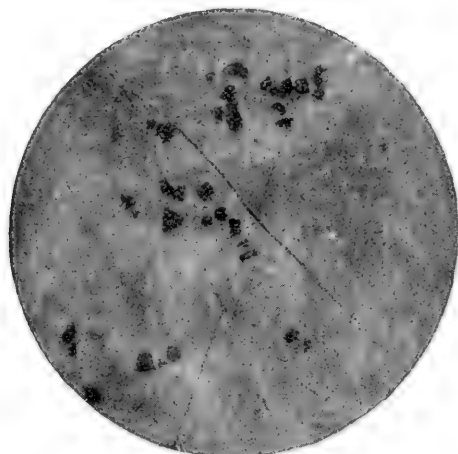


Fig. 11. Vergrößerung 400 : 1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.). Kleine Magnetit-Oktaëder in Bessemerstein (Analyse Nr. 6) von Röros, lokal zusammengehäuft. Innerhalb vieler Lichtfelder desselben Polierschliffes fehlt Magnetit vollständig.

Bei den gerade besprochenen Kupfer-Bessemersteinen (aus $94-97\%$ Cu_2S , $2-5\%$ FeS und ca. $\frac{1}{3}\%$ Fe_3O_4 bestehend) würde — falls Fe_3O_4 nicht vorhanden wäre — zufolge der Schmelzkurve (Fig. 5) von BORNEMANN & SCHREYER ein Mischkristall Cu_2S nebst ein wenig FeS ziemlich genau bei 1100° (oder 1105°) krystallisieren. Die von Fe_3O_4 bewirkte Schmelzpunkt-Erniedrigung an der eutektischen Grenze (etwa 0.05% Fe_3O_4 : 99.95% Sulfid) ist so winzig, daß sie tatsächlich außer Betracht gesetzt werden kann; d. h. das Eutektikum liegt ziemlich genau bei 1100° .

Die Kupfer-Bessemersteine werden durch Einblasen von gepreßter Luft durch Sulfidschmelzen erzeugt. Hierdurch entsteht eine intensive Oxydation, indem FeS hauptsächlich FeO , dabei aber auch mehrere Prozent Fe_2O_3 liefert. Ich habe eine ganze Anzahl von diesem Prozeß herstammenden Bessemerschlacken (mit ca. 20% SiO_2 , cfr. die Analysen Nr. 11—12)

mikroskopisch untersucht und überall mehrere, gern 5—10 % Magnetit in den Schlacken gefunden. — FeO und Fe_2O_3 entstehen innerhalb der Sulfidschmelzen; wenn dieselben trotzdem (bei Temperatur von 1350—1400°) nur ganz geringe Mengen von Fe_3O_4 enthalten, mag dies durch eine ziemlich niedrige Löslichkeit von Fe_3O_4 in einer überwiegend aus Cu_2S bestehenden Sulfidschmelze erklärt werden.

Bei dem Bessemerblasen (im basischen Konverter) bildet sich oftmals am Boden des Ofens eine dicke Kruste von Magnetit, der in sogar bis 2 oder 3 cm. (nicht mm.) großen Krystallen erscheint (siehe Fig. 12). Dies

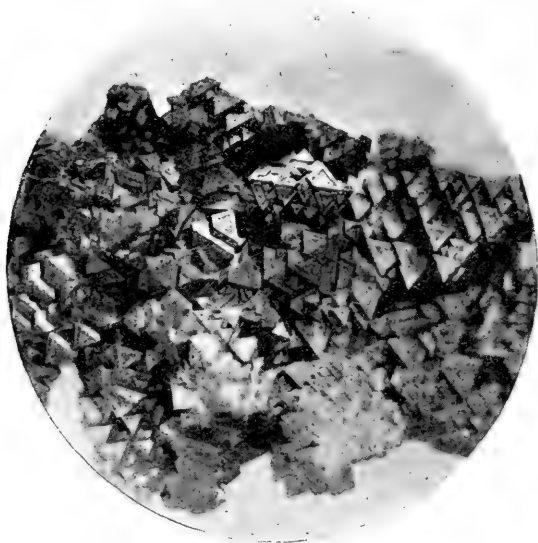


Fig. 12. Große Magnetit-Krystalle, in natürlicher Größe, am Boden eines Bessemer-Konverters (zu Ringerike) abgesetzt.

gibt ebenfalls kund, daß die Löslichkeit von Fe_3O_5 in einer aus überwiegend Cu_2S (oder Cu_2S und NiS) bestehenden Schmelze, bei Temperatur von ca. 1350—1400°, ziemlich gering sein muß. Wäre die Löslichkeit bedeutend, würde sich nämlich die Magnetit-Kruste nicht gebildet haben, oder eine entstandene Kruste müßte späterhin von dem geschmolzenen Sulfid aufgelöst worden sein.

Wir erhalten hierdurch eine approximative Angabe über die Löslichkeit von Fe_3O_4 in geschmolzenem Cu_2S (oder Cu_2S mit NiS und einigen Prozent FeS):

bei 1100° (am Eutektikum) nur etwa 0.05 %;

bei ca. 1350—1400° ziemlich wenig, nämlich nur ca. $\frac{1}{3}$ % oder vielleicht ein wenig darüber.

In den an Cu_2S ärmeren und andererseits an FeS reicheren Kupfersteinen (mit 80—40 % Cu_2S und 20—60 % FeS) begegnen wir etwas mehr Fe_3O_4 , aber jedoch, zufolge meiner Untersuchungen, nur in ziemlich bescheidener Menge, wie 1, 2 oder höchstens etwa 3 %. — Bei dem oxydierenden Schmelzen von Kupfersteinen in Flammöfen bilden sich oftmals erhebliche Mengen nicht nur von FeO , sondern auch von Fe_2O_3 . Dies gibt sich dadurch kund, daß die Schlacken von solchen Schmelzprozessen zufolge meiner Untersuchungen häufig eine bedeutende Menge, sogar 20, 30 oder 40 % Magnetit enthalten. Die Quantität dieser Schlacken ist oftmals ziemlich untergeordnet, verglichen mit der Quantität der resultierenden Kupfersteine; trotzdem enthalten diese letzteren durchgängig nur ziemlich wenig Magnetit, was sich nur durch eine ziemlich begrenzte Löslichkeit von Fe_3O_4 in den aus FeS und mehr oder weniger Cu_2S bestehenden Schmelzen erklären läßt¹.

Die Menge des Magnetits ist im allgemeinen etwas größer in den FeS -reichen Sulfidgemischen (mit nur ca. 40 % Cu_2S), wie in den beinahe nur aus Cu_2S bestehenden Sulfidschmelzen. Aus der obigen Erörterung folgt, daß dies darauf beruht, daß die Löslichkeit von Fe_3O_4 bei ein und derselben Temperatur (1300° oder etwas darüber) mit zunehmender FeS -Menge steigt.

Wir stellen die Resultate zusammen:

- a) Das Eutektikum (oder die eutektische Grenze) zwischen Fe_3O_4 und Sulfid (FeS und Cu_2S in wechselndem Verhältnis) liegt bei einem Bruchteil von einem Prozent Fe_3O_4 gegen mindestens 99 % Sulfid, — zwischen Fe_3O_4 und Cu_2S gar bei nur etwa 0.05 % Fe_3O_4 : 99.95 % Cu_2S .
- b) Bei etwas höherer Temperatur steigt die Löslichkeit von Fe_3O_4 in geschmolzenem Sulfid, jedoch nicht sehr erheblich.

Wir beleuchten dies durch die linke Seite der beistehenden Fig. 13; über das System Sulfid (indem ich nur FeS berücksichtige) und Fe_3O_4 (mit Schmelzpunkt 1527°). Fig. 13 b gibt in vergrößertem Maßstabe die linke Seite von Fig. 13 a an. — Die rechte Seite von Fig. 13 a habe ich auf Grundlage theoretischer Erörterung gezogen. — Die Schmelzkurven habe ich nur bis zu dem Schmelzpunkt von Magnetit voll ausgezogen, bei noch höherer Temperatur liegen zwei flüssige Phasen vor.

¹ Die Kupfersteine der Technik werden an zahlreichen Kupferwerken ringsherum auf der Erde täglich analysiert. Könnten die Sulfide erhebliche Mengen von Fe_3O_4 auflösen, oder gäbe es eine vollständige gegenseitige Löslichkeit von Fe_3O_4 und Sulfid, so müßte dies schon längst nachgewiesen worden sein.

Die hier besprochene geringe Löslichkeit von Fe_3O_4 in geschmolzenem Sulfid, bei dem Drucke von einer Atmosphäre, stimmt mit der petrographischen Erfahrung über die *frühzeitige Krystallisation von Magnetit* (nebst Ilmenit) aus *Magnetkies- und Schwefelkies-Magma* an den sulfidischen Erzaussonderungen. Ich verweise insofern auf einen besonderen Abschnitt in Bd. II.

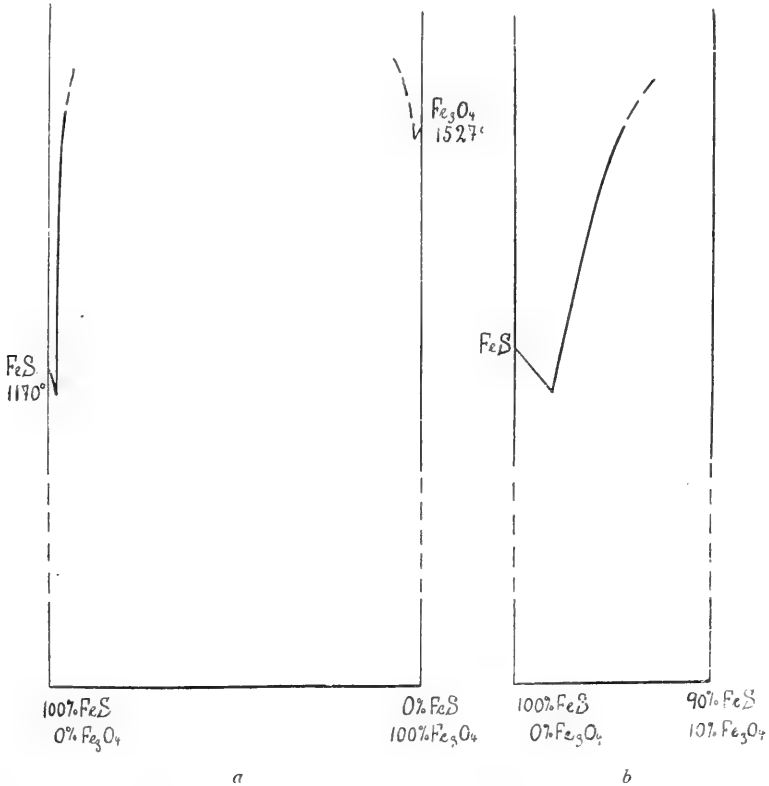


Fig. 13. Binäres System $\text{FeS}:\text{Fe}_3\text{O}_4$.

Über die fehlende oder minimale Löslichkeit von Silikat in (Schwermetall-) Sulfidschmelzen.

Die beim Schmelzen unter der Gegenwart von mehr oder weniger Silikat (Schlacke) entstandenen, aus FeS , NiS , PbS , Cu_2S usw. bestehenden Steine ergeben bei der chemischen Analyse häufig 0.25—0.5, gelegentlich gar ungefähr 1 % Silikat. Dies mag jedoch zu einem wesentlichen Teil aus mechanisch beigemengter Schlacke — in winzigen Streifen — herrühren¹.

¹ Zum Vergleich lenke ich die Aufmerksamkeit auf folgendes:

1. Die Rohschlacken usw. enthalten, wie wir in einem unten folgenden Abschnitte erörtern werden, im allgemeinen einige mechanisch mitgerissene Steinpartikelchen.
2. Selbst im Flußeisen (mit einem viel höheren sp. Gew. wie unsere Sulfidsteine) erscheinen bisweilen — obwohl ziemlich selten — besondere winzige Streifen von Schlacke.

Bei dem Studium u. d. M.M. habe ich, wie gerade erwähnt, in zahlreichen Steinen etwas Magnetit gefunden, und dieses Mineral gibt sich leicht kund, selbst wenn die Menge desselben nur $\frac{1}{3}\%$ beträgt. *Nie aber habe ich aus der Sulfidschmelze auskrystallisiertes Silikatmineral wahrgenommen*¹.

Hieraus darf man freilich nicht den Schluß ziehen, daß Silikat in den aus FeS, Cu₂S usw. bestehenden Sulfidschmelzen, bei einer Temperatur von 1300 oder 1400°, absolut unlöslich wäre, — sondern nur, daß eventuell anfänglich aufgelöstes und später hinauskrySTALLisiertes Silikat nur einen winzigen Betrag, wie höchstens etwa 0.1 %, erreichen mag. Dabei ist es nicht ausgeschlossen, daß eine winzige Menge Silikat bei der Erstarrung des Sulfids in fester Lösung in das Sulfid hineingehen könnte.

Wegen der Löslichkeit von etwas FeS in geschmolzenem Silikat darf man voraussetzen, daß umgekehrt auch Silikat in geschmolzenem FeS, freilich nur in winziger Menge, löslich sein mag.

In flüssigem Eisen, Kupfer, Silber, Zink, Blei usw. ist Silikat bekanntlich absolut unlöslich, — oder die Löslichkeit ist so gering, wie höchstens etwa 0.001 %, daß sie sich einer Bestimmung bei Benutzung der bisherigen Untersuchungsmethoden entzogen hat.

¹ Mein Ziel bei dem Studium u. d. M.M. einer Reihe von Steinen war anfänglich, dieselben auf auskrystallisiertes Silikat zu untersuchen. Ein solches habe ich aber, trotz sorgfältiger Untersuchung, nirgends beobachtet. Stattdessen fand ich ein wenig Magnetit.

II.

DIE SULFID : SILIKAT-SCHMELZEN.

Über die begrenzte gegenseitige Löslichkeit von FeS , bzw. $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$ und FeO -, bzw. $\text{FeO} + \text{ZnO}$ -reichen Silikatschmelzen.

Beim Schmelzen an Kupferwerken, Nickelwerken, Bleiwerken usw. auf sogenanntem Stein, σ : Sulfidprodukt (Gemisch von FeS , NiS , CoS , PbS , Cu_2S , Ag_2S usw.) erhält man bekanntlich *zwei flüssige Phasen*, nämlich einerseits die *geschmolzene Schlacke* und andererseits den *geschmolzenen Stein*.

Aus dieser uralten Erfahrung haben zahlreiche Hüttenleute und Geologen den Schluß gezogen, daß Sulfid und Silikat gänzlich ineinander unlöslich sein sollten. Dieser Schluß ist aber nicht zutreffend. Es handelt sich nämlich nicht um eine absolute Unlöslichkeit, sondern vielmehr um eine *begrenzte Löslichkeit* von Schwermetall-Sulfid¹ — oder jedenfalls von gewissen Sulfiden — in Silikat².

Bei den Schlacken von Steinschmelzen muß man scharf zwischen a) den mechanisch mitgerissenen Steinkügelchen und b) dem anfänglich aufgelösten und später [ausgeschiedenen Sulfid (RS , wo R hauptsächlich = Fe , eventuell Zn und Fe) unterscheiden.

Wir beleuchten dies durch ein Beispiel, das ich dem Rohschmelzen von Röros Kupferwerk entnehme. — Bei gleichzeitig gefallenem Stein und Schlacke enthielt der Stein 33.82 % Cu und ziemlich genau 25 % S , und die Schlacke 0.62 % Cu und 1.63 % S .

Die Zusammensetzung der beiden Produkte betrug:

¹ Wie wir im nächsten Abschnitt besprechen werden, gibt es zwischen CaS (und MnS) und basischen CaO - (bzw. MnO -) reichen Silikaten sogar eine *unbegrenzte gegenseitige Löslichkeit*.

² Ich verweise insofern auf meine frühere Arbeiten: Studier over Slagger, 1884. — Beiträge zur Kenntnis der Gesetze der Mineralbildung in Schmelzmassen, 1892, Abschnitt über Monosulfide, S. 239–263 (Sonderabdruck aus Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, B. 14, 1890).

³ Nur bei sehr schneller Abkühlung bleibt das aufgelöste Eisensulfid in fester Lösung in dem Glase stecken.

Rohstein.		Schlacke (Rohschlacke).	
Analyse Nr. 7.		Analyse Nr. 8.	
Cu	33.82 %	SiO ₂	26–33 % (durchschnittlich ca. 31 %)
Fe	ca. 40 "	Al ₂ O ₃	6–9 "
Zn	" 0.25 "	Fe ₂ O ₃	0.5–1 " (bisweilen etwas mehr)
Pb	" 0.2 "	FeO	46–53 "
Ni, Co	" 0.2 "	CaO	1–3 "
S	25 "	MgO	2–4 "
unaufgelöst	" 0.5 "	ZnO	1–3 "
		NiO, CoO	ca. 0.1 "
		Cu	0.62 "
		S	1.63 "

Die Schlacke schwankt innerhalb der Grenzen, hinunter zu ca 26 % und hinauf zu ca. 33 % SiO₂. — Der ZnO-Gehalt der Schlacken ist bisweilen etwas höher als 3 %.

Wie wir in einem folgenden Abschnitt erörtern werden, stammt der Kupfergehalt in Schlacken wie denjenigen von Röros entweder ausschließlich oder beinahe ausschließlich von mechanisch mitgerissenen Steinkügelchen. Bei meinen Untersuchungen habe ich in den hier besprochenen Schlacken keine Spur weder von anfänglich aufgelöstem Cu₂S noch von Kupferoxyd (oder Oxydul) in Silikatverbindung nachweisen können (siehe hierüber unten). Eine minimale Menge, wie etwa 0.02–0.05 % Cu, besonders als aufgelöstes Cu₂S, mag jedoch nicht ausgeschlossen sein, selbst wenn ich eine solche Verbindungsform als unwahrscheinlich betrachte.

Unter der Voraussetzung, daß der totale Kupfergehalt der hier als Beispiel gewählten Schlacke Nr. 8 (mit 0.62 % Cu und 1.63 % S) aus Steinpartikelchen (mit 33.82 % Cu und 25 % S) herrührt, enthält die Schlacke die folgende S-Menge in den beigemengten Steinpartikelchen:

$$33.82 \% \text{ Cu} : 25 \% \text{ S} = 0.62 \% \text{ Cu} : x \% \text{ S, somit } 0.46 \% \text{ S.}$$

Die analytisch gefundene S-Menge der Schlacke beträgt 1.63 %; es bleibt somit ein »Überschuß« von 1.17 % S, der in anfänglich gelöstem (und bei nicht allzu schneller Abkühlung, später auskristallisiertem) Sulfid, FeS, hineingeht; gibt 3.22 % FeS.

Falls ein ganz geringer Bruchteil der totalen Kupfermenge (0.62 % Cu), wie z. B. 0.02 oder 0.05 % Cu, der betreffenden Schlacke als Oxyd (in Silikatverbindung) vorliegen sollte, würde dies den berechneten »Überschuß« von Schwefel mit einer Winzigkeit (0.015 oder 0.037 % S), also von 1.17 zu ca. 1.19 oder 1.21 % erhöhen. — Und falls ein ganz geringer Teil der totalen Kupfermenge der Schlacke als anfänglich aufgelöstes und

später auskrystallisiertes Kupfersulfid, Cu_2S , vorliegen sollte, würde dies ebenfalls den berechneten »Überschuß« von S und damit auch die berechnete Menge von aufgelöstem FeS ein klein wenig erhöhen.

Wie ich schon seit Jahren (1884, 1892) durch chemische und mineralogische (mikroskopische) Untersuchungen nachgewiesen habe, und wie wir unten eingehender erörtern werden, bildet der Schwefel-»Überschuß« ein Sulfid-Mineral, RS , und zwar handelt es sich in basischen Schlacken mit überwiegend FeO (neben etwas CaO , MgO usw. und nur wenig ZnO) um FeS . In zinkreichen Schlacken besteht dagegen das Sulfid aus $(\text{Zn}, \text{r})\text{S}$, wo r hauptsächlich = Fe .

Die Schlacken von Steinschmelzen führen erfahrungsmäßig¹ desto mehr RS ,

- a) je höher die im Ofen (oder im Schmelzraum des Ofens) herrschende Temperatur ist,
- b) je mehr basisch die Schlacke ist,
- c) dabei scheint ein erheblicher Zinkgehalt der Schlacke die aufgelöste RS -Menge zu erhöhen.

Um die Quantität des in den FeO -reichen (und ZnO -armen) Schlacken von Steinschmelzprozessen anfänglich aufgelösten Eisensulfids näher zu bestimmen, ergänze ich meine früheren Darstellungen mit einigen neueren Untersuchungen.

Zufolge freundlicher Mitteilung von dem Hüttendirektor an dem Röros Kupferwerk, Herrn Dr. ing. HARALD PEDERSEN, der — außer den üblichen Cu -Analysen in dem Stein und in der Schlacke — auf meine Veranlassung eine Reihe S -Bestimmungen der Schlacke hat ausführen lassen, enthalten Stein und Schlacke im Wochendurchschnitt an dem Werk in der späteren Zeit (1915) die in den drei ersten Kolonnen der nachstehenden Tabelle angegebenen Werte. Die Analysen ordne ich nicht chronologisch, sondern nach steigender totaler S Menge. — Der S -Gehalt des Steines beträgt:

bei 20—25 ‰ Cu	27 ‰ S
„ 25—29 „ „	26 „ „
„ 29—35 „ „	25 „ „
„ 35—41 „ „	24 „ „

¹ Ich verweise insofern namentlich auf die ziemlich ausführliche Erörterung in meiner Arbeit „Mineralbildung in Schmelzmassen“ (1892, S. 239—263).

Durchschnittsanalysen (wöchentliche)
von Stein und Schlacke an Röros Kupferwerk.

Analyse Nr. 9.

	Stein (Kupfer- rohstein)	Schlacke (Rohschlacke)		Daraus berechnet für die Schlacke		
				Abzug von S in Stein- kugeln	Rest S in RS (FeS)	
	‰ Cu	‰ Cu	‰ S	‰ S	‰ S	‰ FeS
	35.68	0.65	1.28	0.44	0.84	2.31
	34.28	0.60	1.30	0.41	0.89	2.44
	32.58	0.53	1.37	0.41	0.96	2.63
	26.46	0.52	1.40	0.51	0.89	2.44
	28.86	0.42	1.43	0.38	1.05	2.88
	41.84	0.82	1.47	0.47	1.00	2.74
	27.38	0.57	1.43	0.54	0.89	2.44
	32.60	0.76	1.50	0.58	0.92	2.52
	39.42	0.82	1.50	0.49	1.01	2.77
	38.30	0.69	1.54	0.43	1.11	3.05
	36.98	0.71	1.56	0.46	1.10	3.02
	32.88	0.65	1.56	0.49	1.07	2.94
	34.30	0.64	1.57	0.47	1.10	3.02
	33.82	0.62	1.63	0.46	1.17	3.21
	38.76	0.64	1.67	0.40	1.27	3.49
	34.58	0.62	1.67	0.45	1.22	3.35
	33.72	0.55	1.70	0.41	1.29	3.54
	31.00	0.57	1.73	0.44	1.29	3.54
	35.06	0.65	1.79	0.45	1.34	3.68
	23.04	0.52	1.83	0.61	1.22	3.35
	27.92	0.62	1.87	0.58	1.29	3.54
Relativ zinkreiche Be- schickung	28.96	0.71	1.88	0.64	1.24	3.40
	29.68	0.76	1.90	0.61	1.29	3.54
	21.90	0.58	1.92	0.72	1.20	3.29
	22.50	0.57	1.93	0.68	1.25	3.43

Aus ‰ Cu und S in dem Kupferstein und ‰ Cu in der Schlacke berechne ich — unter der Voraussetzung, daß die ganze Cu-Menge der Schlacke aus den Steinkugeln herrührt — ‰ S in den Steinkugeln der Schlacke. Diese berechnete S-Menge (4. Kolonne) wird von der analytisch gefundenen S-Menge der Schlacke subtrahiert; dadurch erhält man den S-»Überschuß« (5. Kolonne), und daraus berechnet sich die Menge

von ursprünglich aufgelöstem FeS. Falls ein ganz geringer Bruchteil des Cu-Gehaltes der Schlacke in Oxydverbindung oder als ursprünglich aufgelöstes Cu_2S hineingehen sollte, würde hierdurch die berechnete FeS-Menge ein ganz wenig erhöht werden.

Die Temperatur der Schlacken beim Ausfließen aus dem Ofen (Schachtofen mit einer relativ kleinen auswändigen Brille) beträgt ungefähr 1300° , bald etwas höher, bald etwas niedriger.

Die berechnete FeS-Menge schwankt zwischen 2.31 und 3.68 % oder, wenn wir einige extreme Resultate außer Betracht setzen¹, zwischen ca. 2.6 und 3.5 %. Der Durchschnitt beträgt ziemlich genau 3 %. — Die Schwankungen mögen hauptsächlich teils auf etwas wechselnder Ofentemperatur und teils auf etwas wechselnder Zusammensetzung der Schlacke (siehe S. 49) beruhen; eine Reihe Bestimmungen mit ca. 3.3–3.5 % RS, wo RS als FeS² berechnet worden ist, stammen aus etwas ZnO-reicheren Schlacken wie die übrigen.

Um die hier vorliegende Frage näher zu erörtern, hat Stud. chem. R. LEPSÖE an der technischen Hochschule zu Trondhjem Frühling 1916 einige Schmelzversuche mit einer Röros-Schlacke ausgeführt. Dieselbe enthielt 0.87 % Cu und 1.58 % S, und der dazugehörige Stein 39.5 % Cu, 30.6 % Fe und 26.4 % S (dabei ein wenig Fe_3O_4 , siehe oben S. 32). Nach Abzug von S in den Steinkügelchen bekommen wir einen S-»Überschuß« von $1.58 - 0.58 = 1.00$ % S, entsprechend 2.75 % FeS.

Bei dem Umschmelzen der Schlacke (Einwäge 400 gr.) zuerst während 15 Minuten bei $1300-1390^\circ$ und nachher während einer Stunde bei rund 1400° ($1390-1420^\circ$) wurde am Boden und an den Wänden des Tiegels (Kohlentiegel, mit Chamotte und Karborundum an der Innenseite geschmiert) etwas Kupferstein nebst etwas ausreduziertem Eisen abgesetzt. Die Schlacke enthielt:

oben	0.19 % Cu	1.10 % S
in der Mitte	0.027 »	»

Der überaus größte Teil der Steinkügelchen war somit auf den Boden hinuntergesunken (oder z. T. an den Tiegelwänden abgesetzt), aber nach einer (auf meine Veranlassung von dem Assistenten FALCK-MUUS am chemischen Laboratorium der Hochschule) ausgeführten quantitativen Analyse von dem oberen Teil der Schlacke enthielt dieselbe noch 1.10 % S. — 0.19 % Cu in den hier noch restierenden Steinkügelchen fordern 0.12 % S; Rest 0.98 % S, gleich 2.7 % FeS.

¹ Eventuelle Analysenfehler vergrößern sich bei der Berechnung.

² Es wäre möglich, daß in diesen etwas zinkreicheren Schlacken $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$ statt FeS vorliegen könnte; ich verweise insofern auf einen folgenden Abschnitt.

Bei einem anderen, ebenfalls von LEPSÖE ausgeführten Schmelzversuch (in Magnesiatiegel, um die Eisenreduktion zu vermeiden) mit derselben Röros-Schlacke wurde — nach Erhitzung eine Stunde lang bei 1340° , eine Stunde bei 1350° und eine Stunde bei 1350 bis 1400° — am Boden des Tiegels etwas Kupferstein von der Zusammensetzung 50.5% Cu, 22.1% Fe und 25.29% S abgesetzt.

Die Schlacke enthielt noch 0.43% Cu und 1.50% S.

Der gleichzeitig mit der ursprünglichen Schlacke gefallene Stein enthielt, wie schon oben erwähnt, 39.5% Cu, 30.6% Fe und 26.4% S.

Der nach dreistündiger Erhitzung bei 1300 — 1400° abgesetzte Kupferstein führte somit einen nicht unwesentlich höheren Cu-Gehalt. Etwas FeS von den anfänglichen Steinkügelchen war somit in Lösung gegangen, was darauf beruhen mag, daß die bei etwa 1300° in dem Röros Schachtofen entstandene Schlacke, mit 2.75% gelöstem FeS, bei ein wenig erhöhter Temperatur noch etwas mehr FeS auflösen konnte. — 0.43% Cu in der umgeschmolzenen Schlacke verlangt für Steinbildung (bei 50.5% Cu und 25.29% S) 0.22% S; Rest $1.50 - 0.22 = 1.28\%$ S, gleich 3.50% FeS. Die Löslichkeitsgrenze bei 1350 — 1400° dürfte übrigens hierdurch nicht gänzlich erreicht sein.

Durch das freundliche Entgegenkommen von Herrn Hüttendirektor J. WESTLY an dem Kupferwerk von Sulitjelma habe ich eine entsprechende Tabelle (siehe nächste Seite) über die monatlichen Durchschnittsanalysen zu Sulitjelma erhalten. — Wir führen dieselben Berechnungen wie bei den Röros-Schlacken aus.

Die Schlacken von Sulitjelma stammen von Flammöfen (nach vorhergehendem Schmelzen in Knudsenöfen) bei durchschnittlicher Temperatur von ungefähr 1300° .

Die berechnete FeS-Menge der Schlacke schwankt, wenn wir auch hier die zwei niedrigsten und die zwei höchsten Bestimmungen außer Betracht setzen, zwischen ca. 1.7% und ca. 2.7% , mit wahrscheinlichem Durchschnitt von ca. 2.25% .

Als Resultat ergibt sich kurz:

Die Röros-Rohschlacke (mit durchschnittlich ca. 31% SiO_2 und ca. 46 — 53% FeO, ohne Abzug von FeS, siehe Analyse Nr. 8) enthält bei einer Ofentemperatur (im Schachtofen) von ca. 1300° durchschnittlich ca. 3% FeS;

und die Sulitjelma-Rohschlacke (mit durchschnittlich ca. 34% SiO_2 und 50% FeO, ohne Abzug von FeS) enthält bei einer Ofentemperatur (im Flammofen) von ca. 1300° durchschnittlich ca. 2.25% FeS.

Durchschnittsanalysen (monatliche)
von Stein und Schlacke an Sulitjelma Kupferwerk.

Analyse Nr. 10.

	Kupfererohstein			Schlacke					Daraus berechnet		
	%			%					Abzug von S in Steinkügelchen	Rest S in RS (FeS)	
	Cu	Fe	S	SiO ₂	Al ₂ O ₃	FeO	Cu	S			
Juli 1914	25.20	39.48	24.45	33.12		50.76	0.53	0.81	0.51	0.30	
Mai "	27.36		23.91	34.60	14.42	53.24	0.46				
Juni "	26.72	40.40		33.55	8.67	51.30	0.52				
Mai 1915	34.64		24.88	33.48		51.10	0.62	0.95	0.45	0.50	
Nov. 1913	28.66	37.92	25.01	34.78	10.59	47.76	0.52	1.08	0.45	0.63	1.73
Aug. 1914	29.26	33.65	24.70	33.00		49.84	0.62	1.20	0.52	0.68	1.87
März "	30.26	36.34	25.43	35.96		49.02	0.57	1.21	0.48	0.73	1.99
Jan. 1915	28.32	38.07	24.88	34.24		49.16	0.65	1.22	0.57	0.65	1.78
April "	28.10	38.82	25.30	35.52		48.96	0.50	1.28	0.45	0.83	2.28
Febr. "	30.66	36.94	25.02	34.16		50.04	0.62	1.37	0.51	0.86	2.36
April 1914	31.38	35.70	24.40	30.80	9.57	53.24	0.62	1.46	0.48	0.98	2.69
Sept. "	29.94	36.69	25.09	32.86		49.41	0.60	1.48	0.50	0.98	2.69
Dez. "	23.52	41.65	24.51	32.12		53.17	0.57	1.50	0.55	0.95	2.61
Nov. "	27.52		25.01	35.40			0.50	1.91	0.45	1.46	
Okt. "	27.56			34.90	15.76	47.71	0.51	2.15	0.46	1.69	

In der Tabelle S. 46—48 stelle ich ferner zusammen einige der in meiner früheren einschlägigen Arbeit (1892) benutzten Analysen und dabei eine Reihe Analysen, die mir privat von Hüttenwerken zugestellt sind, oder die ich verschiedenen Publikationen¹ entnehme.

Nr. 11—12. Konverterschlacken vom Manhès-Bessemerprozeß, von Evje, bezw. Ringes-rike Nickelwerk, Norwegen; aus der späteren Zeit (1915—16). — Das Eisen ist als FeO berechnet; in der Tat finden sich neben sehr viel FeO — außer FeS — auch mehrere Prozent Fe₂O₃. — Die Schlacken führen erhebliche Mengen von Steinkügelchen, mit hohen Ni- und Cu-Gehalten; der Abzug von S für Steinkügelchen ist mit ziemlich großen Fehlerquellen verknüpft. — Die mikroskopische Untersuchung ergibt sehr beträchtliche Mengen von FeS.

¹ Einige in Zeitschriften veröffentlichte, offenbar ganz unrichtige Analysen sind außer Betracht gesetzt. Auch habe ich — die Konverterschlacken jedoch abgerechnet — nur „absetzbare“ Schlacken, mit den üblichen kleinen Gehalten von Kupfer usw., berücksichtigt; besonders „unreine“ Schlacken (mit relativ hohen Gehalten von Kupfer usw.) sind somit im allgemeinen nicht aufgenommen.

In den aus *Schachtöfen* herrührenden Schlacken, Nr. 13–33, fehlt Fe_2O_3 in einigen Fällen gänzlich, nämlich in sauren Schlacken aus Schachtöfen mit starker Reduktion herkommend (wie z. B. die Mansfelder Schlacken, Nr. 32); in anderen Fällen kommt Fe_2O_3 vor, meist in einer Menge von 0.25–0.5 %, seltener von 1–2 oder ausnahmsweise über 2 % (als Fe_2O_3).

Nr. 13 nach WANJUKOFFS Abh. in Metallurgie, IX, 1912, S. 61; Nr. 18, 19, 24, 28 a–b nach derselben Abh. S. 4; Nr. 20, 21 und 27 nach einer Zusammenstellung in demselben Band von Metallurgie S. 562. — Nr. 14 nach W. A. HEYWOOD, Eng. Min. Journ. 1904, I, S. 395. — Nr. 15 und 31 nach einer alten Abh. von mir in der norwegischen Teknisk Tidsskrift, 1883. — Nr. 16, 17, 25, 26, 29 und 30, siehe meine Abh. Mineralbildung in Schmelzmassen, 1892. — Nr. 22–23 nach freundlicher Mitteilung von den Direktoren des Evje, bezw. des Ringerike Nickelwerkes; Nr. 22 a ist das Mittel zweier Analysen.

Nr. 13. Der gleichzeitig gefallene Kupferstein enthielt 23.41 % Cu und 22.08 % S. — Nr. 14. Durchschnittliche Monatsanalyse.

Nr. 15. Konzentrationsschlacke (2. Schlacke) von Kongsberg Silberwerk. Die Silberbestimmungen sind der Durchschnitt der Betriebsanalysen aus den Jahren 1878, 1879, 1880; und die S-Bestimmungen sind alte, von mir ausgeführte Analysen an denselben Durchschnittsproben. — Der gleichzeitig gefallene Stein enthielt ca. 4 % Ag und 24.5 % S; der Silbergehalt der Schlacke stammt, wie wir unten besprechen werden, ausschließlich (oder vielleicht beinahe ausschließlich) von mechanischen Steinkügelchen. „Abzug von S“ und „S in RS“ läßt sich somit hier ziemlich genau berechnen.

Nr. 16–17. Schlacken von Bleierzschmelzen zu Mechernich (siehe Mineralbildung in Schmelzmassen); das Erz wurde so stark geröstet, daß keine besondere Schicht von Bleistein gebildet wurde; der Abzug von Steinkügelchen muß somit hier ganz genau sein.

Nr. 18–19. Der Kupferstein bei der „zweiten“ Schlacke enthielt 48.76 % Cu und 22.91 % S, und bei der „ersten“ Schlacke 15.34 % Cu. — Nr. 22 a–b und 23 a–d: der Abzug von S für Steinkügelchen berechnet sich aus den Ni- und Cu-Gehalten der Schlacken und der gleichzeitig gefallenen Steine, indem vorausgesetzt wird, daß die Metallverluste ausschließlich von mechanisch beigemengtem Stein herrühren. — Nr. 24. Von Anaconda in Montana; der gleichzeitig gefallene Kupferstein enthielt 45.20 % Cu und 24.34 % S. — Nr. 25–26. Alte Bleischlacken von bezw. Przibram und Claustal (siehe BALLING, Metallhüttenkunde, 1885, S. 86 und 128).

Nr. 29. Kupferrohschlacke von Vigsnäs, beim Verschmelzen von besonders SiO_2 -reichem Erz (siehe Mineralbildung in Schmelzmassen).

Nr. 30. Kupferrohschlacke von Kafvortorp (siehe Mineralbildung in Schmelzmassen). Abzug von S nach Ermessen.

Nr. 31. Erste Schlacke (Rohschlacke oder „Steifschlacke“) von Kongsberg. Die Ag-Bestimmungen sind der Durchschnitt längerer Betriebsperioden (1879 und 1880). — Der gleichzeitig gefallene Rohstein enthielt 0.33, bezw. 0.32 % Ag und 26.8, bezw. 27.9 % S. Der Ag-Gehalt der Schlacke stammt, wie wir in einem folgenden Abschnitte erörtern werden, ausschließlich von mechanischen Steinkügelchen (siehe Fig. 40), die zufolge Proportionalitätsberechnung bezw. 0.45 und 0.41 % S in der Schlacke beanspruchen würden, während nur bezw. 0.30 und 0.25 % S gefunden wurde. Der Unterschied beruht vielleicht — in ähnlicher Weise wie bei der unten behandelten Schlacke von Mansfeld und bei dem isolierten Glimmer von Kafvortorp — darauf, daß die winzigen, in nicht-auflöslichem Silikatmineral eingeschlossenen FeS Individuen, welche durch die mikroskopische Untersuchung festgestellt sind, durch Aufschließen mit Salzsäure-Salpetersäure z. T. nicht aufgelöst wurden.

Nr. 32–33. Rohschlacken von verschiedenen Schachtöfen (Ofentemperatur ca. 1500°) zu Mansfeld-Eisleben, beim Schmelzen des bekannten Kupferschiefers; Nr. 32 a–f aus dem Jahre 1903 und zitiert nach dem Bericht des Mansfelder-Werkes in der „Festschrift zum X. Deutschen Bergmannstag“, Sept. 1907. Über Nr. 33 siehe unten. — Die Analyse 33 (mit vollständigem Aufschließen, zuerst mit HCl-HNO_3 und den Rest mit Soda) ergibt ca. 0.4 % FeS, und die mikroskopische Untersuchung zeigt ein wenig FeS, freilich nur in ganz geringer Menge. — Die an dem Werke ausgeführten Analysen Nr. 32 a–f ergeben auffallend wenig S; dies läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß das Aufschließen nur mit Salzsäure-Salpetersäure ausgeführt wurde, wodurch nicht die gesamte S-Menge aufgelöst wurde (siehe hierüber unten).

Evje Nickel-Werk . . . {	22 a	35.34	12.66		38.06	4.81	6.47	Null	Null	Null	0.19	0.14	1.21	0.55	0.66	1.8
	22 b	37.22	16.18		33.80	5.26	6.90	Null	Null	Null	0.25	0.15	1.28	0.65	0.63	1.7
Ringerike Nickel-Werk {	23 a	35.70			47.31			Null	Null	Null	0.14	0.10	1.55	0.6	0.95	2.6
	23 b	36.88	7.75		43.59	1.99	2.44	Null	Null	Null	0.14	0.09	1.02	0.4	0.6	1.65
	23 c	38.9	9.00		42.43	3.73	3.39	Null	Null	Null	0.20	0.16	1.16	0.4	0.75	2.4
	23 d	41.0			42.17			Null	Null	Null	0.15	0.09	0.76	0.4	0.36	1.0
Anaconda, Montana . . .	24	38.99	6.40		23.55	26.20						0.31	0.50	0.17	0.33	0.92
	25	37.50	7.81		28.37	14.70	1.11	2.51	4.07	0.48			0.92	ca. 0.3	ca. 0.6	ca. 1.65
Bleischlacke { Przibram Claustal .	26	40.22	7.89		35.51	4.95	1.38	1.89	3.41	1.96	0.03	0.21	0.00068	ca. 0.3	ca. 0.5	ca. 1.4
	27	42.35	3.02		30.60	20.38	1.23	0.24	0.93				0.67	ca. 0.27	ca. 0.4	ca. 1.1
Amer. Kupferwerk . . .	28 a	39.9	4.8		28.6	21.0	0.9	0.7	2.5	0.38		0.34	0.7	ca. 0.3	ca. 0.4	ca. 1.1
	28 b	40.2	5.3		21.4	23.2	1.5	1.2	6.8	0.78		0.27	0.5	ca. 0.2	ca. 0.3	ca. 0.8
Kupfer- Rohschlacke { Kafveltorp Vignäs . .	29	48.32	3.68	0.22	31.28	12.06	1.23					0.29	0.42	0.2	ca. 0.2	ca. 0.6
	30	47.23	6.58		6.06	12.75	19.81	1.64				0.46	0.71	0.4	ca. 0.3	ca. 0.9
Kongsberg Silberwerk { I. Schlacke	31 a	50.56	13.35		20.64	7.03	4.78		ca. 0.5	Null			0.0050			wenig
	31 b	50	13		21	7	4.5		ca. 0.5	Null			0.0047			wenig

	Mansfelder Rohschlacken						
	32 a	32 b	32 c	32 d	32 e	32 f	33
	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
SiO ₂	45.48	46.70	47.51	47.56	48.56	49.09	
Al ₂ O ₃	15.62	16.63	16.55	17.02	17.60	16.02	
FeO	6.07	3.46	6.06	3.33	2.46	5.58	
CaO	20.41	21.87	18.09	21.80	21.81	15.23	
MgO	4.78	4.40	3.81	3.51	3.00	6.61	
MnO	0.45	0.28	0.28	0.31	0.32	0.37	
K ₂ O	4.06	3.83	4.00	4.05	4.18	4.32	
Na ₂ O	0.25	0.22	0.17	0.65	0.69	0.44	
ZnO	2.28	1.93	2.77	1.30	0.85	1.76	
PbO	0.14	0.14	0.16	0.09	0.09	0.09	
NiO + CoO . .	0.03	0.03	0.04	0.02	0.01	0.01	
Cu	0.23	0.27	0.295	0.205	0.25	0.23	0.105
S	0.17	0.16	0.18	0.17	0.19	0.18	0.24
C	0.09	0.13	0.14	0.04	0.06	0.13	
FeS							ca. 0.4

Aus den obigen Analysen (Nr. 8—33) — an Zahl rund 70 — ergibt sich, daß die *gesamte S-Menge* (in RS und mechanisch beigemengten Steinkügelchen) der üblichen »absetzbaren« Schlacken von Steinschmelzen mit steigender SiO₂-Menge (oder steigender Azidität) sehr erheblich abnimmt, von ungefähr 1.6—1.9 % S in basischen, FeO-reichen Schlacken (mit 27—30 % SiO₂) bis nur 0.25—0.3 oder 0.4 % S in sauren Schlacken (mit ungefähr 50 % SiO₂ und dabei wenig FeO).

Ferner ergeben die Analysen — wenn wir die allersauersten Schlacken außer Betracht setzen — durchgängig einen sicher festgestellten »Überschuß« von Schwefel über diejenige Schwefelmenge, welche der Cu-Menge der Schlacke entspricht, wenn wir voraussetzen, daß diese Cu-Menge ausschließlich von beigemengten Steinkügelchen herrührt. Dieser »Überschuß« würde einen noch etwas höheren Betrag erreichen, falls ein geringer Teil des Kupferprozentos in den Schlacken von oxydischem Kupfer oder von aufgelöstem Cu₂S herrühren würde.

Die Berechnung von der S-Menge in RS (FeS) ist freilich mit gewissen Fehlerquellen¹ verknüpft; diese Fehlerquellen sind jedoch bei den basischen Schlacken ganz untergeordnet, verglichen mit dem ziemlich hohen Werte für S in RS.

¹ Bei der Beurteilung der vielen Analysen muß bedacht werden, daß besonders die älteren S-Bestimmungen in den Schlacken jedenfalls gelegentlich nur ziemlich approximativ sein dürften.

In betreff der sauren Schlacken (mit ungefähr 50 % SiO_2) ist die gesamte S-Menge (in RS und Steinkügelchen) ziemlich niedrig. Aus den üblichen technischen, oftmals etwas ungenauen Betriebsanalysen kann man die RS-Menge (nach Abzug von S zu Steinkügelchen) in diesen saurer Schlacken nicht genau berechnen. Ich stütze mich deswegen bezüglich dieser sauren Schlacken namentlich auf die mikroskopische Untersuchung, wodurch ein wenig FeS , nämlich $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ %, wie wir unten besprechen werden, festgestellt worden ist.

In den üblichen — zinkfreien oder zinkarmen — Schlacken von Steinschmelzen nimmt die in der geschmolzenen Schlacke aufgelöste Menge von RS, wo R ausschließlich oder beinahe ausschließlich = Fe, mit steigender Azidität sehr erheblich ab.

Die FeS-Menge der hier besprochenen, zinkfreien oder zinkarmen Schlacken von Steinschmelzen beträgt in der Regel annähernd (bei Ofentemperatur von ca. 1300°):

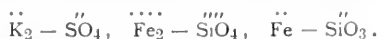
Aziditätsgrad ¹	% SiO_2	% FeO	Rest	% FeS
ca. 0.67	20—23	ca. 60		ca. 4.5
0.95—1	30	50—55	Al_2O_3 ,	" 3
1.15—1.2	35	45—50	CaO,	" 2.25—2.5
1.45—1.5	40	ca. 40	MgO	" 1.5
ca. 1.7	45	" 35	usw.	" 0.5—1
" 1.9	50	" 25		höchstens ca. 4.5

¹ Bei der Berechnung des Aziditätsgrades dieser Schlacken, wo Aluminat (Spinell) nicht vertreten ist, wird Al_2O_3 als Base betrachtet.

In derartigen Schlacken tritt Al_2O_3 , in ähnlicher Weise wie CaO, MgO usw., in Silikatverbindung hinein. Die logische Arbeitsmethode ist deswegen Al_2O_3 mit CaO, MgO usw. zusammenzufassen. — Wo Spinell vorhanden ist, darf man andererseits die für die Spinellbildung nötige Menge von Al_2O_3 nebst MgO, eventuell ZnO und FeO abziehen. Das gleiche gilt auch für Magnetit.

Die in der Gegenwart oftmals benutzte Arbeitsmethode, nämlich Al_2O_3 in allen Schlacken mit SiO_2 zusammenfassen und diese Summe der Summe der üblichen Basen CaO, MgO, FeO usw. gegenüberzustellen, ist weder wissenschaftlich noch technisch berechtigt.

Der Begriff Aziditätsgrad (oder „Sauerstoffverhältnis“) stammt von der alten dualistischen, Berzelianischen Auffassung, beleuchtet durch die Formeln $\text{K}_2\text{O} \cdot \text{SiO}_2$, $2 \text{FeO} \cdot \text{SiO}_2$, $\text{FeO} \cdot \text{SiO}_2$. Diese alte Auffassung war freilich irrig. Sie ist aber jetzt durch eine immer noch dualistische Theorie ersetzt worden, nämlich durch die von Arrhenius herrührende elektrolytische Dissoziation, beleuchtet durch die Formeln



Der Begriff Aziditätsgrad hat somit auch weiter nicht nur technisch, sondern auch wissenschaftlich seinen Wert. Eine Komplikation tritt freilich dadurch ein, daß gewisse

In Schlacken (Nr. 32—33) von Aziditätsgrad ca. 1.5 und mit 46—49 % SiO_2 , ca. 16 % Al_2O_3 , ca. 4—6 % FeO , 20—17 % CaO , 4—5 % MgO , etwas K_2O , MnO usw. handelt es sich bei Ofentemperatur von ca. 1500° um ca. 0.4 % FeS .

Aus einem folgenden Abschnitt entnehme ich eine Übersicht über die anfänglich aufgelöste Menge von $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$, wo R hauptsächlich = Fe, in den an ZnO einigermaßen reichen Schlacken (mit etwa 7—18, meist 10—15 % ZnO):

bei 20—24 % SiO_2	4—5 % $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$	
» 25—29 »	»	3—4 »	»
» 30—35 »	»	2—3 »	»

Weil die zwei flüssigen Phasen, Silikat (Schlacke) und Sulfid (Stein), beim Ofenschmelzen in einigermaßen inniger Berührung miteinander stehen, darf man den Schluß ziehen, daß die obigen Werte annähernd — aber auch nur annähernd — die Löslichkeitsgrenze von Sulfid, RS , in den betreffenden Silikatschmelzen bei Temperatur von ca. 1300° (oder in einigen Fällen etwas darüber) darstellen. Die Löslichkeits- oder Sättigungsgrenze dürfte jedoch — aus Mangel an Zeit und genügend inniger Berührung — im allgemeinen nicht gänzlich erreicht werden.

Der Unterschied von der Sättigungsgrenze mag bald etwas größer und bald etwas kleiner sein. Hierdurch erklärt sich, daß die FeS -Menge der basischen, stark FeO -reichen Schlacken bei demselben Schmelzprozeß und bei Schlacken von beinahe konstanter Zusammensetzung gewissen Schwankungen unterworfen ist; ich verweise insofern auf die Analysentabellen von Rörös und von Sulitjelma, Nr. 9 und 10.

Indem wir berücksichtigen, daß der Unterschied von der Sättigungsgrenze bei den basischen und den sauren Schlacken prozentisch annähernd mit demselben Maß gemessen werden darf, folgt aus der obigen Erörterung, daß *die Löslichkeit von RS* , wo R teils nur = Fe und teils = $\text{Zn} + \text{Fe}$, in Silikatschmelzen mit demselben Verhältnis zwischen den Basen *mit steigender Azidität abnimmt, — und zwar ganz erheblich.*

Silikatkomponenten bei sehr hoher Temperatur zerfallen, so MgSiO_3 zu Mg_2SiO_4 und anderen Komponenten.

Ich beabsichtige, bei einer späteren Angelegenheit, meine Auffassung von dem Begriff Aziditätsgrad eingehender zu erörtern.

Über die Löslichkeit von CaS-MnS in Silikatschmelzen (unbegrenzte gegenseitige Löslichkeit von CaS-MnS und basischen, CaO-, bezw. MnO-reichen Silikatschmelzen).

Beim Schmelzen auf Roheisen und Stahl verteilt sich das Sulfid bekanntlich in das flüssige Eisen und in die flüssige Schlacke. Wie von H. v. JÜPTNER¹ hervorgehoben wurde, kann man hier — freilich mit einer gewissen Begrenzung — NERNST's *Verteilungsgesetz beim heterogenen Gleichgewicht* anwenden: in zwei angrenzenden flüssigen Phasen stehen die Konzentrationen jedes Stoffes, der in beiden Stoffen löslich ist, bei konstant gehaltener Temperatur in einem konstanten Verhältnis.

NERNST's Gesetz hat in dieser einfachen Form jedoch nur seine Gültigkeit, wenn der gelöste Stoff, also hier das Sulfid (RS), in beiden Lösungen das gleiche Molekulargewicht besitzt. Die Anwendung des Teilungskoeffizienten

$$\frac{RS \text{ in der Silikatlösung}}{RS \text{ in der Metalllösung}}$$

auf das vorliegende Gebiet wird ferner dadurch beeinflusst, daß die Zusammensetzung des in den zwei Phasen aufgelösten Sulfids in der Regel verschieden ist. Beim Schmelzen von manganhaltigem Stahl und MnO-reicher Schlacke handelt es sich freilich in beiden Phasen um dasselbe Sulfid, nämlich MnS (eventuell mit geringer Beimischung eines anderen Sulfids). Andererseits liegt bei dem Hohofenprozeß das Sulfid als FeS oder (Fe, Mn)S im Roheisen, dagegen als CaS oder (Ca, Mn)S in der Schlacke vor.

Der Teilungskoeffizient ist von der Zusammensetzung des Eisens abhängig, und zwar derart, daß die Überführung des Sulfids in die Schlacke bei Roheisen viel weiter geht, als es mit Stahl der Fall ist.

Bei sehr *hoher* Temperatur und stark *basischer* Schlacke beträgt der Quotient

$$\frac{S \text{ in der Schlacke}}{S \text{ im Metall}}$$

bei Roheisen sogar bis rund 200 oder 250, während man bei Stahl nur 2 bis 6 oder höchstens etwa 10 erhält.

Unter sonst gleichen Bedingungen geht bekanntlich umso mehr RS in die Schlacke — und somit umso weniger RS in das Eisen —

¹ H. v. JÜPTNER, in Stahl und Eisen, 1902, 1.

- a) je höher die Temperatur ist,
- b) je mehr basisch die Schlacke ist,
- c) und je reicher dieselben an CaO und namentlich an MnO sind.

Beim Hochofenprozeß beträgt der Quotient

$$\frac{S \text{ in der Schlacke}}{S \text{ in Metall}}$$

wie gerade erwähnt, bei stark basischen, CaO-reichen Schlacken (mit ca. 30 % SiO₂, cfr. z. B. den unter folgenden Analysen Nr. 35—44, 48, 50, 52) und gleichzeitig sehr hoher Ofentemperatur (ca. 1600° im Gestell) ungefähr 200 oder 250, gelegentlich vielleicht noch mehr. Bei sauren Schlacken (mit ungefähr 50 % SiO₂) und dabei auch niedrigerer Ofentemperatur sinkt aber andererseits der Quotient auf ungefähr 1, bisweilen gar unterhalb 1.

Der Teilungskoeffizient ist somit stark empfindlich gegen die Physik (Temperatur) und die Chemie (Zusammensetzung) der zwei Phasen.

Das Einstellen des Gleichgewichts zwischen den in den zwei Phasen aufgelösten RS-Mengen wird eine gewisse Zeit in Anspruch nehmen; bei den hüttenmännischen Vorgängen wird aus diesem Grunde das Gleichgewicht wohl öfters nicht gänzlich erreicht werden.

Um die *Abhängigkeit des Teilungskoeffizienten von der Temperatur* zu beleuchten, entnehme ich dem Bericht (von P. FARUP, CHR. AUG. THORNE und mir)¹ über den Betrieb des Elektrohochofens zu Tyssedal (Hardanger) einige Daten.

Man arbeitete hier mit einer basischen Schlacke von beinahe konstanter Zusammensetzung:

Analyse Nr. 34.

32	%	SiO ₂
9	„	Al ₂ O ₃
41	„	CaO
16	„	MgO
0.5—1	„	FeO
ca. 1	„	MnO

100 Gewichtsteile Erz und Zuschlag gaben rund 41 % Roheisen und 38 % Schlacke. — Der gesammte Schwefelgehalt im Erz, Zuschlag (Kalkstein) und Schlacke, auf 100 Gewichtsteile Roheisen bezogen, erreichte 0.40—0.45 % S.

Bei verschiedener Ofentemperatur betrug der S-Gehalt im Roheisen und in der Schlacke:

¹ Teknisk Ukeblad, 1913.

Prozent S in Roheisen Prozent S in Schlacke

Hohe Temp., ca. 1500°	0.004	0.43
Etwas niedrigere Temp., ungefähr 1425°	0.030	0.40
Niedrige Temp., ungefähr 1300° . . .	0.15	0.27

Über die Temperatur-Angaben: Bei einem Ausschlag unter „hoher Temperatur“ wurde die Temperatur der aus dem Ofen fließenden Schlacke mit optischem Pyrometer zu 1511° gemessen; die Temperatur des gleichzeitig aus dem Ofen fließenden Roheisens betrug ungefähr 1470°. — Die zwei anderen Temperatur-Angaben, bzw. ungefähr 1425° und 1300°, beruhen auf Schätzungen, die sich jedoch z. T. auf einige Pyrometer-Messungen stützen. — Die Abhängigkeit des S-Gehaltes im Roheisen von der Temperatur zeigt sich u. a. durch die beinahe mathematisch genau umgekehrte Proportionalität zwischen dem S- und dem Si-Prozent in dem Roheisen (hohe Temperatur gibt Spuren bis 0.005 % S, aber andererseits ca. 1.5–2 % Si im Roheisen; niedrige Temperatur bei derselben Beschickung dagegen ca. 0.15 % S, aber nur 0.01–0.06 % Si im Roheisen). — Die Angaben über den S-Prozent der Schlacken bei verschiedener Ofentemperatur beruhen z. T. auf Interpolationen zwischen S-Bestimmungen in einer Reihe Schlacken.

Bei relativ niedriger Ofentemperatur, wie etwa 1300°, wird das Eisen der Beschickung bei dem Hochofenprozeß nicht vollständig reduziert; es resultiert somit (bei «unreinem Betriebe») eine Hochofenschlacke mit einigen, meist 3 bis 5, bisweilen sogar noch mehreren Przt. FeO; siehe z. B. die Analysen Nr. 63–65.

Bei dem «unreinen Betriebe» entsteht erfahrungsmäßig ein relativ S-reiches (oder FeS-reiches) Roheisen und dementsprechend eine relativ RS-arme Schlacke. Dies mag im wesentlichen auf der Verschiebung des Teilungskoeffizienten bei niedriger Temperatur beruhen.

Dabei mag aber auch folgendes bemerkt werden: Das in den bei hoher Temperatur gefallenen Schlacken, mit nur etwa 0.5 % FeO, ausgeschiedene Sulfid besteht zufolge meiner Untersuchungen aus CaS oder (Ca, Mn)S, nur mit einer minimalen isomorphen Beimengung von FeS (eventuel auch von MgS). Schon bei einigen Przt. FeO in der Silikatschmelze bildet sich dagegen, wie wir unten erörtern werden, nicht ein Ca-Sulfid, sondern FeS (oder vielleicht (Fe, R)S, wo R nur in geringer Menge vertreten ist). Und die Löslichkeit der beiden Sulfide, einerseits Ca-Sulfid und andererseits Fe-Sulfid, mag in Silikatschmelzen von annähernd derselben Zusammensetzung, jedoch mit einer Verschiebung von dem Verhältnis CaO : FeO, selbst bei dergleichen Temperatur etwas verschieden sein.

Um die Abhängigkeit des Teilungskoeffizienten von der Azidität der Schlacken zu beleuchten, bemerken wir, daß bei basischen und CaO-reichen Schlacken (mit ungefähr 30 % SiO₂) und gleichzeitig hoher Ofentemperatur (1500° bis 1600°) nur etwa 1 Przt., gelegentlich sogar weniger als 1 Przt.

der gesamten Schwefel- oder Sulfid-Menge in das Roheisen eingeht, — und der Rest, somit 99 oder gar etwas über 99 Przt. in die Schlacke.¹ — Bei sauren Schlacken, mit 50, 55 oder 60 % SiO_2 und demselben Verhältnis zwischen den Basen, würde dagegen, verschiedenen Schmelzversuchen zufolge, bei derselben Temperatur nicht mal die Hälfte — in stark sauren Schlacken sogar nicht einmal ein Zehntel — der totalen Schwefel- oder Sulfidmenge von der Schlacke aufgenommen werden. — Die «Schwefel-Reinigung» ist somit in sehr markiertem Grade von der Basizität der Schlacken abhängig.

Aus diesem Grunde arbeitet man bei den üblichen Kokshochöfen — weil der Koks viel S (in der Regel ungefähr 0.8—1 %) enthält, und weil dabei auch die Erze und die Zuschläge häufig ziemlich S-haltig sind — immer mit ziemlich basischen, CaO-reichen Schlacken. Dieselben führen dabei durchgängig oder beinahe durchgängig mehrere Prozente, selten unter 7 und meist 10 bis 15 %, gelegentlich noch mehrere Prozente Al_2O_3 , ferner in der Regel einige Przt. MgO (siehe die Analysen Nr. 35—44, 48—52). Ein relativ basisches Glied der Melilithgruppe (Gehlenit oder eigentlicher Melilith) wird somit in mineralogischer Hinsicht für die Kokshochofenschlacken beinahe immer kennzeichnend.²

In der Regel handelt es sich bei den Kokshochofenschlacken, wenn wir RS als CaS berechnen, um 3.5 bis 5 oder 5.5 % CaS; bisweilen, nämlich bei besonders schwefelreicher Beschickung, steigt jedoch die CaS-Menge noch höher, bis 6 u. 7, ausnahmsweise sogar etwas über 8 % CaS.³

Aus einigen Publikationen in «Stahl und Eisen» stelle ich einige Analysen von besonders Sulfid-reichen Kokshochofenschlacken zusammen. RS berechne ich als CaS; in der Tat dürfte das Sulfid aus ganz überwiegend CaS neben ein wenig MgS, MnS u. FeS bestehen. — Sämtliche Schlacken sind bei ziemlich hoher Ofentemperatur gefallen.

¹ Etwas S mag dabei unter gewissen Bedingungen verflüchtigt werden; diese Erscheinung ist jedoch ohne Bedeutung für die vorliegende Frage, über die Löslichkeit von CaS—MnS in den Silikatschmelzen.

² Bei nur wenig Al_2O_3 (und wenig MgO, MnO) krystallisiert Ca_2SiO_4 , was das „Zerfallen“ der Schlacken veranlasst (wegen der Volumvergrößerung bei dem Übergang von $\beta\text{-Ca}_2\text{SiO}_4$ zu $\gamma\text{-Ca}_2\text{SiO}_4$).

³ Solche stark CaS-reiche Schlacken sind sehr viscos und aus diesem Grunde nicht beliebt.

Besonders CaS-reiche Hochofenschlacken.

Nummer	SiO ₂	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	MnO	FeO	CaS
35 . . .	26.64	13.98	48.72	1.29	0.25	0.82	6.78
36 . . .	29.76	14.27	45.34	1.95	0.13	0.67	6.90
37 . . .	34.22	4.20	37.45	18.39	2.9	1.61	7.10
38 . . .	30.35	5.32	43.40	10.60	0.39	0.48	7.20
39 . . .	27.14	14.13	48.39	1.43	0.25	0.67	7.30
40 . . .	35.61	7.98	37.73	13.63	1.20	1.47	7.34
41 . . .	36.48	5.33	41.86	8.46	3.25	0.65	7.45
42 . . .	29.4	10.15	50.05	4.72	0.55	2.28	7.50
43 . . .	28.44	14.51	46.16	4.21	1.61	0.98	8.40
44 . . .	30.0	9.97	42.59	14.56	0.70	1.0	8.55

Nr. 35, 36, 39 nach A. KNAFF, Stahl und Eisen, 1912, I, S. 930. — Die anderen nach B. OSANN, ebenda, 1914, II, S. 1450. — Nr. 35, 39 von Seraing, Belgien; Nr. 36 von Creuzthal; Nr. 37, 40, 41, 44 von Oberschlesien; Nr. 38, 42 von Westphalen; Nr. 43 von Rheinland.

Saure Schlacken, mit ungefähr 60 % SiO und als Basen CaO nebst etwas MgO, Al₂O₃ usw., mögen bei 1500° bei weitem nicht so viel wie 8 % CaS auflösen können. Basische Schlacken mit ungefähr 30 % SiO₂ können aber bei derselben Temperatur (1500°), wie wir unten erörtern werden, erheblich mehr, nämlich etwa 30 % CaS, auflösen.

Bei den durch überwiegend *CaO bezeichneten Silikatschmelzen* (mit demselben Verhältnis zwischen CaO und den anderen Basen) *nimmt somit die Löslichkeit von CaS mit steigender Azidität sehr erheblich ab.*

Ähnliches gilt auch von der Löslichkeit von MnS oder (Mn, Ca)S in MnO-reichen Schlacken.

Wir gelangen somit hier zu demselben Resultat wie in betreff der Löslichkeit von FeS in FeO-reichen Schmelzen, — und diese Übereinstimmungen berechtigen zu dem *generellen* Schluß, daß die *Löslichkeit von RS in Silikatschmelzen mit steigender Azidität abnimmt*, und zwar sehr erheblich.

Bezüglich der bemerkenswerten Abhängigkeit des Teilungskoeffizienten

$$\frac{RS \text{ in der Schlacke}}{RS \text{ in Eisen}}$$

einerseits von der Azidität und andererseits von der Temperatur bemerken wir folgendes:

Bei einer gewissen Temperatur, wie z. B. 1500° , mag eine basische, CaO-reiche Schlacke von gewisser Zusammensetzung, sehr viel, wie ungefähr 30 % RS, eine saure Schlacke dagegen erheblich weniger, nämlich bei einer bestimmten Zusammensetzung der Schlacke z. B. 5 % RS auflösen können. Beim Schmelzen zusammen mit Eisen (hier Roheisen mit einbegriffen) unter Gegenwart von RS wird im allgemeinen die Sättigungsgrenze von RS in der Silikatschmelzlösung bei weitem nicht erreicht werden. Man darf aber annehmen, daß bei dem Schmelzen mit verschiedenen Silikaten unter sonst gleichen Bedingungen jedenfalls annähernd denselben *prozentischen Bruchteil der Sättigungsgrenze*, z. B. unter gewissen Bedingungen ein Fünftel, erreicht wird, — also bei dem gewählten Beispiel bei der basischen Schlacke 6 %, bei der sauren dagegen nur 1 % RS Selbst ob die Amplitude für die Annäherung zu dem prozentischen Bruchteil der Sättigungsgrenze ganz groß sein dürfte, mag die prinzipielle Ursache zu der Abhängigkeit des Teilungskoeffizienten von der Azidität darin zu suchen sein, daß die Löslichkeit von RS in Silikatschmelzen unter sonst denselben Bedingungen mit steigender Azidität abnimmt, und zwar sehr stark.

Die Ursache zu der Abhängigkeit des Teilungskoeffizienten von der Temperatur ist fraglich. Zwischen flüssigem FeS und flüssigem Eisen gibt es eine unbegrenzte gegenseitige Löslichkeit, — und die basischen, CaO-reichen Schlacken mögen bei Temperatur 1500° jedenfalls etwa 4-mal so viel CaS auflösen, wie die Sulfid-reichsten Hochofenschlacken (mit bis ca. 8 % CaS) führen.

Die Dünnflüssigkeit des Eisens wie auch der Silikatschmelzen steigt mit der Temperatur, jedoch für die Silikatschmelzen relativ erheblich stärker wie für das Eisen. Es wäre möglich (?), daß dies einen Einfluß auf die Verschiebung des Teilungskoeffizienten mit der Temperatur ausüben könnte.

Einige Untersuchungen über die Löslichkeit von CaS in einer basischen und CaO-reichen Silikatschmelze bei ca. 1200° — 1500° sind von ERDMANN SCHULZ¹ ausgeführt worden. Als Ausgangsmaterial wurde eine Schlacke von der folgenden Zusammensetzung benutzt:

Analyse Nr. 45.

SiO ₂	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	MnO	FeO	CaS
39.10	10.57	43.41	1.36	0.23	0.23	3.71

¹ Referat von OSKAR SIMMERSBACH, Beiträge zur Verhüttung schwefelhaltiger Kiesabbrände im Hochofen. Stahl und Eisen, 1912, II, S. 1254—1259, 1370—1375. — Es werden hier die technischen Schwierigkeiten bei dem Schmelzen von stark Sulfidreichen Hochofenschlacken besprochen, u. a. weil CaS-reiche Schmelzen ziemlich viskos sind.

Bei einem Schmelzversuch ergab die mit Pyrometer gemessene Abkühlungskurve einen charakteristischen Haltepunkt bei 1185° . Ferner wurde die pulverisierte Schlacke mit wechselnden Mengen von CaS gemischt, und der «Schmelzpunkt» dieser Mischungen mit Pyrometer gemessen.

Die erhaltenen Ergebnisse waren:

Prozent Silikatmasse	Prozent CaS	„Schmelz- temperatur“
96.29	3.71	1185°
95.75	4.25	1205
94.26	5.74	1215
93.79	6.21	1225
92.62	7.38	1230
92.64	7.36	1230
92.69	7.31	1230
91.38	8.62	1240
90.95	9.05	1240
90.77	9.23	1245
88.97	11.03	1265
87.06	12.94	1280
86.26	13.74	1285
84.84	15.16	1300
84.68	15.32	1300
82.26	17.64	1315
81.50	18.50	1325
41.03	58.97	bei 1500° nicht geschm.

Die Silikatmasse (nach Abzug von CaS) enthielt:

Analyse Nr. 46					
SiO ₂	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	MnO	FeO
40.6	11.0	45.1	1.4	0.25	0.25

(mit ganz kleinen Schwankungen bei den verschiedenen Versuchen, indem ein wenig CaS zu CaO oxydiert wurde; jede Schmelze wurde auf S analysiert und daraus der Gehalt von CaS berechnet).

Daß CaS bei den verschiedenen Versuchen (ausgenommen dem letzten, mit beinahe 60 % CaS) in die Silikatschmelze aufgelöst wurde, folgt aus den mitgeteilten Photographien von Dünnschliffen (mit bezw. 4.25, 7.38 und 13.74 % CaS), welche die üblichen CaS-Krystallite ergeben.

Die benutzte Arbeitsmethode ist in physikalisch-chemischer Beziehung freilich nicht ganz einwandfrei. Die erhaltene Kurve repräsentiert somit nicht ganz genau, sondern nur mehr oder minder approximativ die wirkliche Lösungskurve. Fehler von weitgehender Tragweite dürften jedoch offenbar nicht vorliegen.

— Zufolge der metallurgischen Erfahrung wird das Sulfid unter sonst gleichen Bedingungen — in Bezug auf Temperatur, Zusammensetzung des Eisens, Basizität der Schlacken usw. — etwas reichlicher in die Schlacke hinübergeführt, wenn CaO z. T. durch MnO ersetzt wird.

MnS oder (Mn, R)S mag in basischen, MnO-reichen Schlacken bei genügend hoher Temperatur in beträchtlicher Menge aufgelöst werden. Beispielweise hat die Mischerschlacke des Peiner Walzwerks im Monatsdurchschnitt die folgende Zusammensetzung¹:

Analyse Nr. 47.								
SiO ₂	CaO	MgO	Fe ₂ O ₃	FeO	MnO	MnS	P ₂ O ₅	SO ₂
29.76	5.30	0.88	3.86	5.38	33.33	18.93	1.11	0.12

Das Sulfid ist hier als reines MnS berechnet; in der Tat dürfte ein Mischkristall (Mn, R)S vorliegen, wo R (in ziemlich geringer Menge) = Ca und Fe.

Gelegentlich führen die Mischerschlacken (von den Roheisen-Mischern) nicht unwesentlich mehr als 20 % MnS.

Um die gegenseitige Löslichkeit von CaS und einem CaO-reinen *basischen* Silikat, (Ca, Mg)₄Si₃O₁₀ bei höherer Temperatur zu untersuchen, habe ich, mit Assistance von Stud. ing. B. DIETRICHSON, an der Technischen Hochschule zu Trondhjem eine Reihe Schmelzversuche ausgeführt.

Aus SiO₂, CaO und MgO wurde zuerst eine etwas größere Quantität, ca. 800 gr., Åkermanit (Ca, Mg)₄Si₃O₁₀ (46.9 % SiO₂, 40.6 % CaO, 12.5 % MgO) in elektrischem Graphittiegelofen zusammengeschmolzen. Reingeriebener Åkermanit wurde dann mit pulverförmigem CaS gemischt und ebenfalls in Graphittiegelofen erhitzt. Um Oxydation von CaS so weit als möglich zu vermeiden, wurde oben an den Einwägen etwas Schwefel gestreut. Die dargestellten Schmelzprodukte wurden auf S analysiert und ergaben nur eine ganz geringe Abnahme von S oder CaS; z. B. von 74 % bis 73 % CaS. Zu jedem Versuch wurden 160 bis 190 gr. CaS + Silikat eingewogen. Jeder Versuch wurde während 30–45 Minuten auf der maximalen Temperatur gehalten; dieselbe wurde mit Wanner-Pyrometer gemessen.

Versuch	Gemisch		Temperatur	
I	25 %	CaS : 75 Åkerm.-Sil.	. .	1750 ⁰
II	50 %	— : 50 —	. . .	1770 ⁰
III	73 %	— : 27 —	. . .	1700 ⁰

Bei jedem dieser drei Versuche erhielt man eine einheitliche Schmelze; ich verweise auf die unten folgende mineralogische Beschreibung (siehe die Mikrophotographien Fig. 16–18 und 19 a).

Bei einem vierten Versuch:

IV 83 % CaS : 17 % Åkerm.-Sil.

¹ W. HEIKE, Die Entschwefelung des Eisens, ihre Gesetze und deren Anwendung. Stahl und Eisen, 1913, I, S. 765–769, 811–817.

wurde in dem unteren, etwa drei Viertel betragenden Teil eine Temperatur von ca. 1800° erreicht, und hier war, wie bei den Versuchen I—III, eine einheitliche Lösung entstanden. In dem obersten Teil des Tiegels, bei Temperatur ungefähr 1700° , war dagegen nicht alles CaS in Lösung aufgegangen; es lag deswegen hier eine nicht völlig geschmolzene Masse vor.

— Wie oben (S. 5) erwähnt, hat reines CaS einen Schmelzpunkt von mindestens 1900° , jedoch wahrscheinlich nicht viel höher (siehe hierüber unten).

Weil man nicht nur bei 25 % und 50 % CaS, sondern auch bei 73 % und 83 % CaS, gegen nur 27, bzw. 17 % Ca, Mg-Silikat, bei genügend hoher Temperatur, jedoch etwas unter dem Schmelzpunkte von CaS, eine einheitliche Schmelzlösung bekommt, ergibt sich, daß *CaS und $(Ca, Mg)_4Si_3O_{10}$ unbegrenzt in einander löslich sind.*

— Zufolge der in einem unten folgenden Abschnitt näher erwähnten Arbeit von A. WOŁOSKOW (Petrograd, 1911; l. c. S. 5), der die Schmelzkurven der Systeme MnS : MnSiO₃ und BaS : BaSiO₃ untersuchte, sind MnS und MnSiO₃, wie auch BaS und BaSiO₃, in der flüssigen Phase völlig miteinander mischbar.

Die Schwermetall-Sulfide mit relativ *niedrigen* Schmelzpunkten

Ag ₂ S	834°
PbS	1114°
Cu ₂ S	1130°
FeS	1170°
NiS (oder Ni ₃ Sn)	

wie auch die Gemische dieser Sulfide bilden mit geschmolzenem Silikat *zwei flüssige Phasen.*

Im Gegensatz hierzu bilden die folgenden Sulfide mit *hohen* Schmelzpunkten

MnS	etwa 1620°
BaS	mindestens 1600°—1700°
CaS	mindestens 1900°

mit bzw. MnSiO₃, BaSiO₃ und $(Ca, Mg)_4Si_3O_{10}$ *eine einheitliche flüssige Phase.*

Auch dürften CaS und *basische*, CaO-reiche Silikate, mit ein wenig MgO usw. und deswegen mit niedrigen Schmelzpunkten, im allgemeinen eine unbegrenzt gegenseitige Lösung ergeben.

Die Löslichkeit von CaS in den CaO-Silikaten nimmt mit steigender Azidität sehr bedeutend ab, und deswegen ist bei *sauren* CaO-Silikaten keine vollständige gegenseitige Löslichkeit anzunehmen.

Über CaS—MnS, Oldhamit—Manganblende in Silikatschmelzen.

Wie ich schon in meinen früheren Schlackenstudien (1884, 1892) nachgewiesen habe, wird das aus den Silikatschmelzen auskrystallisierte Ca—Mn-Sulfid durch die folgenden Kriterien gekennzeichnet:

Es wird selbst von schwacher Säure, wie stark verdünnter Salzsäure, unter Entwicklung von H_2S und ohne Abscheidung von freiem Schwefel, aufgelöst. Es handelt sich somit um ein Sulfid von der Zusammensetzung RS (und nicht RS_2).

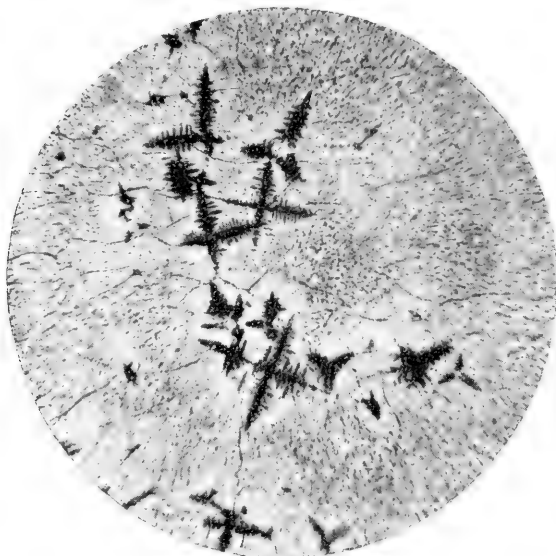


Fig. 14. Vergrößerung 90 : 1. Intensiv grügefärbte Krystallite von $(Mn, Ca)S$ in einer Schlacke von Finnbo (bestehend aus 39.96 % SiO_2 , 6.77 % Al_2O_3 , 26.06 % CaO , 7.14 % MgO , 15.68 % MnO , 0.79 % FeO). Die Krystallite liegen in Glas (siehe auch Fig. 19 c).

Das ausgeschiedene Sulfid ist optisch isotrop und erscheint in »Krystalliten« (siehe hierüber unten S. 63—65), und zwar oftmals in Krystallskeletten, mit einem Aufbau nach drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen (siehe Fig. 14 und 15). Es liegt somit ein *regulär* krystallisierendes Mineral vor.

Das künstliche CaS ist wasserhell (schwach pellucid) wie Oldhamit, und das künstliche MnS ist intensiv grün (ebenfalls schwach pellucid), und zwar mit derselben Farbennuance wie die natürliche Manganblende (Alabandin).

Der Berechnungsexponent von CaS—MnS ist sehr bedeutend.

Dabei erwähnen wir, daß das aus MnO - und FeO -freien oder ganz armen CaO -Silikatschmelzen, die zufolge der chemischen Analyse 0,5—2,5 % S entsprechend 1,12—5,6 % CaS enthalten, ausgeschiedene Sulfid mit demjenigen identisch ist, das sich aus CaS -reichen Schmelzen mit 25, 50, 73 und 83 % CaS bildet. — Und das aus MnO -reichen, aber CaO -armen Silikatschmelzen mit nur einigen Przt. Sulfid ausgeschiedene Sulfid ist mit dem aus umgeschmolzenem MnS auskristallisierten MnS identisch.



Fig. 15. Vergrößerung 115 : 1. Intensiv grüngefärbte Krystallite von $(\text{Mn}, \text{Ca})\text{S}$ in der Schlacke Nr. 56. Die Sulfid-Krystallite liegen hauptsächlich in $\text{Ca-Mn-Monticellit-Olivin}$. Unten sieht man eine kleine Luftblase, an dessen Seiten Sulfid-Krystallite abgesetzt sind.

Das aus den üblichen Hochofenschlacken (siehe die Analysen Nr. 48—58), mit 0,5 bis 5,5 % CaS , ausgeschiedene Ca -Sulfid kristallisiert bei einer Temperatur von ungefähr 1150° — 1300° ; andererseits beginnt die Krystallisation von CaS in stark CaS -reichen Silikatschmelzen, mit 73—83 % CaS (cfr. die Schmelzversuche III und IV, S. 59—59) bei einer Temperatur von rund 1700° — 1800° . In beiden Fällen bekommen wir dasselbe Mineral. CaS mag somit — jedenfalls unterhalb ca. 1800° — nicht dimorphe Varietäten geben. Zu dem gleichen Schluß gelangen wir auch betreffend MnS .¹

Aus dem obigen folgt, daß das aus Silikatschmelzen auskristallisierte CaS-MnS mit Oldhamit—Manganblende identisch ist.

Über $\text{CaS} : \text{MnS}$. Die Farbe des aus Silikatschmelzen mit wechselndem Verhältnis zwischen CaO und MnO auskristallisierten Sulfids ergibt einen kontinuierlichen Übergang zwischen CaS und MnS .

¹ Im Gegensatz hierzu steht ZnS , das bekanntlich bei hoher Temperatur als Wurtzit, bei niedrigerer Temperatur dagegen als Zinkblende kristallisiert.

Das in CaO- oder CaO+MgO-Silikatschmelzen, ohne oder nur mit einem winzigen Gehalt von MnO oder FeO, auskristallisierte Sulfid ist wasserhell.

In entsprechenden, ständig FeO-freien oder beinahe freien Schmelzmassen mit rund 5 % MnO neben 30–40 % CaO (somit bei 1 Mn : rund 25–33 Ca) beobachtet man dagegen eine schwach grünliche Nuance bei dem Sulfidmineral.

Bei etwas relativ höherer MnO-Menge in der ganzen Schmelze, wie 1 Mn : 20 Ca, 1 Mn : 15 Ca, 1 Mn : 10 Ca und 1 Mn : 5 Ca, wird die grüne Farbe des Sulfidminerals immer intensiver.

Und schon bei 1 Mn : ca. 3 Ca, wie beispielsweise in der unten als Nr. 57 angeführten Schlacke, mit 12.5 % MnO neben 33.0 % CaO, ist die Farbe des Sulfidminerals in so hohem Grade intensiv grün geworden, daß das Mineral in Bezug auf Farbenintensität sich nicht von dem Sulfid in noch MnO-reicheren, aber andererseits CaO-ärmeren Schmelzen (wie beispielsweise in Nr. 56, mit 30.62 % MnO und 23.99 % CaO gleich 1 Mn : ca. 1 Ca) unterscheiden lässt. Derselben intensiven Farbe begegnen wir auch bei reinem, aus CaO-freien MnO-Silikatschmelzen auskristallisiertem MnS.

Die bekannte grüne Farbe der gleichzeitig Mangan und Schwefel enthaltenden Hochofenschlacken rührt von Mn-haltigem Sulfid her.

Aus dem obigen folgt:

1. CaS und MnS bilden eine *kontinuierliche Mischungsreihe*, CaS, (Ca, Mn)S, (Ca, Mn)S, (Mn, Ca)S, MnS.
2. Es besteht, was übrigens selbstverständlich ist, ein *Gleichgewicht* zwischen Mn : Ca in der ganzen Schmelze (oder in der Silikatverbindung) und Mn : Ca in dem ausgeschiedenen RS-Mineral.
3. Mn scheint in dem ausgeschiedenen RS-Mineral in Relation zu Ca angereichert zu werden, vielleicht sogar in ganz wesentlichem Grade.

Über *CaS : MgS*. Die bisherigen, übrigens spärlichen Analysen von Oldhamit aus Meteoriten ergeben neben überwiegend CaS ein wenig MgS, nämlich 1 MgS : ca. 20 CaS. — Der Oldhamit der Meteorite erscheint neben Silikatgemischen, die im allgemeinen viel Mg und wenig Ca führen.¹ In dem Sulfid begegnen wir dagegen umgekehrt viel Ca und wenig Mg. In dem Oldhamit der Meteorite ist somit Ca relativ sehr stark angereichert worden. — In Übereinstimmung hiermit mögen wir auch in dem Mono-sulfid in Silikatschmelzen, die neben viel Ca auch mehr oder weniger Mg führen, eine Zusammensetzung CaS mit etwas MgS annehmen, jedoch mit relativ viel weniger Mg wie in der ganzen Silikatschmelze.

¹ Außer den in HINTZE's Handb. der Min. (B. I a, 1904) erwähnten älteren Arbeiten über Oldhamit verweise ich auf die folgenden, jüngeren Meteorit-Studien, wo Oldhamit besprochen ist: WIRT TASSIN, Calciumsulfid (Oldhamit) in Allegan-Meteoriten; Proc. U. S. Nat. Mus., 34, 1908. — G. P. MERRILL, On the Monticellite-like Mineral in Meteorites and on Oldhamit as a Meteoric Constituent. Proc. Nat. Acad. of Sc., May 1915. — Derselbe, über den Indarch Meteorit Proc. U. S. Nat. Mus., 49, 1915.

Über $\text{CaS} : \text{FeS}$. — In Mangan-freien oder beinahe freien Silikat-schmelzen, mit überwiegend CaO , wie 30–40 % CaO und nur höchstens ungefähr 0.5 % FeO — somit bei 75 à 100 $\text{Ca} : 1 \text{ Fe}$ — ist unser Sulfid-mineral ganz wasserhell; in entsprechenden Schmelzen mit ungefähr 1 % FeO — somit bei rund 40 à 50 $\text{Ca} : 1 \text{ Fe}$ — ergibt sich aber eine schwach graue Nuance. Dies zeigt, daß ein wenig FeS isomorph in Oldhamit hineingehen mag.

Wie wir in dem unten folgenden Abschnitt über FeS besprechen werden, krystallisiert in kalkreichen Schmelzen mit einigen Prozent FeO — nämlich bei 1 $\text{Fe} : \text{höchstens } 10 \text{ oder } 15 \text{ Ca}$ — nicht Oldhamit, $(\text{Ca}, \text{Fe})\text{S}$, sondern Eisensulfid, FeS oder vielleicht $(\text{Fe}, \text{Ca})\text{S}$.

— Auch in Manganblende mag etwas FeS hineingehen.

Durchsichtigkeit. CaS wie auch $(\text{Ca}, \text{Mg}, \text{Mn})\text{S}$ ist im mikroskopischem Dünnschliff von der üblichen Dicke, freilich wasserhell durchsichtig, jedoch nur schwach pellucid; bei einer Dicke von etwa 0.25 mm. dürfte das Mineral nur durchscheinend werden. — Die Durchsichtigkeit von MnS wie auch von $(\text{Mn}, \text{Ca})\text{S}$ ist ein wenig niedriger wie diejenige des Calcium-sulfids.

Brechungsquotient. — Die hier besprochenen Monosulfide haben einen besonders hohen Brechungsquotienten. In Spinell eingeschlossenes Calcium-sulfid ergibt z. B., zufolge der BECKE'schen Lichtliniemethode, einen erheblich höheren Brechungsquotient als denjenigen (1.71–1.72) des Spinells, somit ziemlich sicher mindestens 2.0. — Der Quotient der Zinkblende schwankt zufolge H. E. MERWIN¹ je nach der isomorphen FeS -Beimischung für Li-Licht zwischen 2.34 und 2.395 und für Na-Licht zwischen 2.37 und 2.47; ungefähr ähnliche Werte dürften auch für CaS und MnS gelten.²

Über das Auftreten in Krystalskeletten. — Bei schneller Erstarrung, mit einer Krystallisationsperiode von etwa zehn Minuten bis ein paar Stunden, ergeben die Ca - und Mn -Monosulfide nur Krystalskelette. Dieselben sind bisweilen (siehe z. B. Fig. 14, 15, 19 c) ebenso zierlich und elegant entwickelt wie die bekannten Magnetit-Skelette in Schlacken usw.;

¹ Siehe die unten zitierte Zinkblende-Wuztzit-Arbeit (1913) von dem Geophysical Laboratory in Washington.

² Während des Krieges kann ich leider nicht das nötige Material für eine genaue Bestimmung des Berechnungsquotienten von CaS und MnS verschaffen.

oftmals aber liegen nur, um die von H. VOGELSANG¹ vorgeschlagene Terminologie zu benutzen, sogenannte Globulite, Margarite und Longulite vor. Alle diese Formen fasste er unter der Kategorie Krystallite² zusammen.

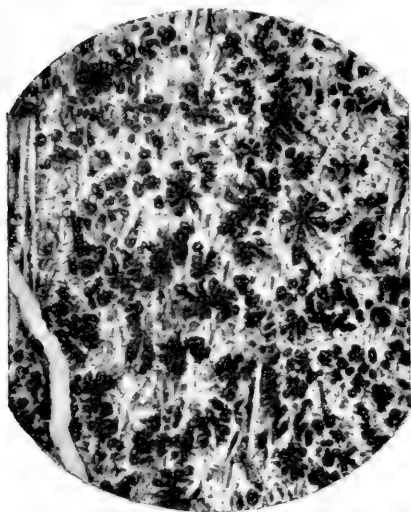


Fig. 16.

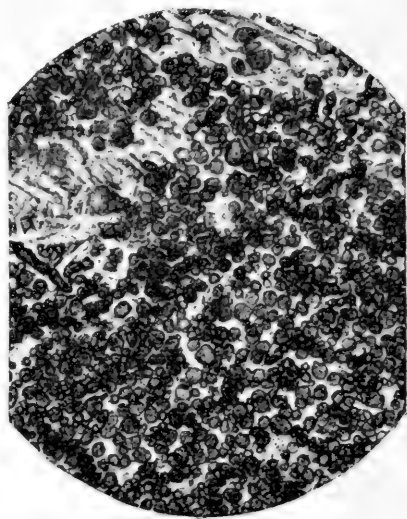


Fig. 17.

Vergrößerung 50 : 1.

25 % Ca : 75 % Äkermanit.

50 % CaS : 50 % Äkermanit.

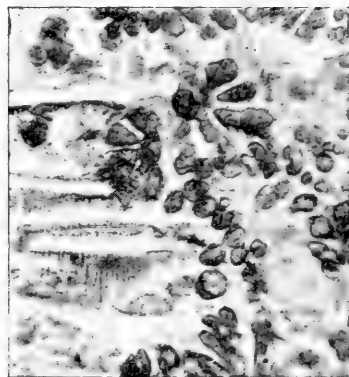


Fig. 18. Vergrößerung 120 : 1. 25 % CaS : 75 % $(\text{Ca}, \text{Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_{10}$. Stellt ein Teil von Fig. 16 in vergrößertem Maßstabe dar.

¹ Über die mikroskopische Struktur der Schlacken und über die Beziehungen der Mikrostruktur zur Genesis der krystallinischen Gesteine. Pogg. Ann. CXXI, S. 101. — Siehe auch seine spätere Arbeit, Die Krystalliten (Bonn, 1875).

² G. TAMMANN benutzt in seinem Werke „Krystallisieren und Schmelzen“ (1903) die Bezeichnung Krystallite in einer anderen Bedeutung wie VOGELSANG.

— Die Globulite sind ganz kleine kugelige Körper (siehe Fig. 16—18 und 19, a & b), die Margarite («Perlschnüre») sind reihenförmig, zu Perlschnüren angeordnete Globulite, und die Longulite sind mehr stabförmig. Ich verweise auf die beistehenden Mikrophotographien¹ und Handzeichnungen.

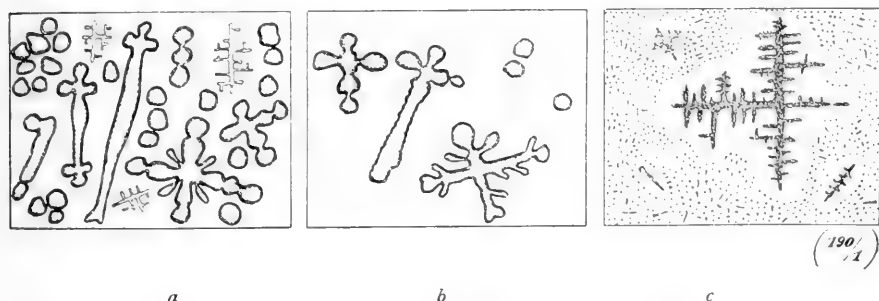


Fig. 19. Krystallite von CaS—MnS in Silikatschmelzen.

- a. CaS in Laboratoriumschmelze von 25 % CaS : 75 % Äkermanit (cfr. Fig. 16 und 18).
 b. Intensiv grünes (Mn,Ca)S in Schlacke Nr. 49 (cfr. Fig. 22). c. Intensiv grünes (Mn,Ca)S in einer Schlacke von Finnbo (cfr. Fig. 14).

VOGELSANG hat eine vorzügliche morphologische Beschreibung und prachtvolle kolorierte Tafeln seiner Krystallite gegeben. Er betonte dabei einerseits den krystallinen Habitus und andererseits den optisch-isotropen Charakter derselben. Hierdurch wurde er auf den Gedanken gebracht, daß es sich um eine eigentümliche embryonale Zwischenstufe von Silikatzusammensetzung zwischen Glas und Krystall handelte, und er wurde dadurch auf Spekulationen geleitet, die jetzt nur noch ein historisches Interesse darbieten.

CaS—MnS krystallisiert aus Silikatlösung schon bei einem Erstarrungsintervall von nur einigen, wie etwa zehn Minuten, unter gewissen Bedingungen sogar bei noch kürzerer Zeit. Und zwar scheidet sich CaS—MnS hierdurch vollständig aus, und nichts bleibt in fester Lösung in dem Glas oder in den sich bildenden Silikatmineralien (wie Glieder der Melilith- und Olivengruppen) zurück.

Bei äußerst schneller Erstarrung, nämlich in dünnflüssigen Schmelzen bei einer Dauer von nur einer oder ein paar Minuten, resultiert dagegen ein schmutzig-gefärbtes, opakes Glas, — und zwar bei Mangansulfid haltigen Silikatschmelzen von gelbbrauner Farbe. Das Sulfid mag hier in fester Lösung in dem Glas vorliegen.

¹ Siehe auch die Mikrophotographien der „tannenbaum“-förmigen CaS-Krystallite in der schon oben zitierten Abh. von E. SCHULZ, in Stahl und Eisen, 1912, II, S. 1373 und 1374.

Der bisherigen Erfahrung zufolge lassen sich Sulfid-Silikate wie Helvin (mit 5—5.5 % S, entsprechend 13.5—15 % MnS) und Danalith nicht durch Schmelzung (bei einem Atmosphären-Druck) darstellen. Im Gegenteil, schmilzt man eine Mischung von rund 15 % MnS mit den übrigen Bestandteilen des Helvins zusammen, so scheidet sich Manganblende aus. — Auf die besonderen Bedingungen für die Bildung des künstlichen Ultramarins gehe ich hier nicht ein.

Über das Eutektikum CaS : Äkermanit und über die eutektische Grenzlinie zwischen CaS-MnS und Melilith, Olivin usw.

In meinen alten Schlackenstudien (vom Jahre 1884) lenkte ich besonders die Aufmerksamkeit auf die *frühzeitige* Krystallisation von Ca, Mn-Sulfid, wenn dasselbe in einigermaßen *reichlicher* Menge, wie 3.5—6 %, vertreten war. Dabei wurde aber auch erwähnt, daß das Sulfidmineral in Silikatschmelzen, die nur eine *geringe* Menge, wie etwa 0.5 % Sulfid führen, ausschließlich auf die Glasbasis zwischen den Silikatmineral-Individuen begrenzt war. Dies bedeutet in der Tat eine Krystallisation des Sulfids erst auf einer *späten* Stufe der Erstarrung.

Hieraus folgt, daß die Krystallisations-Beziehung zwischen Ca, Mn-Sulfid einerseits und andererseits den Silikatmineralien (Melilith, Olivin usw.) — wie auch zwischen Sulfid und Spinell — von dem *quantitativen Verhältnis zwischen den betreffenden Komponenten* abhängig ist. Es mag somit ein Eutektikum (oder eine eutektische Grenzlinie) zwischen Ca, Mn-Sulfid und Melilith, Olivin usw. existieren. Daß dieser Schluß berechtigt ist, wird durch die thermische Untersuchung, bezüglich der von ein paar Prozent Sulfid bewirkten Schmelzpunkt-Erniedrigung bestätigt.

Über die Krystallisations-Beziehung zwischen Ca, Mn-Sulfid und Melilith, Olivin usw.

Meinen früheren Schlackenstudien entnehme ich eine kleine Auswahl Analysen von Hochofenschlacken (durchgängig mit einem sehr niedrigen Gehalt von FeO).

Die „alten Nummern“ beziehen sich auf die Nummern in meiner Arbeit „Mineralbildung in Schmelzmassen usw.“, 1892. — Nr. 48 von Coldness, 1879. Nr. 49 von Deutschland. Nr. 50 von Clarence, 1879. Nr. 51 von Dowlais. Nr. 52 von Dawes. Nr. 53—55 schwedische Hochofenschlacken, von bezw. Löfsjöen, 1871, Forsbacka, 1879 und Domnarfvet, 1879. — Nr. 56—57 von Schisshyttan, Schweden (bei der Darstellung von Spiegeleisen). Nr. 58 von Bethlehem, Pennsylvanien.

Nr.	Unter den Silikatmineralien zuerst Krystallisation von Melilithmineral (in reichlicher Menge).								Unter den Silikatmineralien zuerst Krystallisation von einem Olivinmineral		
	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
(Alte Nr.)	153	142	163	149	164	181	183	159	4	5	23
SiO ₂	30.08	35.54	31.40	34.32	28.32	46.86	43.51	43.85	31.80	36.5	36.86
Al ₂ O ₃	15.13	9.10	22.32	12.11	24.24	6.92	3.92	8.34	5.33	3.5	9.85
CaO	35.98	36.28	31.52	42.67	40.12	33.53	40.90	34.69	23.99	33.0	29.78
MgO	12.09	5.36	9.59	2.82	2.79	9.48	5.80	7.74	5.57	10.0	20.00
MnO	0.59	7.63	0.96	3.55	0.07	1.11	3.12	2.43	30.62	12.5	0.43
FeO	0.47	0.11	0.03	0.26	0.27	0.89	0.78	0.90	Sp.	0.5	0.49
K ₂ O	—	—	0.12	0.32	0.64	—	0.28	—	—	—	0.20
Na ₂ O	—	—	1.17	1.14	—	—	0.16	—	—	—	0.72
RS	5.48	5.24	3.68	3.47	3.38	0.92	0.65	ca. 0.5	3.56	3.5	1.23
Summe	99.78	99.28	100.79	100.66	100.09	98.71	99.12	98.45	100.87	98.5	99.56

RS = ca.	4 CaS : 1 MgS	1 CaS : 1 MnS	4 CaS : 1 MgS	4 CaS : 1 MnS	CaS	4 CaS : 1 MgS	5 CaS : 1 MnS	4 CaS : 1 MgS	1 CaS : 3 MnS	1 CaS : 2 MnS	2 CaS : 1 MgS
----------	------------------	------------------	------------------	------------------	-----	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

RS	5.5	5.2	3.7	3.5	3.4	0.9	0.6	0.5	3.6	3.5	1.2
Spinell	6.5	—	3	—	—	—	—	—	—	—	0.5
Melilith	ca. 60	ca. 70	ca. 60	ca. 60	—	ca. 70	ca. 70	ca. 65	—	—	—
Olivin	- 8	wenig	?	—	nichts	- 10	nichts ¹	ca. 75	ca. 80	ca. 40	—
Glas	- 10	ca. 20	ca. 20	ca. 35	—	ca. 30	- 20	ca. 35	- 20	- 20	- 60

¹ Ist Augit.

Auf Grundlage des analytisch bestimmten S-Prozents ist die RS-Menge, unter Voraussetzung von einer von dem Verhältnis CaO : MgO, CaO : MnO usw. in der ganzen Schmelze abhängigen Proportion CaS : MgS, CaS : MnS usw. in dem auskrystallisierten Sulfid berechnet worden. Die gewählten Proportionen, 4 CaS : 1 MgS, 1 CaS : 1 MnS usw., beruhen freilich nur auf Schätzungen. Eine geringe Verschiebung in den vorausgesetzten Proportionen würde nur einen unwesentlich kleinen Einfluß auf die berechnete RS-Menge ausüben.

In denjenigen der obigen Schlacken, die sowohl einigermaßen viel Al₂O₃ wie auch einigermaßen viel MgO führen, nämlich in Nr. 48, 50 und 58, ist etwas Spinell auskrystallisiert (siehe Silikatschmelzlös. I, S. 78—89, II, S. 164). Die Menge des Spinells ist nach Aufschließen mit HF1 und HCl quantitativ bestimmt worden. — Die angegebenen Prozente von Silikatmineral und Glas beruhen auf approximativen Bestimmungen u. d. M.

In den mehr oder minder basischen Schlacken Nr. 48 bis 55 — die sich durch die folgenden Kriterien charakterisieren: sehr viel CaO neben etwas MgO oder MgO + MnO; dabei einigermaßen viel Al_2O_3 , aber nicht so viel, daß Anorthit resultiert — hat sich unter den Silikatmineralien zuerst (oder allein) ein Glied der Melilithgruppe (Gehlenit—Melilith—Äkermanit), und zwar in bedeutender Menge, ausgeschieden.

In den ebenfalls basischen Schlacken Nr. 56—58, mit einer reichlichen Menge von MgO oder MgO + MnO im Verhältnis zu CaO, krystallisierte dagegen zuerst (oder allein) ein Glied der Olivingruppe, nämlich teils eigentlicher Olivin und teils ein Monticellit-Olivin (siehe Silikatschmelzlös. I, S. 65—69, 89—96).

Die Erstarrung der hier besprochenen Schlacken — meist von ungefähr Kubikfuß-Größe — fand einigermaßen langsam statt. Teils aus diesem Grunde und teils wegen der Dünnflüssigkeit der Schmelzen krystallisierte dasjenige Silikatmineral, das auf der ersten Krystallisations-Stufe in reichlicher Menge ausgeschieden wurde, in ziemlich großen Individuen (siehe die unten folgenden Zahlenangaben).

Der opt. Charakter des Melilithminerals in den Schlacken Nr. 48—55 ist der folgende:

- Nr. 48—49. Opt. negativ.
- „ 50. Opt. negativ (mit einem ganz schmalen, äußeren opt. pos. Saume).
- „ 51. Opt. negativ.
- „ 53. Opt. positiv.
- „ 54. Kern opt. pos.; äußere Zone opt. neg.
- „ 55. Opt. pos.

In Nr. 50 erscheint ein ganz schmaler äußerer Zonalsaum von opt. positivem Charakter, — in Nr. 54 ist andererseits der Kern, der etwas über die Hälfte des ganzen Minerals beträgt, opt. pos., die äußere Zone dagegen opt. neg. Zwischen der opt. neg. und der opt. pos. Zone tritt ein äußerst schmaler, scheinbar gänzlich opt. isotroper Saum auf (siehe ferner Silikatschmelzlös. I, S. 61—62; dabei Fig. 16, S. 120 von Nr. 54).

Die Länge des ausgeschiedenen Melilithminerals $\perp c$ und das Verhältnis der Dicke ($\mp c$) zur Länge ($\perp c$) beträgt:

	Länge $\perp c$	Dicke ($\perp c : \mp c$)
Nr. 48 . .	ca. 4 mm. ¹	$\frac{1}{2}$ à $\frac{3}{4}$
„ 49 . .	„ 4 —	$\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$
„ 50 . .	- 3 —	$\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$
„ 51 . .	ca. 1.5 à 2 —	$\frac{1}{2}$ à $\frac{3}{4}$
„ 55 (Fig. 24)	ca. 4 —	$\frac{1}{3}$
„ 53 . .	- 8 —	$\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{20}$
„ 54 . .	- 12 —	$\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{15}$

Der in Silikatschmelzen ausgeschiedene Gehlenit und eigentliche Melilith ist kurz säulenförmig (siehe Fig. 32—33) — der einigermaßen Al_2O_3 -arme Äkermanit dagegen tafelförmig, in der Regel gar dünn tafelförmig. Insofern begegnen wir einem typologischen Unterschied zwischen Gehlenit—Melilith einerseits und Äkermanit andererseits.

Das aus Schmelzfluß auskrystallisierte Melilithmineral zeigt bisweilen eine Unmenge von winzig dünnen, parallel der c-Achse eingelagerten Stäbchen, die wahrscheinlich aus Glas bestehen (siehe die Photographie Fig. 23 und die Handzeichnung Fig. 20). Diese Erscheinung erinnert an die Pflockstruktur des Meliliths der Ergußgesteine.

Dabei begegnen wir bei dem Melilith¹ der genügend viel Ca, Mn-Sulfid enthaltenden Schlacken eigentümlichen, büschelförmigen Einlagerungen von winzig dünnen Drähten von unserem Sulfid; siehe die Photographien Fig. 22, 23 und die Handzeichnung Fig. 20.

Die Zusammenwachsung dieser büschelförmigen Sulfid-Einlagerungen und des Meliliths läßt sich nur durch eine *gleichzeitige Krystallisation bei der Mineralien* erklären.

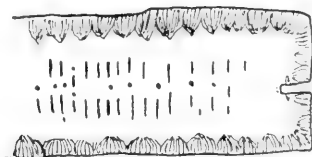


Fig. 20 (⁶⁰/₁). Schnitt von einem Melilithkrystall \perp 001 (von demselben Dünnschliff wie Fig. 23). — Zeigt in der Kernpartie die „Pflockstruktur“ und in der Randzone die büschelförmigen Sulfid-Einlagerungen.

Sulfid-reiche Melilithschlacken, mit ca. 3.5–5.5 % CaS—MnS.

In der Schlacke Nr. 48, mit 5.5 % Sulfid und 6.5 % Spinell, der letztere in meist 0.15 bis 0.3, gelegentlich sogar 0.4 mm. großen, gut entwickelten Oktaëdern, liegen die Spinell-Oktaëder größtenteils in dem Melilithmineral (Gehlenit) eingelagert. Die ganz überwiegende Menge des Spinells war somit schon vor dem Beginn der Krystallisation des Melilithminerals ausgeschieden. — Innerhalb der Spinell-Oktaëder, und zwar häufig im Kern derselben, finden wir oftmals kleine (bis 0.05 mm. große) Krystallite des Sulfids eingeschlossen. Die Krystallisation des Sulfids begann somit früher als diejenige des Spinells — und folglich erheblich früher als diejenige des Meliliths. — Dabei beobachten wir auch viele Sulfid-Krystallite an der Peripherie der Spinell-Oktaëder halb eingeschlossen wie auch an der Oberfläche der Spinell-Oktaëder angewachsen (siehe Fig. 21). Dies bedeutet eine fortgesetzte Ausscheidung des Sulfids nach dem Beginn der Verfestigung des Spinells, also eine gleichzeitige Krystallisation von Sulfid und Spinell. — Viele Krystallite («Globulite», «Longulite» usw.) liegen auch frei für sich, ohne unmittelbare Begleitung von Spinell, in dem Melilith eingelagert; und der Melilith zeigt die schon oben besprochenen Sulfid-Büschel, was kundgibt, daß etwas Sulfid noch während der Verfestigung des Meliliths ausgeschieden wurde.

¹ Melilith wird hier als kurze Bezeichnung für irgend ein Glied der Melilithgruppe benutzt.

Die anfänglichen Krystallisations-Stufen waren somit:

zuerst nur Sulfid;

dann Sulfid und Spinell gleichzeitig;

späterhin Beginn der Ausscheidung von Melilith, unter fortgesetzter Ausscheidung von Sulfid. — Aus physico-chemischen Gründen darf eine fortgesetzte Ausscheidung — freilich in geringer Menge (siehe unten S. 90) — auch von Spinell vorausgesetzt werden. Dies läßt sich jedoch im vorliegenden Fall nicht aus der Struktur ablesen.

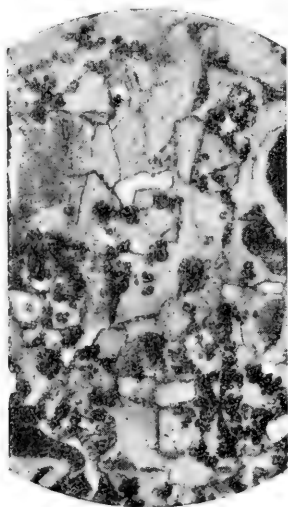


Fig. 21 a.

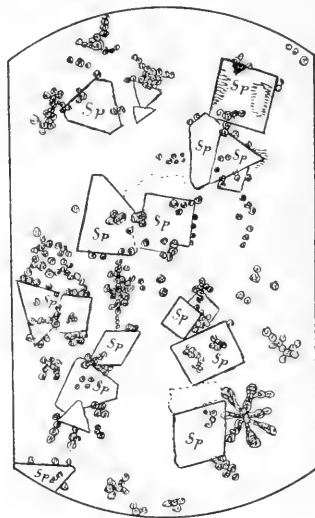


Fig. 21 b.

Vergrößerung 50 : 1.

Schlacke Nr. 48, bestehend aus: 5.5 % CaS, 6.5 % Spinell, ca. 60 % Melith, ca. 8 % Olivin und ca. 10 % Glas. — An Fig. 21 b sind nur das Sulfid (an der Photographie Fig. 21 a ziemlich dunkel) und der Spinell (Sp.) eingezeichnet. Die büschelförmigen Sulfid-Einlagerungen in dem Melilith sind ausgelassen. — Zwei kleine Luftblasen sind an Fig. 21 b durch feine Punktierung angegeben.

In Nr. 49, mit 5.2 % (Mn, Ca)S — ohne Spinell — begegnen wir in entsprechender Weise einerseits sogar ziemlich großen Krystalliten von dem Sulfid (siehe Fig. 19 b und 22) in dem Melilith eingebettet und andererseits den äußerst feinen büschelförmigen Sulfid-Einlagerungen. Rings herum um die größeren Krystalliten beobachten wir einen kleinen «Hof» (siehe Fig. 22), was ergibt, daß die innerhalb eines kleinen Raums anfänglich in Lösung vorhandene Sulfid-Menge zu der Bildung der größeren Krystallite verbraucht wurde.

Bei einigen Melilithschlacken mit rund 3.5 % Sulfid, wie Nr. 50—52, treten die büschelförmigen Sulfid-Einlagerungen sowohl im Kern wie in der äußeren Zone der Melilith-Individuen auf.

Melilithschlacken mit etwa 1 bis 2 % Sulfid. — In einer Melilithschlacke von Pennsylvanien, bestehend aus ca. 70 % Melilithmineral (eingermaßen dünn-tafelförmig, opt. pos., in bis 10 mm. breiten Tafeln), ca. 30 % Glas und gegen 2 % Sulfid, ist die innere Hälfte der Individuen des Melilithminerals gänzlich frei von Sulfid-Einschlüssen. In der äußeren Zone des Melilithminerals finden sich dagegen, wie aus der Photographie Fig. 23

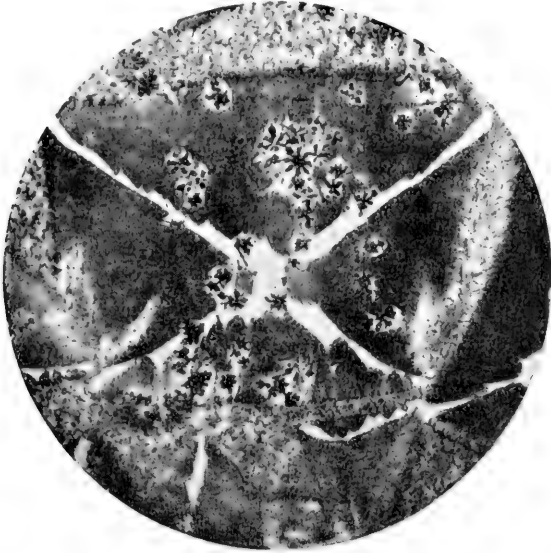


Fig. 22 ($\frac{50}{1}$). Schlacke Nr. 49, bestehend aus 5.2 % (Mn, Ca)S, ca. 70 % Melilith, zwischen denselben ein wenig Olivin und ca. 20 % Glas. — In der Mitte und dem oberen Teil der Photographie (von Dünnschliff in durchfallendem Lichte, ohne gekreuzte Nicolls) sieht man einen ca. 3 mm. langen Krystall von Melilith, annähernd \pm 001 geschnitten. Das weiße „Kreuz“ innerhalb des Meliliths rührt von der Wachstumsrichtung desselben her. Innerhalb des Meliliths liegen frühzeitig auskrystallisierte Sulfid-Krystallite (in etwas vergrößertem Maaßstabe, siehe Fig. 19, b). Außerdem sieht man die feinen, büschelförmigen Einlagerungen von dem grünen Sulfid in dem Melilith.

(und der Handzeichnung Fig. 20) ersichtlich ist, die üblichen büschelförmigen Sulfid-Einlagerungen. Und in dem Glas zwischen den Melilith-Individuen erscheinen kleine Krystall-Skelette des Sulfids.

Die Krystallisation des Sulfids fing somit erst an, nachdem die Menge desselben, nach der Auskrystallisation von etwas Melilith, schätzungsweise bis zu etwa 2.5 % gestiegen war.

Und in der Schlacke Nr. 54, bestehend aus rund 70 % Melilithmineral (der innere, etwa zwei Drittel betragende Kern opt. pos., die äussere etwa ein Drittel betragende Schale opt. neg.), neben 0.65 % Sulfid ist der opt. positive Kern der ziemlich großen Krystalle (siehe S. 68) gänzlich frei von Sulfid. Dasselbe erscheint zuerst in der äußersten Zone

der opt. negativen Schale, dabei auch in dem Zwischenraum zwischen den Individuen des Melilithminerals. Die Krystallisation des Sulfids begann somit erst, nachdem die Menge desselben in dem Schluß-Magma schätzungsweise bis zu mindestens 2 % angereichert war.

Melilithschlacken (Åkermanitschlacken) mit einer ganz niedrigen Sulfidmenge, wie 0.5 % oder darunter.



Fig. 23 (⁵⁰/₁). Melilithschlacke von Pennsylvanien (cfr. Fig. 20). — Mehrere Melilithkrystalle annähernd \perp geschnitten. — In der Kernpartie der Melilithe sieht man die „Pflöckstruktur“, und in der Randpartie die büschelförmigen Sulfid-Einlagerungen, die sich an der Photographie ziemlich dunkel abzeichnen. — Zwischen den Melilithkrystallen etwas lichtes Glas, mit zahlreichen äußerst feinen Sulfid-Krystalliten.

Eine Reihe von mir mikroskopisch untersuchten schwedischen Hochofenschlacken (vom Holzkohlenbetrieb), mit ungefähr 0.3–0.5 % RS (hauptsächlich CaS) und bestehend aus 42–46 % SiO_2 , 3.5–7 % Al_2O_3 , 33–38 % CaO, 6–10 % MgO nebst ein wenig MnO¹ ergeben in der Regel nur drei Bestandteile: 1) Melilithmineral (Åkermanit), meist in 10–15 mm. breiten, aber ganz dünnen Tafeln, 50 à 70 % der ganzen Masse betragend. 2) Sulfid und 3) Glas. In diesen an Sulfid armen Schlacken tritt das Sulfid nirgends als Einschlüsse innerhalb der Melilithmineralien auf, sondern ist auf das Glas zwischen denselben begrenzt. — Ich verweise auf die nachstehende Photographie Fig. 24, von Nr. 55.² (Um die

¹ Siehe die Nummern 65–71 und 73 in Silikatschmelzlös. I, S. 14.

² Diese Schlacke enthält 8.34 % Al_2O_3 , somit etwas mehr Al_2O_3 als die oben erwähnten Åkermanitschlacken. Indem ich auf die Angaben S. 68 verweise, bemerken wir, daß das hiesige Melilithmineral nicht tafelförmig, sondern kurz säulenförmig entwickelt ist.

Individuen des Melilithminerals leichter beobachten zu können, ist diese Photographie unter gekreuzten Nicolls aufgenommen. Das in dem Glase stehende Sulfid tritt freilich hierdurch nicht hervor).

Sulfid-führende Olivinschlacken. — In Schlacken mit 3.5 bis 4 % Ca, Mn-Sulfid, wie beispielsweise Nr. 56 (mit 3.56 % (Mn, Ca)S, siehe Fig. 15),

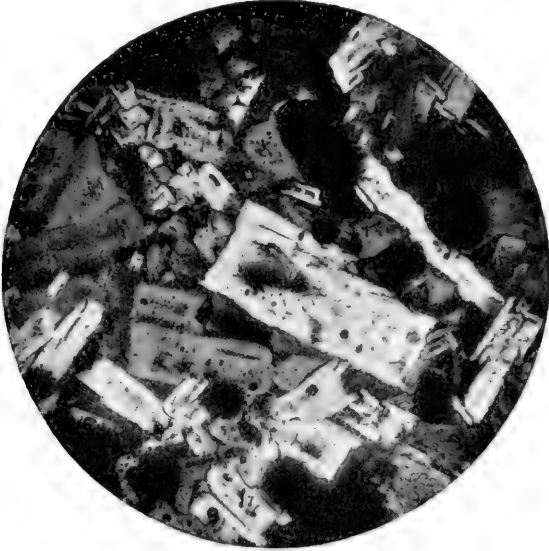


Fig. 24 ($\frac{50}{1}$). Melilithschlacke von Domnarfvet, Analyse Nr. 55, in durchfallendem Lichte bei gekreuzten Nicolls. — Innerhalb der Melilithkrystalle gibt es keine Sulfid-Krystallite; solche treten dagegen in dem Glas zwischen den Melilithkrystallen auf. — Einige runde Partien (schwarz) sind Luftblasen.

tritt das Sulfid als Einschluß, bisweilen sogar als prachtvoll entwickelte Krystallskelette, innerhalb der Olivinindividuen, und zwar auch im Kern derselben auf. Bei so viel wie 3.5–4 % RS begann somit die Krystallisation des Sulfids früher wie diejenige des Olivins, bezw. Monticellit-Olivins.

In den Sulfid-armen Olivin-Schlacken begann dagegen die Krystallisation des Sulfids erst auf einer späteren Stufe.

Als Beispiel nehmen wir Nr. 58, bestehend aus: 1.2 % Sulfid, 0.5 % Spinell, ca. 40 % Olivin und Rest Glas. — Innerhalb der Olivinkrystalle — und zwar auch im Kern derselben — beobachten wir viele kleine Spinell-Oktaëder. Das Sulfid, das hier z. T. in zierlichen, aber ganz kleinen Krystallskeletten erscheint, ist dagegen auf das Glas zwischen den Olivinkrystallen begrenzt (siehe Fig. 25). Die Krystallisation des Sulfids begann somit erst, nachdem die RS-Menge in dem Schluß-Magma auf etwa 2 % gestiegen war.

Zufolge den obigen Angaben beginnt — in Silikatschmelzen mit 60 bis 70 % Melilith, bzw. ungefähr ebenso viel Olivin — die Krystallisation des Sulfid früher als diejenige des betreffenden Silikatminerals, nicht nur wenn die Menge des Sulfids 5,5, 5, 4,5, 4 % beträgt, sondern auch bei ca. 3,5 %, wahrscheinlich auch bei rund 3 %, oder vielleicht bei noch etwas weniger wie 3 % Sulfid. Andererseits beginnt, wenn wir nur Silikat-



Fig. 25 ($\frac{70}{1}$). Olivinschlacke von Bethlehem, Penn., Analyse Nr. 58, bestehend aus: 0,5 % Spinell, 1,2 % Sulfid, ca. 40 % Olivin, ca. 60 % Glas. — Die kleinen Spinell-Oktäeder, hauptsächlich innerhalb der Olivinkrystalle, treten auf der Photographie nicht hervor. — Das Sulfid, in kleinen Krystallskeletten (auf der Photographie ziemlich schwarz) erscheinen innerhalb des Glases und der Randpartie der Olivinkrystalle.

mineral (Melilith, bzw. Olivin) und Sulfid berücksichtigen, die Krystallisation des betreffenden Silikatminerals erst, wenn die Sulfid-Menge nur 1, 1,5 oder etwa 2, vielleicht sogar ein wenig mehr wie 2 % erreicht. Die Individualisationsgrenze mag somit bei 2 bis 3 %, also rund bei etwa 2,5 % liegen. — Diese Angabe ist freilich nicht genau, und sie mag zudem von der Zusammensetzung des betreffenden Silikatminerals (Melilith, bzw. Olivin, beide von ziemlich wechselnder Zusammensetzung) wie auch von der Zusammensetzung des Sulfidminerals, CaS , $(\text{Ca}, \text{Mn})\text{S}$, $(\text{Ca}, \text{Mn})\text{S}$, $(\text{Mn}, \text{c})\text{S}$ und MnS , beeinflusst werden.

Thermische Untersuchung. — In dem hiesigen chemischen Laboratorium habe ich, mit Assistance von stud. min. B. DIETRICHSON, pyrometrische Schmelzversuche mit $(\text{Ca}, \text{Mg})_2\text{Si}_2\text{O}_7$ (0,7 Ca : 0,3 Mg, = 46,9 % SiO_2 , 40,6 % CaO , 12,5 % MgO) und mit demselben Silikat nebst 2,3 % CaS ausgeführt.

Einwäge: 1100 gr. Silikat.

Das Silikat wurde zuerst eingeschmolzen und bis ca. 1460° erhitzt. Die Stromstärke (cfr. S. 4) wurde dann auf ca. 1125° reguliert und die Abkühlungskurve (mit Le Chatelier Pyrometer) abgelesen. Nachher wurde die Stromstärke auf ca. 1460° reguliert und die Schmelzkurve abgelesen. Dieselben Operationen wurden gleich wiederholt. Ich bekam auf diese Weise zwei — und zwar gut übereinstimmende — Schmelzkurven und drei ebenfalls gut übereinstimmende Abkühlungskurven.

Die erhaltene Schmelze wurde fein pulverisiert, mit 2.3 $\frac{0}{10}$ CaS (97.7 $\frac{0}{10}$ (Ca, Mg) $_4$ Si $_3$ O $_{10}$: 2.3 $\frac{0}{10}$ CaS) gemischt, und ein Schmelzversuch, ebenfalls mit zwei Schmelzkurven und drei Abkühlungskurven, ausgeführt.

Bezogen auf das Intervall 1200° — 1400° dauerte bei dem reinen Silikat die Schmelzung bzw. 19 und 21 Minuten, und die Abkühlung 1400° — 1200° bzw. 22.5, 23.5 und 19 Minuten.

Die Schmelzkurve von (Ca, Mg) $_4$ Si $_3$ O $_{10}$ ergab einen charakteristischen flachen Verlauf von 1290° (Anfang) bis 1310° oder 1312° (Schluß), mit Dauer der Schmelzung ziemlich genau 6 Minuten.

Bei der Abkühlungskurve liegt der entsprechende, jedoch etwas mehr abgerundete Verlauf der Kurve etwas niedriger, nämlich bei 1280° bis ca. 1240° . — Die Krystallisation des Åkermanits begann somit erst nach einer gewissen *Unterkühlung*, die ca. 30° oder 30° à 40° betrug.

Zum Vergleich verweise ich auf einen früheren Schmelzversuch von mir (Silikatschmelzlös. II, S. 15, 19, 21—23 und Taf. 1), mit demselben Silikat, (Ca, Mg) $_4$ Si $_3$ O $_{10}$ (0.7 Ca : 0.3 Mg), aber mit Einwäge 19 — neunzehn — Kilogram, das in einem großen Graphittiegel eingeschmolzen wurde. — Die Erstarrung dauerte bei diesem Versuch :

1310° — 1307° 14.5 Minuten

1307° — 1300° 4 —

dabei 1300° — 1290° ca. 6 --

somit alles in allem ca. 24.5 Minuten oder rund 25 Minuten.

Ich lenke besonders die Aufmerksamkeit darauf, daß die jetzt erhaltene *Schmelzkurve* (bei Dauer der Schmelzung 6 Minuten) und die früher erhaltene *Abkühlungskurve*¹ (bei Einwäge 19 Kilo und bei einer Dauer der Krystallisation von rund 25 Minuten) einander beinahe mathematisch genau decken.

Dies bedeutet, daß die *Krystallisation des Åkermanits bei der großen Einwäge (19 Kilo) und bei einer langen Dauer der Krystallisation (rund 25 Minuten) ohne nachweisbare Unterkühlung stattfand*.

Bei der *kleinen* Einwäge (1.1 Kilo) und der *kurzen* Dauer der Erstarrung (ca. 6 Minuten) konstatieren wir dagegen eine *Unterkühlung*, 30° à 40° betragend.

¹ Dieselbe wurde mit demselben (justierten) Voltmeter wie die jetzige Schmelzkurve aufgenommen.

— Der annähernd horizontale Verlauf der *Schmelzkurven*¹ von dem reinen Silikat, bzw. von dem Silikat nebst 2.3 % CaS, betrug:

$$\begin{array}{lcl} 100 \% (\text{Ca, Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_{10} & & 1290^0 - 1310^0 \\ 97.7 \cdot (\text{Ca, Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_{10} + 2.3 \% \text{ CaS} & . . & 1235^0 - 1265^0, \end{array}$$

somit im letzterem Falle rund 50^0 niedriger.

2.3 % CaS bewirkt somit mit Sicherheit² eine *Schmelzpunkt-Erniedrigung* von ungefähr 50^0 .

— Durch diese Untersuchung wird bestätigt, daß die oben besprochene Individualitonsgrenze zwischen RS einerseits und Melilith, Olivin andererseits eine eutektische Grenzlinie darstellt. Das Eutektikum $(\text{Ca, Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_4 : \text{CaS}$ dürfte am nächsten bei ungefähr 2.5 % CaS liegen.

Zu einem approximativen Aufzeichnen der *Schmelzkurve* (Fig. 26) zwischen CaS und $(\text{Ca, Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_{10}$ ³, haben wir die folgenden Daten:

- ¹ Die *Abkühlungskurve* von 97.7 % Sil. : 2.3 % CaS zeigt ebenfalls eine Erstarrung von rund 50^0 niedriger wie die Abkühlungskurve von dem reinen Silikat. In beiden Fällen (mit beinahe genau derselben Einwäge usw.) trat somit ziemlich genau dieselbe Unterkühlung ein.
- ² Von jedem der beiden Schmelzversuche liegen *zwei* gut übereinstimmende Schmelzkurven vor. Bei Temperatur als Ordinaten (und Zeit als Abscisse) schwankt der vertikale Unterschied zwischen den Schmelzkurven einerseits von dem Silikat und andererseits von dem Silikat (NB. dem ursprünglichen Silikat gepulvert) plus 2.3 % CaS zwischen 45^0 und 55^0 . Die Schmelzpunkt-Erniedrigung ist somit $50^0 \pm 5^0$. Die Fehlergrenze erreicht nur ein Zehntel des Wertes.
- ³ Es handelt sich hier freilich um ein Mischkristall, jedoch ziemlich sicher nur mit geringem Unterschied zwischen den Konstituenten. Wir machen uns somit, in betreff der Frage über die gegenseitige Löslichkeit von Sulfid und Silikat, nur eines unwesentlichen Fehlers schuldig, wenn wir hier das Silikat als eine einheitliche Komponente betrachten.

Falls es sich ergeben würde, daß der Åkermanit nicht aus $(\text{Ca, Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_{10}$ — bei 0.7 Ca : 0.3 Mg = 46.9 SiO₂, 40.6 CaO und 12.5 MgO, — sondern aus $(\text{Ca, Mg})_3\text{Si}_2\text{O}_7$ — bei 0.7 CaO : 0.3 Mg = 44.0 SiO₂, 42.8 CaO und 13.2 MgO — besteht, so würde dies unseren Schluß über die durch CaS bewirkte Schmelzpunkt-Erniedrigung nicht beeinflussen. Bei der Konstitution $(\text{Ca, Mg})_3\text{Si}_2\text{O}_7$ würde sich aus unserer Schmelze neben überwiegend Åkermanit auch ein wenig von anderen (als Glas erstarrten) Silikatkomponenten bilden, — aber in *gleicher* Menge bei unseren zwei Parallel-Versuchen (teils ohne CaS und teils mit 2.3 % CaS). Um bei den beiden Parallel-Versuchen mit genau derselben Silikatschmelze arbeiten zu können, wurde 97.7 % von der gepulverten Schmelze aus dem ersten Versuch mit 2.3 % CaS umgeschmolzen.

- a) Die obige Bestimmung der Schmelzpunkt-Erniedrigung.
- b) Die S. 57 referierte frühere Untersuchung (mit einer Melilithschlacke) von ERDMANN SCHULZ, woraus sich ergibt, daß der Punkt an der Schmelzkurve bei 18.5 % CaS 1400° höher liegt, wie bei 3.7 % CaS.
- c) In betreff der Gemische mit sehr viel CaS siehe meine obigen Angaben (S. 58—59) über die teils geschmolzenen und teils ungeschmolzenen Gemische.

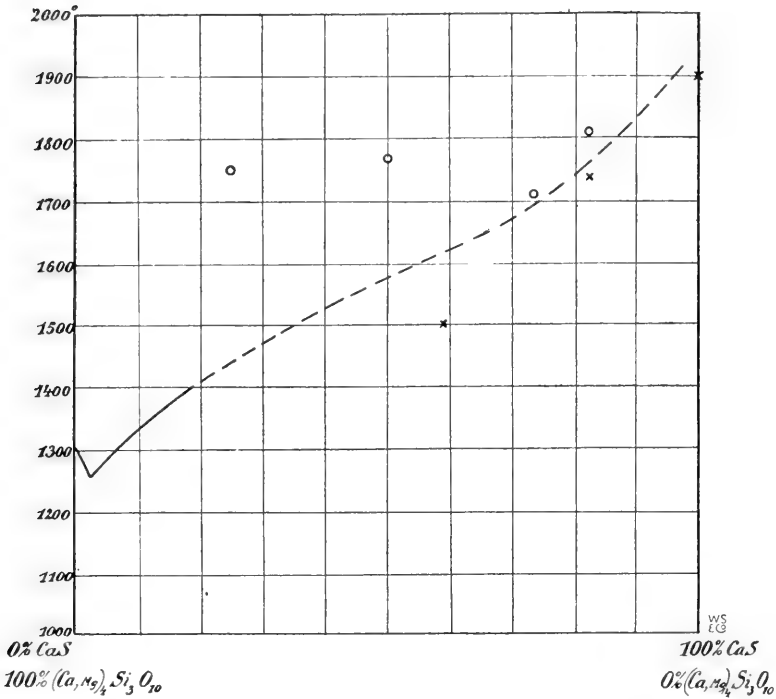


Fig. 26.

Das System $(\text{Ca}, \text{Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_{10} : \text{CaS}$.

Die kleinen Kreise bezeichnen die *geschmolzenen*, die kleinen Kreuze dagegen die *ungeschmolzenen* Gemische.

Eine thermische Untersuchung über das binäre System $MnS : MnSiO_3$ ist von A. WOŁOSKOW, an dem Laboratorium von Prof. LOEWINSON-LESSING in Petrograd (1911, l. c. S. 5), ausgeführt worden.

Verschiedene Gemische von MnS und $MnSiO_3$ wurden im elektrischen Kryptofen eingeschmolzen, und mittels der *Abkühlungsmethode* wurde, mit selbstregulierendem Einzeichnen der Erstarrungskurven, a) der Anfang der Krystallisation und b) der Haltepunkt bei dem Eutektikum abgelesen. Seine Resultate waren, indem ich das $MnS : MnSiO_3$ -Verhältnis nicht nur in Molekularprozent, sondern auch in Gewichtsprozent angebe:

MnS : MnSiO ₃				Punkt an der Erstarrungs- kurve	Haltepunkt am Eutektikum °
Molekularprozent		Gewichtsprozent			
MnS	MnSiO ₃	MnS	MnSiO ₃		
0	100	0	100	1216 °	—
3.43	96.57	2.30	97.70	1180	1125 °
6.85	93.15	4.65	95.35	1130	1130
12.93	87.07	9.00	91.00	1201	1130
22.12	77.88	15.83	84.17	1324	1132
30.12	69.88	22.21	77.79	1425	1134
39.83	60.17	30.46	69.54	1549	1128

Zufolge einer späteren Untersuchung von RÖHL (1912, siehe oben S. 2) ist der Schmelzpunkt von $MnS = 1620^0$.

Also: $MnSiO_3$ (Rhodonit), Schmelzpunkt 1216°

Eutektikum $MnS : MnSiO_3$ 1130°

MnS , Schmelzpunkt 1620°.

Die Schmelzpunkt-Erniedrigung am Eutektikum betrug somit 86° (vergleichen mit $MnSiO_3$).

WOŁOSKOW's Bestimmung der prozentischen Zusammensetzung des Eutektikums, nämlich 6.85 Mol.-Proz. $MnS : 93.15$ Mol.-Proz. $MnSiO_3$, entsprechend 4.65 Gew.-Proz. $MnS : 95.35$ Gew.-Proz. $MnSiO_3$, gründet sich nur auf einen einzelnen Versuch (Nr. 3); mehrere Versuche mit naheliegenden Schmelzen (oder Bestimmung der Krystallisationsfolge bei wechselnden niedrigen Mengen von MnS) wären wünschenswert gewesen. — WOŁOSKOW betont dabei, daß ein wenig MnS beim Einschmelzen oxydiert wurde. Seine Angabe über die Zusammensetzung des Eutektikums (mit 4.65 Gew.-Proz. MnS) dürfte somit ein wenig zu hoch ausgefallen sein. Dabei sind die Versuche nach der Abkühlungs- und nicht nach der Schmelzmethode ausgeführt (cfr. S. 75—76).

Sein Resultat bezüglich der Zusammensetzung des Eutektikums zwischen Sulfid (MnS) und Silikat (Rhodonit) stimmt insofern mit dem meinigen,

zwischen CaS oder (Ca, Mn) S und Melilith, bzw. Olivin, als wir alle beide folgendes gefunden haben:

nur ganz wenig Sulfid (ein paar oder einige Prozent) gegen beinahe 100 Prozent Silikat (Melilith, Olivin, Rhodonit).

Als ein Hauptresultat wollen wir hervorheben, daß die für die Kristallisation aus den üblichen, elektrolytisch dissoziierten Lösungen geltenden *physikalisch-chemischen Gesetze* sich auf das System *Sulfid (RS) : Silikat* anwenden lassen;

die *Sulfid:Silikatschmelzlösungen* sind somit *nicht* von *kolloidal*er Natur.

WOŁOSKOW untersuchte auch das System BaS:BaSiO₃ (Schmelzpunkt von BaSiO₃ = 1464° und von BaS = sehr hoch, wahrscheinlich mindestens 1700°, siehe oben S. 5) und bestimmte das Eutektikum zu 1325° (somit Schmelzpunkt-Erniedrigung = ca. 140°) und von Zusammensetzung ungefähr 25 Mol.-Proz. BaS: 75 Mol.-Proz. BaSiO₃, entsprechend ungefähr 20 Gew.-Proz. BaS: 80 Gew.-Proz. BaSiO₃. — Die BaS-Menge in dem Eutektikum scheint auffallend hoch zu sein; es wäre möglich, daß der Wert wegen Oxydation von BaS zu hoch gefunden worden ist.

Eine Untersuchung von P. LEBEDEV¹ über das System CaS:CaSiO₃ setze ich außer Betracht. Seine erhaltenen „langsam abgekühlten Schmelzen zerfielen allmählich“ . . . „Einige rasch abgekühlte Schmelzen zerbröckelten momentan“ usw. — Die Erscheinung tritt weder bei CaS noch bei CaSiO₃ oder Gemischen derselben ein. Dagegen ist das „Zerfallen zu Staub“ eine längst bekannte Erscheinung bei Ca₂SiO₄ wie auch bei Schmelzen, die sehr viel Ca₂SiO₄ enthalten². — Bei LEBEDEVs Versuchen mag mehr oder weniger CaS zu CaO oxydiert worden sein. Er erhielt dadurch CaSiO₃ + CaO = Ca₂SiO₄, was das „Zerfallen“ veranlaßte.

Über die Molekulardepression einiger Silikate und über die Molekulargrößen der in Silikatschmelzen gelösten Sulfide.

Indem wir auf die Erörterung S. 9 verweisen, geben wir eine Tabelle a) über die Schmelzpunkte einiger Silikatmineralien, und b) über die latente Schmelzwärme derselben. Hieraus berechnet sich c) die Molekulardepression

$\left(0.0199 \cdot \frac{T^2}{q}, \text{ wo } T = \text{abs. Temp.}\right).$

	Schmelzpunkt	Schmelzwärme pr. gr.	Molekulardepression
Anorthit, CaAl ₂ Si ₂ O ₈ . . .	1550°	104.2 Cal., ca. 105 Cal.	635
Diopsid, CaMgSi ₂ O ₆ . . .	1391	„ 94 „	ca. 585
Äkermanit, (Ca,Mg) ₄ Si ₃ O ₄ .	1310	„ 90 „	„ 550
Fayalit, Fe ₂ SiO ₄	ca. 1075	„ 80 „	„ 450

¹ Zeitschr. f. anorg. Chemie, Bd. 70, 1911, S. 301–309.

² Siehe meine Abh. in Tschemm. Min. Petrogr. Mitt. XXVII, 1908, S. 118, Note am Fuß der Seite und die dort zitierte Abh. von dem geophysischen Laboratorium zu Washington, 1906. — Sp. Gew. von α-Ca₂SiO₄ = 3.27, von β-Ca₂SiO₄ = 3.28, von γ-Ca₂SiO₄ dagegen nur 2.97; somit Erweiterung von beinahe 10 0/0.

Die Angaben über die Schmelzpunkte von Anorthit und Diopsid stammen von dem Washington-Laboratorium und diejenige von Åkermanit (mit 0.7 Ca : 0.3 Mg; eigentlich ein Mischkristall mit einem geringen Schmelzpunktintervall) von mir; die Angabe von Fayalit ist nur angenähert.

Die Angabe 104.2 gr.-Cal. als Schmelzwärme pr. gr. Anorthit ist von N. L. BOWEN (Die Schmelzerscheinungen bei den Plagioklas-Feldspaten, Zt. f. anorg. Chemie, Bd. 82, 1913) berechnet worden; die anderen Angaben über die latente Schmelzwärme rühren von mir (Silikatschmelzlös. II, 1904; siehe Revision in meiner Abh. „Die Schlacken“ in Doelters Handb. d. Mineralchemie, Bd. 1, 1912) her. — Die auffallend gute Übereinstimmung zwischen den zwei Bestimmungen in betreff Anorthit mag als eine Zufälligkeit betrachtet werden.

Wir berechnen die von einem Gewichtsprozent CaS (= $1/72$ Mol.-Proz.), bzw. einem Gewichtsprozent MnS (= $1/87$ Mol.-Proz.) bewirkte Schmelzpunkt-Erniedrigung bei einer Molekulardepression von 550, indem wir teils nicht dissoziiertes und teils elektrolytisch vollständig dissoziiertes Sulfid voraussetzen.

Berechnete Schmelzpunkt-Erniedrigung von 1 Gew.-Proz. Sulfid:

	ohne Dissoziation	bei vollständiger Dissoziation
CaS	76°	15.3°
MnS	6.3°	12.7°

Unter Voraussetzung eines geradlinigen Verlaufs der Schmelzkurve in der nächsten Nähe der Silikatseite würde dies bei 2.5 Gew.-Proz. CaS eine Schmelzpunkt-Erniedrigung von bezw. 19.5 und 39°, und bei 4.65 Gew.-Proz. MnS von bezw. 31 und 62° liefern. Erfahrungsmäßig verlaufen die Schmelzkurven nahe dem Eutektikum gern relativ steil; die berechneten Werte mögen somit ein wenig zu niedrig sein.

In der Tat wurde bei ungefähr 2.5 Gew.-Proz. CaS (von mir) am Eutektikum (mit Åkermanit, Molekuldepression = 550) eine Schmelzpunkt-Erniedrigung von $50^{\circ} \pm 5^{\circ}$ und bei 4.65 Gew.-Proz. MnS (von WOŁOSKOW, gegen Rhodonit) von ungefähr 86° gefunden.

Die angenäherte Übereinstimmung zwischen »berechnet« und »gefunden« berechtigt zu dem Schluß, daß die betreffenden Sulfide in Silikatschmelzlösung nicht polymerisiert sind, sondern in der einfachen Molekulargröße CaS, MnS vorliegen, — und ferner, daß die Sulfide stark elektrolytisch dissoziiert sind. — Das letztere ist auch *a priori* in betreff der stark verdünnten Sulfidlösungen anzunehmen.

Sowohl in betreff der nur aus Sulfiden (FeS, PbS, Cu₂S, Ag₂S usw., siehe S. 16) bestehenden *Sulfidschmelzen* wie auch in betreff der *Silikatschmelzen* mit einer geringen Menge von aufgelöstem Sulfid (CaS, MnS) erhalten wir somit als Resultat, daß eine *Polymerisation des Sulfids ausgeschlossen sein mag*. In den verdünnten Silikatschmelzen mag dabei eine weitgehende elektrolytische Dissoziation des Sulfids vorliegen.

Über $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$ in Silikatschmelzen.

Wir beginnen mit einer Übersicht über die Zusammensetzung einer Reihe von mir mikroskopisch untersuchten Schlacken (Rohschlacken usw.), wo Zinksulfid nachgewiesen ist.

Analyse Nr. 59.

SiO_2	20—34 $\frac{0}{100}$
Al_2O_3	meist 3—7 „ , gelegentlich etwas mehr
Fe_2O_3	0.25—1 „ , gelegentlich ein wenig mehr
FeO	35—50 „
ZnO^1	7—18 „
CaO	meist ein paar „ , selten bis 10 $\frac{0}{100}$
MgO	meist 1—3 „
PbO	0—2 „ (selten ein wenig mehr)
Cu^2	meist 0.2—0.5 „
$\text{MnO}, \text{NiO}, \text{CoO}, \text{CdO}$	Null oder Spuren

Dabei S, in einer Totalmenge (in RS plus Steinkügelchen) von meist zwischen 1.25 und 3 $\frac{0}{100}$ S. Für Einzelheiten siehe die Analysen Nr. 60—62.

Nach Abzug der von den Steinkügelchen (siehe S. 39) herrührenden S-Menge erhalten wir die Menge von S in RS, nämlich in Schlacken mit ungefähr 10—14 $\frac{0}{100}$ ZnO (und bei Ofentemperatur von ungefähr 1300 $^{\circ}$)

Schlacken mit	$\frac{0}{100}$ S	Entsprechend $\frac{0}{100}$ $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$
30—35 $\frac{0}{100}$ SiO_2	ca. 0.7—1	2—3
25—29 „ „	„ 1 — 1.4	3—4
20—24 „ „	„ 1.4—1.8	4—5

Wir begegnen somit auch hier einer Zunahme des gelösten Sulfids mit steigender Basizität der Silikatschmelzen (cfr. S. 49—50).

Die mineralogische Zusammensetzung der hier besprochenen Schlacken ist die folgende:

ein isotropes, gelbes oder gelbbraunes Mineral, $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$, worüber mehr unten;

beinahe in allen Schlacken — nämlich in allen mit Ausnahme derjenigen, die gleichzeitig wenig Al_2O_3 und wenig ZnO führen — etwas *Zinkspinell* (siehe hierüber in einem unten folgenden Abschnitt);

¹ Die ganze durch die Analyse gefundene Zinkmenge, somit auch Zn in ZnS , wird hier als ZnO angegeben.

² Hauptsächlich oder ausschließlich in mechanisch mitgerissenen Steinkügelchen (siehe oben S. 39 und unten S. 103—119).

Magnetit, in einer von dem Fe_2O_3 -Gehalt der Schlacke abhängigen Menge, meist ein oder ein paar Prozent;

Fayalit, nämlich *zinkhaltiger Fayalit* oder kurz *Zinkfayalit*¹ genannt, $(\text{Fe}, \text{Zn})_2\text{SiO}_4$, in reichlicher Menge, gern etwas über die Hälfte der ganzen Schlacke ausmachend;

bei besonderer chemischer Zusammensetzung und relativ langsamer Abkühlung mag außer Zinkfayalit auch ein anderes Silikatmineral (namentlich Melilith, in basischen Schlacken mit relativ viel Al_2O_3 und CaO) sich auf einer späteren Stufe der Erstarrung gebildet haben;

als Schlußprodukt der Erstarrung begegnen wir etwas *Glas*, meist in einer Menge zwischen ca. 10 und 30 %.

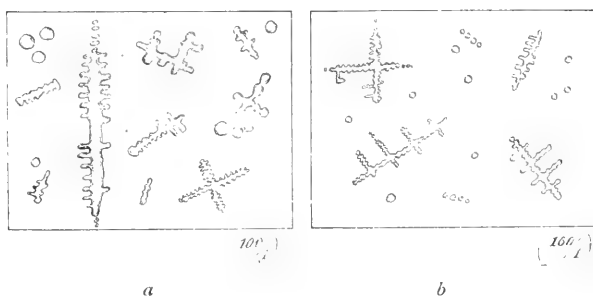


Fig. 27.

Krystallite von $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$, teils in Fayalit, teils in Glas liegend.

a. Schlacke von Burgfeldhammer, Deutschland (cfr. Fig. 28 a).

b. Schlacke von Vigsnäs, Norwegen (siehe Analyse Nr. 61).

Das zuerst erwähnte isotope, gelbe oder gelbbraune Mineral erscheint in allen von mir untersuchten sulfidführenden Rohschlacken usw., die mindestens etwa 7 % ZnO führen. Andererseits fehlt es in zinkarmen oder zinkfreien Schlacken. Hierdurch ergibt sich, daß das Mineral durch Zink gekennzeichnet wird.

In morphologischer Beziehung zeigt es eine Identität (siehe Fig. 27) mit den oben beschriebenen CaS-MnS -Krystalliten (siehe Fig. 16—19, 21—22). Die obige Beschreibung (S. 60) dieser Krystallite gilt Wort für Wort auch für die hier vorliegenden Krystallite, jedoch mit Ausnahme der charakteristischen Farbe. Besonders wird einerseits die optische Isotropie und andererseits der Aufbau nach drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen hervorgehoben. Das Mineral krystallisiert folglich regulär (siehe hierüber weiter unten, S. 86).

¹ Siehe Studien über Schlacken (1884), S. 47—48 und 73—76. — Der zinkreichste mir bekannte bisher analysierte Zinkfayalit enthält ca. 19 % ZnO (außerdem 29 % SiO_2 und 52 % FeO), somit 0.25 Zn : 0.75 Fe .

Hieraus folgt, daß unser Mineral mit *Zinkblende*, $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$, identisch ist. Zu weiterer Bestätigung erwähnen wir:

Es ist leicht in Säuren löslich (unter Entwicklung von Schwefelwasserstoff);

die Menge des u. d. M. beobachteten Minerals entspricht dem aus den quantitativen Analysen berechneten RS-Gehalt;

es hat einen besonders hohen Brechungsquotienten (siehe hierüber weiter unten).

Dabei betone ich auch die frühzeitige Krystallisation des Minerals, dessen Menge in den verschiedenen Schlacken zwischen ca. 2 und 5 % schwankt.

Die Krystallite des Zinksulfids sind in einigen Dünnschliffen bis 0.4 mm. lang und 0.02—0.03, gelegentlich bis 0.04 mm. dick.

Bei dieser Dicke sind sie durchsichtig; jedoch absorbieren sie ziemlich viel Licht, und bei einer Dicke von ca. 0.15 mm. dürften sie nur durchscheinend sein.

Die Farbe des Minerals schwankt in den verschiedenen Schlacken, mit einem wechselnden Verhältnis zwischen ZnO und FeO (von 7 % ZnO : 47 % FeO bis 18 % ZnO : 42 % FeO), zwischen gelb, mit einem schwach bräunlichen Tone (in den zinkreichsten Schlacken), bis gelblich braun (in den zinkärmsten und dabei ziemlich eisenreichen Schlacken). Das künstliche Mineral ergibt dieselben Farbennuancen wie die natürliche Zinkblende (im Dünnschliff) mit von ca. 5 bis ca. 10 % Fe , entsprechend rund 8 bis 16 % FeS . — Unser Mineral besteht somit nicht aus reinem ZnS , sondern aus ZnS mit mehr oder weniger FeS . Daß dies der Fall sein muß, ist auch eine Konsequenz von dem Gleichgewicht zwischen R in RS und R in der Silikatschmelzlösung (siehe hierüber in einem unten folgenden Abschnitt). — Weiter darf man aus diesem Gleichgewicht den Schluß ziehen, daß auch etwas von anderen Komponenten, besonders CaS (dabei auch MnS usw.), in die Konstitution des Minerals eingehen mag.

Die Krystallisation unseres durch überwiegend Zink charakterisierten Sulfids fand — in Schlacken mit ca. 2 bis 5 % Sulfid — sehr frühzeitig statt, und zwar jedenfalls annähernd gleichzeitig mit derjenigen des Zinkspinells. — Die Krystallite erscheinen als Einschlüsse teils in dem Fayalit (Zinkfayalit) und teils in dem zum Schluß erstarrten Glas (siehe Fig. 28). Mehrerenorts beobachtet man innerhalb der Fayalite Häufchen von kleinen Sulfid-Krystalliten, die somit vor dem Anfang der Fayalitbildung zusammengeschwommen waren. Bisweilen sieht man einen Kreis von Sulfid-Krystalliten ringsherum um die mechanisch mitgerissenen Steinkügelchen,

die als Fixkörper für den Absatz des Sulfids funktioniert haben (Fig. 28). Oftmals haben die Sulfid-Krystallite als Fixkörper für den Absatz des jedenfalls einigermaßen frühzeitig ausgeschiedenen Magnetits gedient.

Aus den obigen Beobachtungen folgt, daß die eutektische Grenzlinie zwischen $(\text{Zn}, \text{R})\text{S}$ einerseits und Zinkfayalit (neben anderen Silikatmineralien, in untergeordneter Menge) andererseits bei nur ganz wenig, nämlich bei höchstens 0.5—1 % Sulfid liegen muß. — Genaue Zahlenwerte lassen sich nicht angeben, u. a. weil diejenigen Schlacken, wo sich Zinksulfid bildet, durchgängig mehrere Prozent des Sulfids führen. In zinkarmen und gleichzeitig FeO -reichen Schlacken entsteht nicht ein Zink-, sondern ein Eisensulfid.

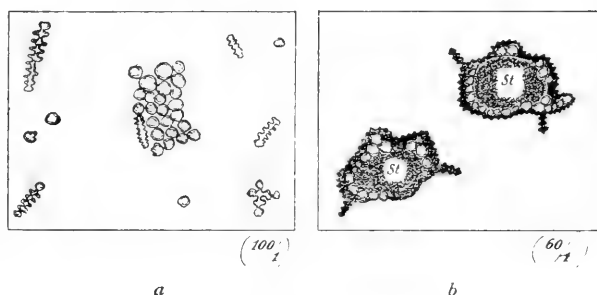


Fig. 28.

a. Krystallite von $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$ in einer Schlacke von Burgfeldhammer (cfr. Fig. 27 a). In der Mitte sieht man ein Häufchen von $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$ -„Globuliten“ als Einschlüsse in Fayalit.
b. Schlacke von Oker (siehe Analyse Nr. 62); aus überwiegend Fayalit nebst $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$, Zinkspinnell, Magnetit und etwas Glas bestehend; dabei einige Steinpartikelchen. Die zwei Zeichnungen zeigen: Steinpartikelchen (*St*, dunkel punktiert); daran viele „Globulite“ von $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$ abgesetzt, und um diese herum eine jüngere Umrandung von Magnetit.

Betreffs des *Temperaturintervalles der Krystallisation der zinksulfid-führenden Silikatschmelzen* bemerken wir folgendes:

Der Schmelzpunkt des reinen Eisen-Fayalits, Fe_2SiO_4 , beträgt zufolge C. DOELTERS Bestimmung¹ 1055—1075°.

Das System Fe_2SiO_4 (Fayalit) : Zn_2SiO_4 (Willemit) bildet eine diskontinuierliche Mischungsreihe², die ziemlich sicher Roozebooms Typus V — mit Eutektikum — angehört. Hieraus folgt wiederum, daß der Schmelzpunkt (oder stringent ausgedrückt, das Schmelzpunktintervall) von Zinkfayalit, $(\text{Fe}, \text{Zn})_2\text{SiO}_4$, nach aller Wahrscheinlichkeit etwas niedriger als

¹ Tscherm. Min. Petrogr. Mitt. XXII, 1903. — Auch zufolge anderer Angaben weiß man, daß Fe_2SiO_4 einen sehr niedrigen Schmelzpunkt hat; siehe z. B. meine Arbeit Silikatschmelzlös. II, Tafel I, Schmelzkurven der Schlacken von Rörös und Evje.

² Siehe Silikatschmelzlös. I, S. 47—49.

derjenige von Fe_2SiO_4 liegen muß, somit wahrscheinlich bei etwa 1000 oder 1050°.

Die hier besprochenen Schlacken führen immer etwas Glas, das im allgemeinen aus mehreren Silikatkomponenten in fester Lösung besteht. Dazu kommen noch die Sulfid-, Spinell- und Magnetitkomponenten. Alle diese Komponenten bewirken eine Schmelzpunkt-Erniedrigung des Zinkfayalits. Die Krystallisation dieses Minerals mag somit erst bei höchstens etwa 1000°, wahrscheinlich sogar bei noch ein wenig niedrigerer Temperatur angefangen haben.

Die Krystallisation der Hauptmasse des Zinksulfids wird bei dieser Temperatur abgeschlossen gewesen sein und bei etwas höherer Temperatur begonnen haben. Das heißt, die Krystallisation des Sulfids wird im allgemeinen bei einer Temperatur von etwa 1050° bis 1000° stattgefunden haben. Bei dem Vorhandensein von viel Zinksulfid mag die Ausscheidung desselben jedoch vielleicht bei noch ein wenig höherer Temperatur, wie etwa 1100°, beginnen.

Die hier besprochenen Schlacken fließen aus dem Schmelzofen heraus bei einer Temperatur von in der Regel rund 1300°. Eine so hohe Temperatur ist jedoch nicht nötig, um eine geschmolzene Schlacke zu erhalten. Man arbeitet aber aus technischen Gründen mit einer so weit hohen Temperatur, um der Schlacke die erforderliche Dünflüssigkeit zu geben.

Zufolge eines Schmelzversuches von mir mag eine basische und stark zinkreiche Schlacke (ca. 28 % SiO_2 , ca. 40 % FeO , ca. 30 % $\text{ZnO} + \text{ZnS}$, Rest ein wenig Al_2O_3 , CaO und MgO) bei ca. 1400° mindestens 10 % $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$ lösen.

Zufolge der Untersuchungen an dem Geophysischen Laboratorium zu Washington¹ liegt die *Stabilitätsgrenze* zwischen den beiden ZnS -Mineralien bei $1020 \pm 5^\circ$, indem bei höherer Temperatur Wurtzit, bei niedrigerer Zinkblende stabil ist. Die Grenze wird durch isomorphe Beimischung von RS beeinflusst, und zwar derart, daß FeS die Grenze erniedrigt. Bei 7.43 % Fe , 0.68 % Cd und Spuren von Pb und Ag wurde andererseits die Grenze zu 1035° erhöht, — die Grenze wird somit selbst schon von ziemlich geringen RS-Beimengungen ganz stark beeinflusst.

Weil das Krystallisationsintervall unseres Zinksulfids (rund 1050° oder 1100° hinunter zu ungefähr 1000°) in den üblichen Schlacken jedenfalls annähernd mit der Stabilitätsgrenze zwischen Zinkblende und Wurtzit (etwas

¹ E. T. ALLEN und J. L. CRENSHAW, mit mikroskopischer Untersuchung von H. E. MERWIN, Die Sulfide von Zink, Cadmium und Quecksilber, Zt. f. anorg. Ch. 79, 1913 (auch in Am. Journ. of Sc.).

oberhalb oder etwas unterhalb 1020°) fällt, stellt sich die Frage, ob das in den Schlacken auskrystallisierte Sulfid aus Zinkblende oder Wurtzit besteht.

Zinkblende hat, zufolge der oben zitierten amerikanischen Forscher, Brechungsquotient je nach der isomorphen FeS-Beimischung, für Li-Licht zwischen 2.34 und 2.395 und für Na-Licht zwischen 2.37 und 2.47. Für Wurtzit gilt: $\omega_{\text{Li}} = 2.330$ und $\epsilon_{\text{Li}} = 2.350$; $\omega_{\text{Na}} = 2.356$ und $\epsilon_{\text{Na}} = 2.378$. — Unsere Zinksulfidkrystallite sind so klein und namentlich so intim mit den anderen Bestandteilen zusammengewachsen, daß es nicht gelingt, den Brechungsquotienten zu bestimmen. Nur mag man die Schätzung machen, daß er mehr als 2 betragen muß.

Wir können uns aber auf die folgenden Kriterien stützen:

1. Eine Abweichung von der Isotropie läßt sich, zufolge wiederholter Untersuchungen der verschiedenen Dünnschliffe, nirgends konstatieren. Die Doppelbrechung bei Wurtzit ist freilich nur äußerst gering, aber doch so weit groß, daß sie sich im Dünnschliff z. B. von geschmolzenem ZnS, das als Wurtzit erstarrte (s. S. 4), leicht konstatieren läßt.
2. Unsere Krystallite zeigen Aufbau nach drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen.
3. Dazu kommt die ausgeprägte morphologische Identität mit den CaS-MnS-Krystalliten.

Hieraus folgt, daß unsere Krystallite nicht aus Wurtzit, sondern aus Zinkblende entstehen.

Über die Krystallisationsbeziehung zwischen Spinell und Silikat und zwischen Spinell und Sulfid.

Über die *chemischen* Bedingungen für die Bildung des Spinells in Silikatschmelzen verweise ich auf meine früheren einschlägigen Arbeiten, besonders Mineralbild. in Schmelzmassen, 1892, S. 189—203, und Silikatschmelzlös. I, S. 78—87, 88, 109; II, S. 153, 164.

Spinell : Silikat.

In allen von mir untersuchten spinellführenden Silikatschmelzen, mit Haupt-Silikatmineral in einigen Fällen Melilith, in anderen Olivin und wiederum in anderen Anorthit, begann die Krystallisation des Spinells durchgängig auf einer sehr frühzeitigen Stufe.

In betreff des *üblichen Spinells*, MgAl_2O_4 — oder bei *schneller* Krystallisation $(\text{Mg}, \text{Ca})\text{Al}_2\text{O}_4$ (siehe Silikatschmelzlös. I, S. 88) — haben wir

schon oben (S. 69—70) besprochen, daß relativ große Spinell-Oktaëder in einer Silikatschmelze mit 6.5 % Spinell in dem Melilithmineral eingebettet sind (siehe Fig. 21). — Die letztere Erscheinung wiederholt sich auch in chemisch nahestehenden Silikatschmelzen mit etwas niedrigerer Spinellmenge, so beispielsweise in Nr. 50 (mit 3 % Spinell, in meist 0.025—0.04, gelegentlich bis 0.06 mm. großen, scharf entwickelten Oktaëdern) wie auch in Schmelzen mit 2 % Spinell. — Bezüglich der Silikatschmelze Nr. 50 heben wir besonders hervor, daß eine Menge von kleinen Spinell-Oktaëdern mehrerenorts in Häufchen in der Mitte der Melilithindividuen angesammelt sind. Die Spinell-Oktaëder waren somit auf einer frühzeitigen Stufe zusammengeschwommen — in ähnlicher Weise wie die Sulfidkrystallite bei Fig. 28 a — und diese Spinellschwärmchen dienten späterhin z. T. als Fixkörper für den Absatz des Meliliths.

Selbst bei nur 3 oder 2 % Spinell war somit der allergrößte Teil des Spinells schon vor dem Anfang der Ausscheidung des Meliliths auskristallisiert.

Und in der Olivinschlacke Nr. 58 (Fig. 25) mit nur 0.5 % Spinell, beobachten wir in entsprechender Weise eine Menge kleiner Spinell-Oktaëder (von Größe 0.010—0.017 mm.) als Einschlüsse innerhalb des Olivins und zwar auch im Kern derselben. Einige erscheinen dabei auch als Einschlüsse im Glase zwischen den Olivinkristallen.

In Silikatschmelzen mit teils überwiegend Melilithmineral und teils überwiegend Olivin liegt somit die Individualisationsgrenze bei nur einem kleinen Bruchteil von einem Prozent Spinell, nämlich schätzungsweise bei höchstens 0.25, vielleicht sogar nur bei etwa 0.1 % Spinell.

Zur Beleuchtung der Bildung des *Zinkspinells* gebe ich zuerst eine Übersicht über die Zusammensetzung einiger Schlacken (Rohschlacken), wo die Menge unseres Minerals — nach Auflösen der übrigen Bestandteile mittels HCl und HF — quantitativ bestimmt worden ist.

	Freiberg Nr. 60	Vignäs Nr. 61	Oker Nr. 62
SiO ₂	25—30	ca. 35	20—25
Al ₂ O ₃	ca. 2.5—4	ca. 4—7	8—12
Fe ₂ O ₃	0.25—0.3	0.6	0.6—1
FeO	40—50	40—45	37—45
ZnO	10—18	ca. 7	8—12
Rest: etwas CaO, MgO usw.			
% Zn-Spinell	ca. 0.5	1.7—1.8	3.5—3.7
% (Zn, R)S	ca. 4	ca. 2	ca. 5

Der Zinkfayalit bildet etwas über die Hälfte der ganzen Schlackenmasse und erscheint in der Regel in ganz großen, oft cm.-großen, aber dünnen Tafeln, mit den üblichen Begrenzungsflächen, hauptsächlich (010), (110) und (021).

Die Zusammensetzung des Zinkspinells ist $(\text{Zn}, \text{Fe})(\text{Al}, \text{Fe})_2\text{O}_4$. — Zwei längst von A. W. STELZNER¹ veröffentlichte Analysen der aus den Freiburger-Schlacken, Nr. 60, mittels HCl (oder H_2SO_4) und HF isolierten Zinkspinells ergeben:

$$\text{Zn} : \text{Fe} \text{ (in FeO)} = 1 : 0.53, \text{ bzw. } 0.68$$

$$\text{Al}_2 : \text{Fe}_2 \text{ (in Fe}_2\text{O}_3\text{)} = 1 : 0.13, \text{ bzw. } 0.24.$$

Die ganze Schmelze enthält 1 Zn : ungefähr 3 Fe (in FeO), — das ausgeschiedene Aluminat dagegen 1 Zn : ungefähr 0.6 Fe (in FeO). — In dem Aluminat ist somit Zn relativ sehr stark konzentriert worden.

Die Menge des gebildeten Aluminats ist eine Funktion von

1. dem ZnO-Gehalt,
2. dem Al_2O_3 -Gehalt und
3. der Basizität der ganzen Schmelze.

In entsprechenden Al_2O_3 -armen Schmelzen (mit nur ca. 4–7 % Al_2O_3), ohne ZnO, aber mit gleich hohen MgO-Gehalten, bildet sich erfahrungsmäßig kein Spinellmineral. Es folgt hieraus eine besonders intensive Neigung von ZnO, sich mit Al_2O_3 zu verbinden.

Die Farbe des Zinkspinells, der bisweilen eine Andeutung zu zonalem Schichtenbau zeigt, wechselt in den verschiedenen Schmelzen zwischen blaugrün und violettblau. — Um die Zinkspinell-Oktaëder herum findet man öfters eine — jünger entstandene — Zone von Magnetit².

In unseren zinkspinellführenden Schlacken (Nr. 60–62), mit rund bzw. 3.6, 1.75 und 0.5 Gew.-Proz. Zinkspinell, begegnen wir den kleinen, aber gern zierlich entwickelten Oktaëdern als Einschlüssen innerhalb der ziemlich großen Individuen des Fayalits (Zinkfayalits), dabei auch im Glase zwischen den Fayalitindividuen. Wir wollen ausdrücklich hervorheben, daß die Zinkspinell-Oktaëder nicht auf die Randpartie der Fayalitindividuen begrenzt sind, sondern auch in den zentralen Partien derselben auftreten. Bisweilen sieht man sogar kleine Häufchen von Zinkspinell-Oktaëdern gerade in der Mitte der Fayalitkrystalle; wir verweisen auf das entsprechende, oben (S. 87) beschriebene Auftreten von Häufchen von Mg-Spinell in der Kernpartie von Melilithindividuen.

¹ Neues Jahrb. f. Min. Geol. Pal. 1882, I (mit Referat in meinen früheren einschlägigen Arbeiten).

² Eigentlicher Spinell, $(\text{Mg}, \text{Fe})(\text{Al}_2, \text{Fe}_2)\text{O}_4$, wie auch Zinkspinell, $(\text{Zn}, \text{Fe})(\text{Al}_2, \text{Fe}_2)\text{O}_4$, bildet mit FeFe_2O_4 eine diskontinuierliche Mischungsreihe; ich verweise diesbezüglich auf eine kleine Abhandlung von mir, „Über das Spinell: Magnetit-Eutektikum“, in der Gesellsch. d. Wissensch. zu Kristiania, 1910.

Es ergibt sich hieraus, daß die ganz überwiegende Menge des Zink-spinells, selbst wenn die Totalmenge des Minerals nur 1.75 oder 0.5 % beträgt, schon vor dem Anfang der Krystallisation des Fayalits (Zink-fayalits) ausgeschieden wird.

Silikatschmelzen mit so wenig Spinell, daß die Krystallisation mit der Ausscheidung von Silikatmineral beginnt, habe ich nicht zur Verfügung gehabt.

Aus physikalisch-chemischen Gründen folgt, daß die hier besprochene Individualisationsgrenze zwischen Spinell und den Silikatmineralien mit der eutektischen Grenzlinie identisch sein muß.

Spinell : Sulfid

(in Silikatschmelzen mit überwiegend Silikat und somit nur ziemlich wenig Spinell, bzw. Sulfid).

A. Bezüglich der Schlacke Nr. 48 (Fig. 21), enthaltend 5.5 % RS (R = hauptsächlich Ca) und 6.5 % Mg-Spinell, haben wir schon oben (S. 70) die folgenden Krystallisationsstufen nachgewiesen:

1. anfänglich etwas Sulfid;
2. dann Sulfid und Spinell gleichzeitig;
3. zuerst auf der dritten Stufe begann die Krystallisation des Silikatminerals (Melilith).

B. In einer Reihe anderer Schmelzen, enthaltend zwischen ca. 1 und ca. 3.5 % Spinell — bald Mg- und bald Zn-Spinell — und dabei einige, wie ungefähr 3—4 % RS, läßt sich eine gleichzeitige Krystallisation der beiden Mineralien nachweisen. So finden wir oftmals in einem und demselben Dünnschliffe teils kleine Spinell-Oktaëder ringsherum um einen RS-Krystallit und teils RS-Krystallite ringsherum um einen Spinell-Oktaëder abgelagert. Welches von den zwei Mineralien zuerst zu krystallisieren anfang, läßt sich in solchen Fällen nicht entscheiden.

C. Besprechen wir ferner eine Schlacke, Nr. 58 (Fig. 25), nur mit ziemlich wenig RS, nämlich enthaltend: 0.5 % Mg-Spinell, 1.2 % RS (R = hauptsächlich CaS), ca. 40 % Olivin und Rest Glas, so begegnen wir hier (siehe S. 73) einer Unmenge kleiner Spinell Oktaëder innerhalb der Olivinkrystalle. Die RS-Krystallite dagegen erscheinen nur in dem Glase zwischen den Olivinkrystallen und in der alleräußersten Zone, nie aber in der Mitte derselben. Die Krystallisationsfolge war somit hier:

1. anfänglich nur Spinell,
2. dann begann die Krystallisation des Olivins,
3. und auf einer späteren Stufe diejenige des Sulfids, unter fortgesetzter Bildung des Olivins

Zur Vereinfachung der Erörterung über das System *Sulfid : Spinell : Silikat* begrenzen wir uns auf das System Sulfid (CaS) : Mg-Spinell (Sp.) : Melilith-mineral (Mel.); dabei beschäftigen wir uns nur mit Silikatschmelzen, die überwiegend Silikat enthalten. Wir gehen somit nicht auf die Frage über begrenzte oder unbegrenzte gegenseitige Löslichkeit von Sulfid und Aluminat ein.

Auf Grundlage der obigen approximativen Bestimmungen gehen wir von den folgenden Werten aus:

Binäres Eutektikum: ca. 2.5 % CaS : ca. 97.5 % Mel.

» » 0.1 % Sp. : 99.9 % Mel.

Ternäres » ca. 2.5 % CaS : 0.1 % Sp. : ca. 97 % Mel.

Die Angabe 0.1 % Sp. repräsentiert höchstens 0.3, wahrscheinlich nur etwa 0.1—0.2 % Spinell.

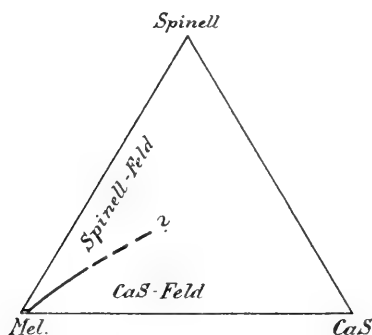


Fig. 29 a.

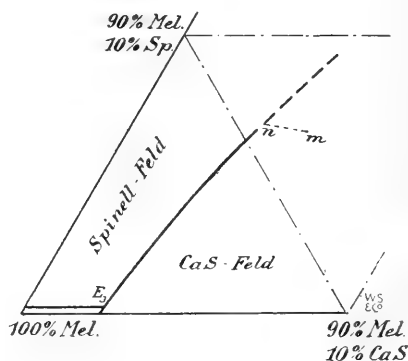


Fig. 29 b.

Das System Melilith : CaS : $MgAl_2O_4$.

Weil die Eutektika in der nächsten Nähe (s. Fig. 29 a) von Melilith (Mel.) liegen, reproduziere ich diese Ecke in vergrößertem Maßstabe (Fig. 29 b).

Wir besprechen zuerst die Schlacke Nr. 48, bestehend aus 6.5 % Spinell, 5.5 % RS (beinahe nur CaS) und Rest hauptsächlich Melilith. Die Krystallisationsbeziehung zwischen Spinell und Sulfid wird nicht oder jedenfalls ganz unwesentlich dadurch beeinflusst, daß wir das Silikat nur als Melilith betrachten.

Bei *m* (= 5.5 % CaS, 6.5 % Sp. und 88 % Mel.) beginnt die Verfestigung mit der Krystallisation von CaS, und dieselbe setzt bis *n* fort. Zwischen *n* und *E* findet eine gleichzeitige Krystallisation von CaS und Spinell statt, und bei *E* beginnt auch Melilith zu krystallisieren.

Zufolge anderer Beobachtungen liegen einige Punkte der Grenzlinie zwischen n und E bei ungefähr 3—4 % CaS : 1—2 % Sp.

Bei der Schlacke Nr. 58, mit 0.5 % Spinell, 1.2 % CaS und Rest Silikatmineral (freilich nicht Melilith, sondern Olivin neben Silikatkomponenten in Glas), finden wir andererseits: zuerst nur Spinell, späterhin Beginn der Krystallisation von Silikatmineral und erst auf einer noch späteren Stufe Beginn der Krystallisation von CaS.

Über FeS in Silikatschmelzen.

Wir besprechen zuerst einige *sulfidhaltige* Silikatschmelzen, die neben Al_2O_3 , CaO, MgO usw. nur *einige Prozent FeO*¹ enthalten. Als Beispiel nehmen wir einige von »unreinem Betriebe« stammende Hochofenschlacken².

Diese gleichzeitig ein oder ein paar Prozent Sulfid und mindestens ein oder ein paar Prozent FeO führenden Silikatschmelzen werden durchgängig durch eine *graue* oder *grauschwarze Farbe* gekennzeichnet. Und dies beruht, wie ich schon in einer früheren Arbeit erörtert habe, auf dem Vorhandensein von etwas *Eisensulfid*.

In *sulfidfreien* Hochofenschlacken mit höchstens 0.5 oder 0.75 % FeO zeigt das Glas wie auch das ausgeschiedene Silikatmineral (Olivin, Melilith, Augit usw.) eine ganz lichte Farbe. Bei einigen, wie 3—5 % FeO, erhält das Glas eine grüne Farbe (mit wachsender Intensität je nach dem FeO-Gehalt), und das Silikatmineral wird lichtgrau gefärbt.

Sulfidführende Hochofenschlacken mit einem sehr niedrigen FeO-Gehalt, wie 0.5 % FeO, und dabei ohne oder nur mit einem ganz geringen Mangangehalt zeigen ebenfalls eine lichte Farbe. Bei einem nennenswerten Mangangehalt werden die Schlacken durch manganhaltiges Sulfid — $(Ca, Mn)_2S$, $(Ca, Mn)S$, $(Mn, Ca)_2S$, MnS — mehr oder weniger intensiv grün gefärbt (siehe S. 61—62).

Hochofenschlacken mit einer nicht allzu geringen *Sulfidmenge* (mindestens 1 % RS) und dabei mit mindestens ein paar Prozent *Eisen* (teils in FeS und teils als FeO eingehend) ergeben dagegen eine graue oder grauschwarze Farbe, und zwar gilt dies nicht nur vom Glase, sondern, bei makroskopischer Betrachtung, auch von dem krystallinen Teil, wenn überhaupt eine Krystallisation von Silikatmineral stattgefunden hat. Wegen der in dem Hochofen herrschenden starken Reduktion ist das Vorhandensein von Fe_2O_3 in Hochofenschlacken ausgeschlossen; die Farbe mag somit nicht auf Fe_3O_4 (und auch nicht auf $FeAl_2O_4$) beruhen.

¹ Vorausgesetzt, daß die ganze Menge des Eisens, somit auch Fe in FeS, als FeO berechnet wird.

² Diese bieten den Vorteil dar, daß einerseits Fe_2O_3 und andererseits Steinkügelchen ausgeschlossen sind; hierdurch wird das mikroskopische Studium vereinfacht.

Als Beispiele solcher durch FeS gefärbter Hochofenschlacken nehmen wir die folgenden.

Von FeS grau oder grauschwarz gefärbte Hochofenschlacken.

	Nr. 63	Nr. 64	Nr. 65
SiO ₂	43.80	36.48	39.45
Al ₂ O ₃	14.61	7.81	10.70
CaO	31.04	37.26	37.24
MgO	3.76	11.27	2.34
MnO	3.57	2.74	1.95
K ₂ O			1.79
FeO	1.02	2.00	4.99
FeS	1.37	2.40	1.28
Sum	99.17	99.96	99.74

Nr. 63 von White Forgepigg pr. Dowlais in Wales, 1879 (Fig. 30 und 31; siehe auch Studien über Schlacken, Nr. 148); die S-Menge zufolge vier übereinstimmender Analysen (drei früherer in Stockholm, einer neuen in Trondhjem). — Nr. 64 von Königin Maria Hütte, Sachsen; mit Melilith (opt. positiv) und ganz wenig Biotit (!, siehe Fig. 32. — Nr. 65 von Oberhausen, Deutschland; mit Melilith (siehe Silikat-Schmelzlös., bezw. Nr. 97 und 94).

Nr. 63 — mit einem Aussehen sogar bis zum Verwechseln wie natürlicher Obsidian — besteht aus Glas¹ mit einer unzähligen Menge winziger Ausscheidungen von einer dunklen Substanz, die schon zufolge der obigen Erörterung als FeS gedeutet werden mag. Zu weiterer Identifizierung des Minerals dient: Es löst sich leicht, unter Entwicklung von H₂S, in verdünnter Salzsäure. Es ist, in einem üblichen Dünnschliff, selbst an den dünnsten Stellen desselben und bei Diameter des Minerals von nur 0.002—0.005 mm., völlig undurchsichtig. U. d. M.M. reflektiert es das Licht mit einem Glanz identisch mit demjenigen von FeS. — Es handelt sich somit ent-

¹ Bei langsamer Abkühlung würden aus Nr. 63 mehrere Mineralien krystallisieren, nämlich ein Melilithmineral und Anorthit, vielleicht noch mehrere Mineralien. Die Zusammensetzung der Silikatschmelze entfernt sich aber ziemlich weit von demjenigen Mineral, das zuerst krystallisieren wurde; d. h. die Krystallisation des ersten Silikatminerals würde, wenn die Unterkühlung außer oder beinahe außer Betracht gesetzt würde, zuerst bei einer erheblichen Schmelzpunkt-Erniedrigung (unterhalb des Schmelzpunktes des ersten Minerals), somit bei einer ziemlich niedrigen Temperatur beginnen. — Schmelzen der Zusammensetzung wie Nr. 63 sind bei Temp. von 1200—1250° ziemlich zähflüssig. Und bei der Temp. des theoretischen Krystallisationsintervalls ist die Viskosität so stark gestiegen, daß eine besonders langsame Abkühlung nötig ist, um eine Krystallisation zu bewirken. Bei einer relativ schnellen Abkühlung, wie z. B. 15—20 Minuten für je 100° (1300—1200°, 1200—1100° usw.) resultiert folglich ein Glas. Ich verweise auf den Abschnitt: „Weshalb ist das Glas eine feste Lösung“ in Silikat-Schmelzlös. II, S. 165—169.

weder um reines FeS oder um ein Mischkristall $(\text{Fe}, \text{R})\text{S}$, wo R jedoch nur in untergeordneter Menge vertreten sein dürfte. — Um das Sulfid auf eine eventuelle Beimischung von RS zu prüfen, wurde eine gepulverte Probe kurze Zeit mit verdünnter Salzsäure behandelt; die Lösung gab eine starke Reaktion auf Eisen (als FeO); dabei wurde aber auch das Glas angegriffen, und es gelang nicht, eine so schwache Säure zu finden, daß nur das Sulfid und nicht das Glas angegriffen wurde. Diese Untersuchung führte somit zu keinem Resultat. Es steht folglich die Frage offen, ob ein wenig RS ($\text{R} = \text{Mn}, \text{Ca}, \text{Mg}$) in das ausgeschiedene Sulfid eingeht oder nicht.

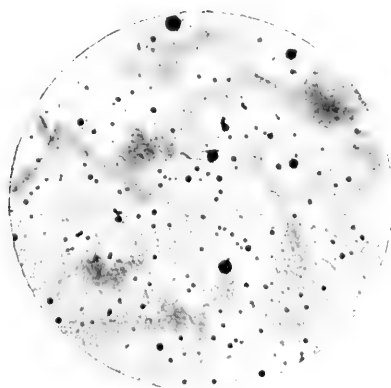


Fig. 30 ($125\times$). Obsidian-ähnliche Schlacke (Analyse Nr. 63), mit Eisensulfid in Glas. — In *durchfallendem* Lichte. — Fig. 31 stellt dieselbe Schlacke in reflektiertem Lichte und bei etwas größerem Maßstabe dar.

Die winzigen Ausscheidungen bilden kleine Kugeln, im allgemeinen von einer beinahe ideellen Kugelform und mit Diameter bis 0.015 oder 0.020 mm.; meist handelt es sich jedoch nur um Diameter von 0.010, 0.005, 0.002 mm. und darunter. Zwischen den kleinen Kugeln (siehe Fig. 30) ist das Glas gräulich gefärbt und dabei etwas opak, nämlich im Dünnschliff von der üblichen Dicke nur mittels durchsichtig und in etwas dickerem Dünnschliff nur schwach durchscheinend. Unmittelbar um die kleinen Kugeln herum beobachtet man dagegen eine dünne Zone (einen »Hof«) von hellem, nicht opaken Glase. Es ergibt sich hieraus — wie auch aus einer Reihe anderer Beobachtungen — daß das Sulfid anfänglich in der Silikatschmelze aufgelöst war, und daß es bei der Abkühlung ausgeschieden wurde.

Ferner ergibt sich, daß die stark verminderte Durchsichtigkeit des opaken Glases durch einen Gehalt von Eisensulfid verursacht wird. Selbst

bei der stärksten Vergrößerung in durchsichtigem Lichte (u. d. petrogr. M.) läßt sich das opake Glas nicht auflösen.

U. d. M.M. zeigen die kleinen, u. d. petrogr. M. undurchsichtigen Eisensulfidkügelchen den für Eisensulfid charakteristischen gelben Reflexglanz (siehe Fig. 31). Das opake Glas läßt sich aber selbst bei sehr starker Vergrößerung (wie 750-malige Vergrößerung) u. d. M.M. nicht auflösen. Namentlich heben wir hervor, daß nicht einmal mikroskopisch feine Pünktchen von Eisensulfid hier wahrzunehmen sind. Das Eisensulfid muß somit

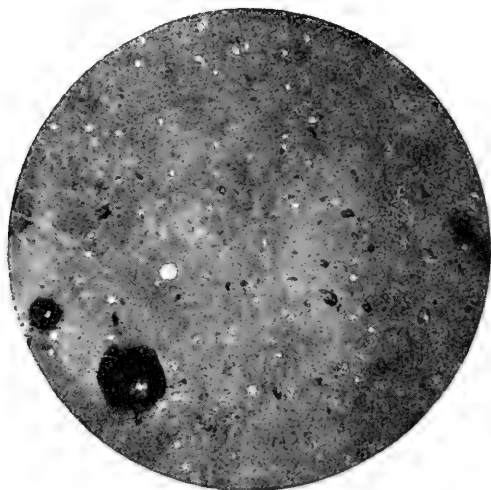


Fig. 31. Vergrößerung 250:1. Obsidian-ähnliche Schlacke (Analyse Nr. 63), mit Eisensulfid in Glas. — In *reflektiertem* Lichte (u. d. M. M.). — Die weißen Pünktchen sind Eisensulfid. Die kleinen dunklen Partien stammen von Luftporen her. — Fig. 30 stellt dieselbe Schlacke in durchfallendem Lichte dar.

hier entweder in fester Lösung vorliegen, oder in so äußerst feinen (submikroskopisch feinen) Ausscheidungen, daß dieselben nicht einmal bei 750-facher Vergrößerung beobachtet werden können. Ziemlich sicher tritt das Sulfid hier in fester Lösung auf.

Die typische *Kugel*-Form des ausgeschiedenen Sulfids mag dadurch erklärt werden, daß das Sulfid in der *flüssigen* Phase — also bei einer Temperatur oberhalb des Schmelzpunktes¹ von FeS (= 1170°) — ausgeschieden wurde. — Bei dem Ausscheidungsintervall war die — als Glas erstarrte — Silikatschmelze soweit zähflüssig, daß die winzigen Sulfidtropfen nicht hinuntersinken konnten, sondern *in situ* beibehalten wurden.

¹ (Fe, R)S, wo R = Mn, Ca (?), Mg (??) in geringer Menge, mag einen noch etwas niedrigeren Schmelzpunkt haben. In betreff FeS : MnS siehe Fig. 8.

Wir besprechen ferner einige teils bei »reinem« und teils bei »unreinem« Betrieb von einem und demselben Hochofen fallende Schlacken, die beinahe genau dieselben Prozente von SiO_2 , Al_2O_3 , CaO , MgO usw. enthalten, die aber einen wechselnden Eisenprozent ergeben. Derselbe beträgt bei »reinem« Betrieb nur etwa 0.25 oder 0.5 % FeO , während der Eisengehalt bei »unreinem« Betrieb zu mehreren Prozent steigen kann. Außerdem führen die bei »unreinem« Betrieb, z: bei einer relativ niedrigen

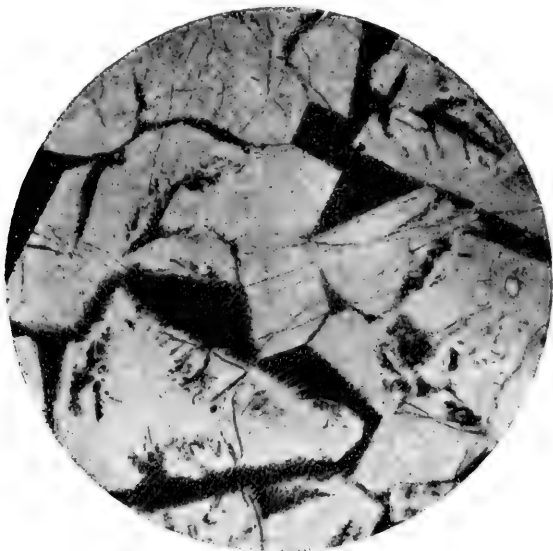


Fig. 32 ($50\times$). Hochofenschlacke von Königin-Marie-Hütte (Analyse Nr. 64), bestehend aus: überwiegend Melilith; ganz wenig Biotit, an den Melilith angewachsen (der Biotit zeichnet sich auf der Photographie als dünne Streifen in dem schwarzen Glas ab); dabei ein schwarzes, opakes, eisensulfidhaltiges Glas.

Ofentemperatur entstandenen Schlacken, etwas weniger Sulfid wie bei »reinem« Betrieb (siehe S. 53).

Als Beispiel nehmen wir einige Schlacken von der Königin-Marie-Hütte in Sachsen (1884), teils mit nur etwa 0.5 % FeO und teils mit einer etwas höheren Eisenmenge (siehe Analyse Nr. 64 und Fig. 32). Sämtliche Schlacken zeigen — vom Sulfid abgerechnet — dieselbe mineralogische Zusammensetzung, nämlich überwiegend Melilith, ein wenig Biotit und außerdem etwas Glas.

In den eisenarmen, hell grünlich gefärbten Schlacken begegnen wir — und zwar in einer Menge von ungefähr 3.5 % — den üblichen, in diesem Falle ganz schwach grünlich gefärbten Krystalliten, $(\text{Ca}, \text{Mn})\text{S}$, die in großer Ausdehnung als Einschlüsse innerhalb der Melilithkrystalle auftreten.

In der eisenreichen Schlacke, Nr. 64, sind dagegen diese (Ca,Mn)S-Krystallite gänzlich verschwunden und durch das schwarze Eisensulfid ersetzt. — Die Schlacke (Fig. 32) besteht aus:

- ca. 80—85 % Melilith (opt. pos.), in kurz säulenförmigen, meist 3—4 mm. großen Krystallen, (001), (011), (100);
- ca. 1 % Biotit (!)¹ in bis ca. 0.5 mm. breiten Blättern (parallel der Basis), die an den Melilithkrystallen angewachsen sitzen;
- dabei ein schwarzes, opakes Glas, in welchem das Eisensulfid steckt.

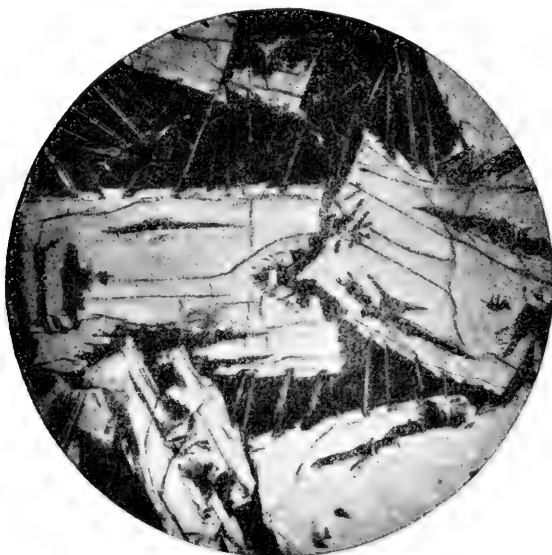


Fig. 33 (⁴⁵/₁). Hochofenschlacke von Bredsjö, bestehend aus: sehr viel Melilith, ein wenig Olivin (ein ganz wenig im Melilith steckend und hauptsächlich in dem Glase); dabei ein schwarzes, opakes, eisensulfidhaltiges Glas.

Eine entsprechende Erscheinung beobachten wir an vielen anderen eisensulfidführenden Hochofenschlacken von annähernd derselben Zusammensetzung, so z. B. bei einer Schlacke von Bredsjö (Fig. 33). Dieselbe besteht aus:

- Melilith, in kurzsäulenförmigen, bis 3 mm. breiten Krystallen (opt. pos., mit einer äußerst schmalen opt. neg. Randzone);
- ein wenig Olivin, dessen Krystallisation erst begann, nachdem die Hauptmenge des Meliliths auskrystallisiert war;
- ein schwarzes, opakes Glas (»Glasbasis«).

¹ Siehe meine Abh., Über künstliche Bildung von Glimmer, in Gesellsch. d. Wiss. zu Kristiania, 1887, Nr. 6, S. 25—28 und Fig. 6—7; Mineralbild. in Schmelzmassen, 1892, S. 94; Analyse Nr. 146 und Fig. 7 a, b (schlauchförmige Einschlüsse in Melilith).

Dieses Glas läßt sich weder in durchfallendem Lichte (u. d. petrogr. M.) noch bei reflektiertem Lichte (u. d. M.M.) auflösen, und besonders heben wir hervor, daß gelbstrahlende Pünktchen selbst bei 750-facher Vergrößerung hier *nicht* wahrzunehmen sind. Das Eisensulfid mag somit hier ziemlich sicher in fester Lösung in dem Silikatglas vorliegen. Eine *submikroskopisch* feine Ausscheidung ist freilich nicht ausgeschlossen. Eine solche Deutung scheint jedoch nicht wahrscheinlich.

Wie oben (S. 63) besprochen, krystallisiert aus basischen Silikatschmelzen mit 30—40 % CaO und nur etwa 0.5 % FeO (somit bei 75—100 Ca : 1 Fe) ein wasserhelles Calciumsulfid, nur mit einer minimalen FeS-Beimischung. Bei 30—40 % CaO und ca. 1 % FeO (somit bei rund 40—50 Ca : 1 Fe) krystallisiert ein etwas dunkelgefärbtes, aber fortwährend durchsichtiges Calciumsulfid, somit (Ca, Fe)S, wahrscheinlich jedoch nur mit einer ziemlich geringen Fe-Menge.

Gehen wir dagegen zu etwas eisenreicheren Schmelzen über, so erhalten wir ein undurchsichtiges Sulfid mit dem Charakter wie FeS, nämlich entweder reines FeS, oder (Fe, R)S mit einem geringen R-Gehalt. Diesem Eisensulfid begegnen wir z. B. in den drei Schlacken Nr. 63—65 mit den Atomquotienten:

Nr. 63 0.554 Ca : 0.093 Mg : 0.050 Mn : 0.030 Fe : 0.016 S

Nr. 64 0.665 Ca : 0.279 Mg : 0.039 Mn : 0.055 Fe : 0.027 S

Nr. 65 0.665 Ca : 0.058 Mg : 0.027 Mn : 0.083 Fe : 0.015 S

Bei *mindestens* 40—50 Ca zu 1 Fe resultiert somit ein *Calciumsulfid* (freilich mit einer geringen isomorphen Beimischung von FeS).

Bei *mehr Fe als 10 oder 15 Ca zu 1 Fe* resultiert dagegen ein *Eisensulfid*, FeS oder (Fe, R)S.

Über FeS in den an *Fayalit*, Fe_2SiO_4 oder $(Fe, R)_2SiO_4$ sehr reichen Silikatschmelzen, wie die üblichen basischen und FeO-reichen Rohschlacken.

Dasjenige Sulfid, daß aus Mn- und Zn-armen oder -freien Silikatschmelzen mit so wenig Eisen wie 1 Fe zu 10—15 Ca hinauskristallisiert, besteht aus FeS oder vielleicht (Fe, R)S, jedoch mit nur ganz wenig R (siehe S. 92—93). Es folgt hieraus, daß dasjenige Sulfid, das sich in eisenreichen, aber kalkarmen Silikatschmelzen, wie z. B. den Rohschlacken Nr. 8, 10—23, bildet, durch FeS gekennzeichnet werden kann.

In den basischen und an FeO — oder $FeO + MgO, MnO, ZnO$ — sehr reichen Silikatschmelzen, wie den üblichen basischen Rohschlacken, kristallisiert, bei einer nicht beinahe momentanen Abkühlung, *Fayalit* in reichlicher

Menge, nämlich gern in einer Menge wie 40, 50, 60 oder 70 %. Dazu kommen ein paar Prozent *Eisensulfid*, oftmals auch ein oder einige Prozent *Magnetit*, und der Rest erstarrt als *Glas*¹.

Bisweilen beobachten wir in diesen Schlacken, nämlich wenn dieselben sehr schnell abgekühlt sind, nur zwei Strukturelemente, einerseits Fayalit und andererseits ein schwarzes und selbst in sehr dünnen Dünnschliffen ganz undurchsichtiges Glas (siehe Fig. 34 und 35 a). — In einem und demselben Dünnschliff erscheint gelegentlich an einigen Stellen dieses

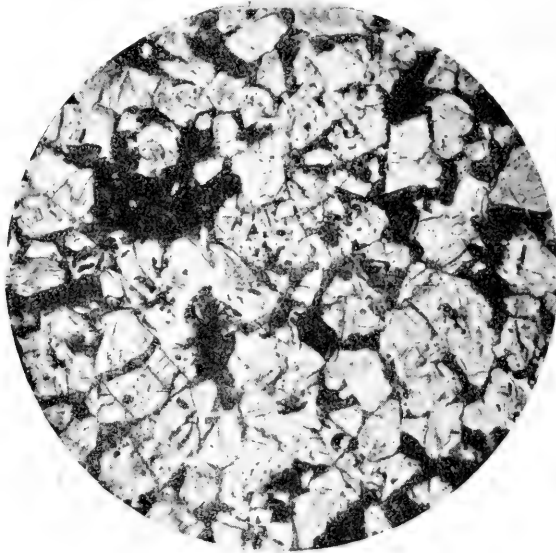


Fig. 34. Vergrößerung 40; 1. Rohschlacke von Fahlun Kupferwerk, aus Fayalit und einem schwarzen, undurchsichtigen, eisensulfidhaltigen Glase bestehend.

schwarze, undurchsichtige und an anderen Stellen ein gelbes, ganz klares und durchsichtiges Glas, freilich mit einer Unmenge von winzigen Interpositionen von Eisensulfid, bisweilen auch von Magnetit, der letztere im allgemeinen nur in sehr geringer Quantität (wie ein oder ein paar Prozent). Ein geringer Gehalt von Fe_2O_3 (oder Fe_3O_4) bewirkt nicht ein schwarzes, undurchsichtiges Glas. Außerdem erscheint dasselbe auch in Silikatschmelzen, die gänzlich frei von Fe_2O_3 , somit auch von Fe_3O_4 sind. Es ergibt sich hieraus, daß die schwarze Farbe und die Undurchsichtigkeit des Glases durch einen Gehalt von FeS bedingt wird. Wir begegnen somit hier derselben Erscheinung, die wir schon oben bei den Fig. 30—33 erörtert haben.

¹ Bezüglich der Steinpartikelchen verweisen wir auf die nächstfolgenden Abschnitte.

Das schwarze, undurchsichtige Glas z. B. der Nr. 34 und 35 *a* läßt sich weder bei durchfallendem Lichte (u. d. petrogr. M.) noch bei reflektiertem Lichte (u. d. M.M.) auflösen. Besonders betonen wir, daß wir innerhalb dieses schwarzen Glases selbst bei starker Vergrößerung, wie 750-facher Vergrößerung, u. d. M.M. keinen Reflexglanz von winzigen Eisensulfid-Interpositionen wahrnehmen können.

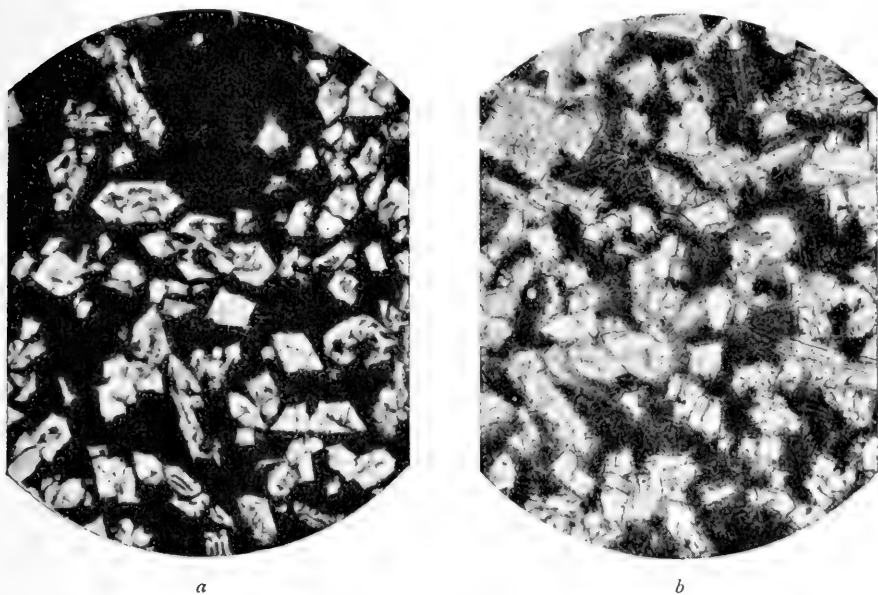


Fig. 35. Vergrößerung 40:1. Rohschlacke von Kragerö Nickelwerk, mit Hinauskrystallisation von ca. 40 % Fayalit. — *a* besteht aus Fayalit und einem schwarzen, undurchsichtigen, eisensulfidhaltigen Glase. — In *b* hat in dem Glase eine Ausscheidung von Eisensulfid (und von ein wenig Magnetit) stattgefunden. Das Glas ist dadurch hellgelb und durchsichtig geworden.

Das Eisensulfid ist somit hier im Glase stecken geblieben, und zwar ziemlich sicher in fester Lösung und nicht als *submikroskopische* Ausscheidungen.

Eine entsprechende Erscheinung beobachten wir bei *äußerst* schneller Abkühlung auch in betreff des Ca-Mn-Sulfids (siehe S. 65). Jedoch gibt es den Unterschied, daß das Ca-Mn-Sulfid sogar bei ziemlich schneller Abkühlung, wie etwa ein paar Minuten pro 100° Temperaturfall (1400—1300°, 1300—1200° usw.) krystallisiert, während eine ein klein wenig längere Abkühlungszeit nötig ist, um eine Ausscheidung von FeS zu erhalten.

Die Schlacke Nr. 35 *a* und *b*, mit wechselnden, nebeneinanderliegenden Partien einerseits von dem schwarzen, undurchsichtigen, FeS-haltigen Glase (Fig. 35 *a*) und andererseits von dem lichten, durchsichtigen Glase mit Aus-

scheidung von FeS (Fig. 35 *b*), lehrt uns ferner, daß die Ausscheidung von FeS von ganz geringen Wechseln in den physikalischen Faktoren abhängig sein mag.

Bei der Untersuchung einer ganzen Reihe von Dünnschliffen von Fayalit-roh Schlacken mit ein paar Prozent FeS habe ich nur in einigen Fällen das hier besprochene schwarze und undurchsichtige Glas wahrgenommen. In den meisten Fällen ist das Eisensulfid ausgeschieden worden, ziemlich sicher wegen genügend langer Abkühlungszeit (wie etwa 10 Minuten pro 100° Temperaturfall, bei z. B. 1000°—900°).

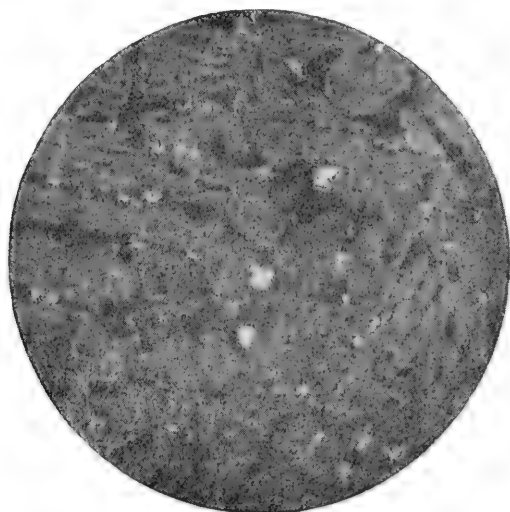


Fig. 36. Vergrößerung 400:1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.). Bessemerschlacke von Rörös (zusammengesetzt ungefähr wie Nr. 11—12), bestehend aus: etwas Magnetit, sehr viel Fayalit, einige Prozent Eisensulfid und etwas Glas. — Zu der Photographie wurde eine Stelle ohne Magnetit aufgesucht. — Das beinahe Weiße ist Eisensulfid; das Hellgraue ist Fayalit und das Dunkelgraue Glas. — Die Fayalitkrystalle sind annähernd senkrecht der Tafelfläche (010) geschnitten.

Zum Studium dieses ausgeschiedenen Eisensulfids versagt das petrographische Mikroskop. Dagegen leistet hier das Metallmikroskop eine vorzügliche Hilfe, indem selbst sehr kleine Ausscheidungen von Eisensulfid durch den charakteristischen Reflexglanz sich kundgeben. Eisensulfid und Magnetit sind dabei leicht voneinander zu halten. Außerdem erlaubt das Metallmikroskop ein bequemes Studium bei starker, wie z. B. 750-facher Vergrößerung. — Von jeder Schmelzprobe habe ich deswegen einen Dünnschliff für das petrogr. Mikroskop und einen Polierschliff¹ für das Metallmikroskop verfertigen lassen.

¹ Die Polierschliffe wurden 1—2 Minuten in Pikrinsäure geätzt.

U. d. M.M. kann man Fayalit und Glas scharf und sicher voneinander unterscheiden. Beim Photographieren tritt jedoch der Unterschied zwischen beiden nicht sehr deutlich hervor (siehe Fig. 36 und 37). Deswegen habe ich die Photographien durch ein paar Handzeichnungen (siehe Fig. 38 und 39) ergänzt.

Die kombinierte Untersuchung u. d. petrogr. M. und u. d. M.M. zeigt, daß der in den hier besprochenen Silikatschmelzen (Rohschlacken) oftmals, aber nur in spärlicher Menge (bis ein paar Prozent, ausnahmsweise bis

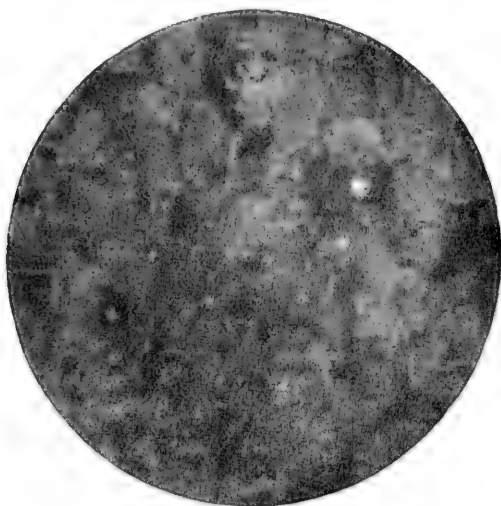


Fig. 37. Vergrößerung 400:1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.). Rohschlacke von Röros (cfr. Analyse Nr. 8), bestehend aus: beinahe die Hälfte Fayalit, ganz wenig Magnetit, ca. 3 % Eisensulfid, Rest Glas. — Der Fayalit ist parallel der Tafelfläche (010) geschnitten. — Weiß = Eisensulfid; lichtgrau = Fayalit; dunkelgrau = Glas. — Zu der Photographie wurde eine Stelle ohne Magnetit aufgesucht.

etwa 5 %) vorhandene Magnetit auf das Glas und die äußere Zone der Fayalitindividuen begrenzt ist, während Magnetit in der Kernpartie der Fayalitindividuen gänzlich fehlt (siehe Fig. 39). Bei wenig Magnetit und viel Fayalit beginnt somit die Krystallisation mit der Ausscheidung von Fayalit. Zuerst bei einer etwas höheren Magnetitmenge begegnen wir der umgekehrten Krystallisationsfolge, zuerst Magnetit und auf einer etwas späteren Stufe ein Anfang der Ausscheidung von Fayalit (siehe Silikatschmelzlös. I, S. 110—116).

Das in einer Menge von meist 2—3 % (siehe S. 39, 49) vorhandene Eisensulfid ist ausschließlich auf das Glas begrenzt (siehe Fig. 36—39). — Innerhalb der Fayalitindividuen begegnen wir freilich oftmals kleinen Ein-

schlüssen von Glas, und innerhalb dieser Einschlüsse treten wiederum kleine Ausscheidungen von Eisensulfid oftmals auf (siehe Fig. 38 und 39).

Diese Beobachtung steht im besten Einklange mit der obigen Beschreibung der nur aus Fayalit und dem schwarzen, undurchsichtigen Glase (Fig. 33 und 34 *a*) bestehenden Schlacken: Die Verfestigung begann mit der Krystallisation von Fayalit in mehr oder weniger reichlicher Menge. Bei der fortgesetzten Abkühlung blieb FeS in einigen Fällen, nämlich bei relativ schneller Abkühlung, im Glase stecken. In anderen Fällen, und zwar bei ein wenig langsamerer Abkühlung, findet auf



Fig. 38.

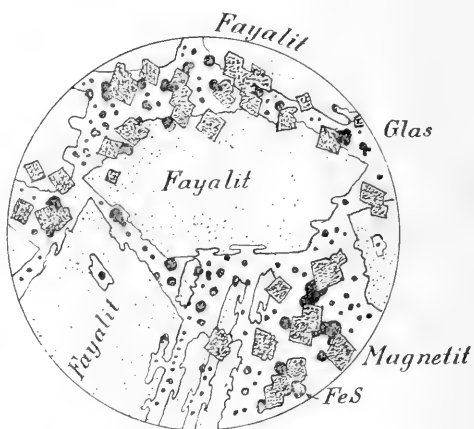


Fig. 39.

Vergrößerung 250:1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.). Rohschlacken von Rörös (cfr. Analyse Nr. 8), bestehend aus: ungefähr die Hälfte Fayalit, ca. 3 % Eisensulfid, ziemlich viel Glas; Fig. 38 ohne, Fig. 39 dagegen mit einigen Prozent Magnetit. — U. d. M.M. bei 350-facher Vergrößerung handgezeichnet und die Originale späterhin vermindert. — Eisensulfid = schwarz; Fayalit = licht punktiert; Magnetit (in Nr. 39) = dunkel punktiert; Glas = weiß.

einer etwas späteren Stufe eine Ausscheidung des aufgelösten Eisensulfids statt. — Bei Nr. 39 zeigen die Magnetitindividuen größtenteils eine idiomorphe Kontur gegen das Eisensulfid. Die Ausscheidung des Magnetits begann somit in diesem Falle früher als diejenige des Eisensulfids. Auch finden wir hier etwas Magnetit in der äußeren Zone der Fayalitkrystalle, während das Eisensulfid nur auf das Glas begrenzt ist. — Bei einer relativen Verschiebung des Mengenverhältnisses zwischen Magnetit und Eisensulfid, nämlich bei wenig Magnetit und viel Eisensulfid, wäre die umgekehrte Krystallisationsfolge zu erwarten.

In den Rörös-Rohschlacken (Analyse Nr. 8), mit durchschnittlich ca. 3 % FeS, ist oftmals rund die Hälfte der ganzen Masse als Fayalit auskrystallisiert, ehe die Ausscheidung des Eisensulfids begann. Das heißt,

das Eisensulfid wurde erst ausgeschieden, nachdem die Menge desselben bis auf etwa 6 % in der Restschmelze gestiegen war.

Die Ausscheidung des Eisensulfids fand jedoch hier ziemlich sicher zuerst bei einer nicht ganz unwesentlichen Unterkühlung statt. Der schätzungsweise angegebene Wert, 6 % Eisensulfid, mag somit nicht die eutektische Grenze repräsentieren. Vielmehr dürfte dieselbe bei einer noch geringeren Menge von Eisensulfid liegen.

Ob das Eisensulfid (FeS mit Schmelzpunkt = 1170°) in den hier besprochenen Schlacken in der festen Phase ausgeschieden oder zuerst in der flüssigen Phase, mit späterhin folgender Krystallisation, abgetrennt wurde, läßt sich wegen der Winzigkeit der Eisensulfidindividuen nicht durch Beobachtung entscheiden. Wir gehen deswegen hier nicht auf diese Frage ein, verweisen aber auf die unten folgende Besprechung der mechanisch beigemengten Steinpartikelchen.

Die u. d. M.M. schätzungsweise bestimmte Menge des aus den Rohschlacken ausgeschiedenen Eisensulfids stimmt mit der aus den chemischen Analysen (siehe S. 49) berechneten Menge von FeS . — So finden wir in den Mansfelder-Schlacken (mit rund 50 % SiO_2 , siehe die Analysen Nr. 32—33 und unten S. 112—114) nach Ermessen u. d. M.M. nur etwa $\frac{1}{3}$ % Eisensulfid, und zwar in winzig kleinen, meist höchstens 0.001—0.002 mm. großen Kügelchen. — In den Kongsberger-Schlacken I (ebenfalls mit rund 50 % SiO_2 , siehe Analyse Nr. 31 und Fig. 40) handelt es sich nach Ermessen um etwa 0.4 %. — In den basischen und eisenreichen Schlacken, mit 28—33 % SiO_2 und 40—50 % FeO , beobachten wir andererseits viel mehr Eisensulfid, nach Ermessen etwa 2—3 %; auch sind die Sulfidausscheidungen hier durchschnittlich gerechnet größer, indem sie einen Diameter von 0.01—0.02 mm. erreichen mögen.

Auch in betreff des Eisensulfids ist somit die Individgröße eine Funktion der Quantität. Dabei dürfte sie auch eine Funktion einer Reihe anderer Faktoren (Viskositätsgrad der Silikatschmelze, Dauer der Abkühlung) sein.

Über die mechanisch beigemengten Steinpartikelchen in den Rohschlacken usw.

Auch für die hier vorliegende Untersuchung habe ich von jeder Schlackenprobe einen Dünnschliff für das Studium in durchfallendem Lichte und einen Polierschliff für das Studium in reflektiertem Lichte verfertigen lassen. Die Untersuchung stützt sich übrigens beinahe ausschließlich auf das Studium bei reflektiertem Lichte (u. d. M.M.), und zwar bei starker Vergrößerung.

Die mechanisch beigemengten Steinpartikelchen und das anfänglich aufgelöste und später ausgeschiedene Eisensulfid unterscheiden sich voneinander durch:

- a) mineralogischen Charakter, was sich durch Farbe und Glanz kundgibt,
- b) Größe,
- c) Form.

Die Kupferrohsteine mit ca. 25—40 % Kupfer (cfr. die obigen Analysen Nr. 7, 9, 10) zeigen u. d. M.M. zwei mineralogische Sulfidbestandteile, einerseits FeS, u. d. M.M. mit einem intensiven gelben Glanz, identisch mit demjenigen von umgeschmolzenem reinen FeS, und andererseits eine Verbindung $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n\text{FeS}$ (siehe S. 20), mit einer charakteristischen bläulich-grauen Farbe¹. Die beiden Bestandteile ergeben dabei eine charakteristische Zusammenwachsung. — Dieselben Kennzeichen wiederholen sich bei den von den Schlacken eingeschlossenen Steinpartikelchen. — In den an Kupfer ganz armen Rohsteinen, wie z. B. dem Rohstein I von Kongsberg (siehe Analyse Nr. 1), ist freilich die kupferhaltige Verbindung nur sehr spärlich vertreten; dagegen erscheint hier metallisches, aus dem hauptsächlich aus FeS nebst etwas Fe bestehenden Schmelzgemisch auskristallisiertes Eisen (siehe S. 21—26), das u. d. M.M. leicht zu erkennen ist, und zwar auch in den beigemengten Steinkügelchen (siehe Fig. 40).

Dieselben sind in der Regel einigermaßen groß, mit Durchmesser gern mindestens 0.5 mm., ausnahmsweise jedoch auch etwas darunter. — Die Steinpartikelchen sind dabei ziemlich unregelmäßig zerstreut. So mag man in Rohschlacken mit 0.5—0.6 % Kupfer, entsprechend ca. 1.5—2 % Steinpartikelchen, in Polierschliffen bisweilen mehrere nahe aneinander auftretende Steinpartikelchen wahrnehmen, während man an anderen Stellen desselben Polierschliffes vergebens nach solchen suchen kann².

Im Gegensatz hierzu steht das anfänglich aufgelöste und später ausgeschiedene Eisensulfid, das in winzig kleinen, regelmäßig verteilten Kügelchen erscheint. Dieses Eisensulfid — u. d. M.M. mit dem charakteristischen gelben Glanz — erreicht nur selten eine Größe von mehr als 0.01—0.02 mm., und meist handelt es sich um viel geringere Dimensionen. Schon die verschiedene Größe genügt somit in der Regel — oder beinahe durchgängig — zur Identifizierung der beiden sulfidischen Bestandteile (einerseits mechanisch beigemengt und andererseits anfänglich chemisch aufgelöst).

Dabei hebe ich besonders hervor, daß ich — wiederholt und mit Anwendung von langer Zeit — in einer ganzen Reihe von Polierschliffen von

¹ Dabei führen sie in der Regel auch etwas *sekundär* gebildetes gediegenes Kupfer, siehe S. 27.

² Die mikroskopische Untersuchung leistet somit einen sehr ungenügenden Dienst zu einer quantitativen Bestimmung der Steinkügelchen. Und in den Dünnschliffen der Schlacken springen die Steinkügelchen beim Schleifen häufig heraus.

kupferhaltigen Rohschlacken bei starker Vergrößerung u. d. M. M. nach *kleinen* Interpositionen von Cu_2S oder $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n\text{FeS}$, die sich durch eine charakteristische blaue, bzw. graublaue Farbe kennzeichnen möchten, und die somit leicht von den kleinen FeS -Interpositionen zu unterscheiden sind, — aber mit negativem Resultat (siehe diesbezüglich unten S. 109).

— In den *glasig* erstarrten Rohschlacken zeigen die Steinpartikelchen im allgemeinen eine Kreisform, das heißt, es handelt sich um Körper von

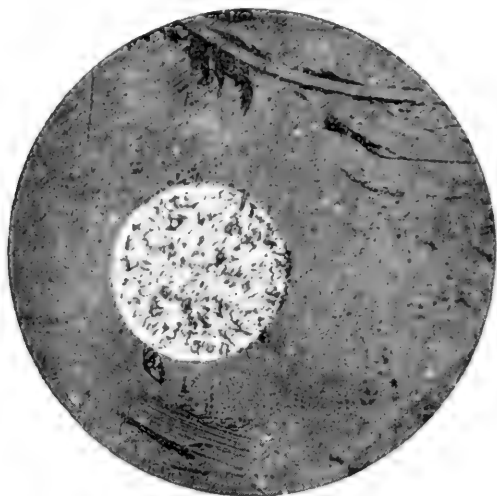


Fig. 40. Vergrößerung 400 : 1. Glasig erstarrte, saure Schlacke (Anal. Nr. 31, siehe auch Nr. I S. 22) von Kongsberg. — Große Steinkugel (hauptsächlich aus FeS nebst etwas metallischem Eisen, siehe Anal. Nr. 1, bestehend). Dabei ganz kleine Ausscheidungen von FeS . — Die dunkeln Streifen auf der Photographie stammen von kleinen Poren.

Kugelform. Im Polierschliff bei starker Vergrößerung u. d. M.M. erscheint die Steinkugel wie ein großer Vollmond, von vielen winzig kleinen gelbstrahlenden Eisensulfid-Sternen umgeben (siehe Fig. 40).

In den *krystallin entwickelten Fayalitschlacken*, mit etwa 25—35 % SiO_2 und 60—45 % FeO (cfr. z. B. Nr. 8 und 10), wo oftmals sogar über die Hälfte aus Fayalittafeln besteht, sind andererseits die Steinpartikelchen häufig zwischen den Fayalittafeln zusammengepreßt (siehe Fig. 41, 42, 43 a u. b). Bisweilen steckt eine Spitze eines Fayalitkrystals etwas in der Steinmasse drin (Fig. 43, a u. c). Häufig sind die Steinpartikelchen durch gerade Linien von den anstoßenden Fayalittafeln abgegrenzt (Fig. 41, 42).

Diese Erscheinungen erklären sich dadurch, daß die Sulfide der Steinpartikelchen noch während der Krystallisation des Fayalits — oder jedenfalls auf der ersten Stufe dieser Krystallisation — flüssig waren.

Die Silikatschmelze und die Sulfidschmelze der Steinpartikelchen bildeten *zwei flüssige Phasen* (mit kleinen flüssigen Sulfidtropfen innerhalb

der Silikatschmelzen). Jede der beiden flüssigen Phasen krystallisierten für sich, — und die Kontur derjenigen flüssigen Phase, welche durch das niedrigste Krystallisations-Intervall gekennzeichnet wird, wurde jedenfalls z. T. durch die schon entstandenen Krystalle der anderen Phase bestimmt. Bei einem ganz geringen Hinuntersinken der relativ spezifisch schweren Sulfidtropfen möchten dieselben z. B. an eine Spitze eines Fayalitkrystals stoßen (Fig. 43, a und c) oder zwischen Fayalittafeln eingeklemmt werden.

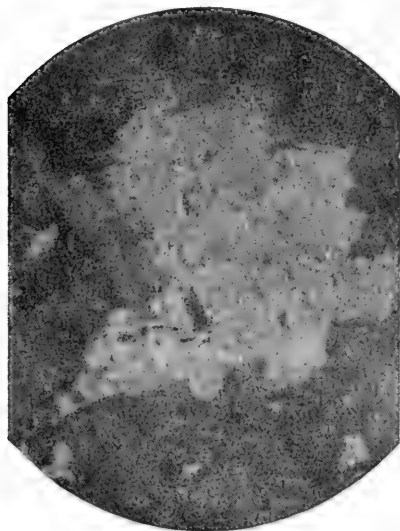


Fig. 41 a.

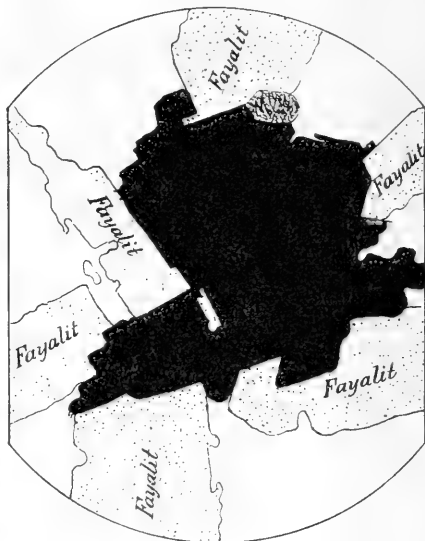


Fig. 41 b.

Vergrößerung 400:1.

In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.). — Rohschlacke (alte) von Fahlun. Große Steinkugel nebst Fayalit und Glas (und rechts oben ein kleiner Magnetitkrystall). — Auf der nach der Photographie und außerdem auch u. d. M.M. direkt gezeichneten Handzeichnung Fig. 41 b sieht man die die Steinkugel zunächst umgebenden Fayalitkrystalle, mit idiomorpher Kontur gegen die Steinkugel.

Die Beobachtung lehrt, daß die Krystallisation des Fayalits der Silikatschmelze auf einer früheren Stufe als die Verfestigung der Sulfidtropfen begann.

Der Schmelzpunkt von reinem Fayalit wird zufolge einer älteren, etwas fraglichen Bestimmung von DOELTER zu 1065^0 angegeben.

In der Tat führen die hier besprochenen Silikatschmelzen (Rohschlacken) durchgängig einen freilich geringen Gehalt von MgO . Es bildet sich folglich ein Mischkrystall $(Fe, Mg)_2SiO_4$ — mit einer relativen Anreicherung von Mg_2SiO_4 in dem ersten Mischkrystall, — was eine kleine Erhöhung der oberen Grenze des Erstarrungs-Intervalls veranlasst. In der anderen Richtung wirken die anderen, besonders silikatischen Lösungskomponenten.

In Schmelzen mit einem theoretischen Inhalt von etwa 50, 60 bis 70 % $(\text{Fe, R})_2\text{SiO}_4$ werden jedoch diese anderen Lösungskomponenten die Temperatur am Beginn der Krystallisation des Fayalits nicht sehr bedeutend hinunterdrücken. — Eine theoretische Erörterung besagt somit, daß die Krystallisation des Fayalits der üblichen Rohschlacken, wie z. B. der Röros- und Sulitjelma-Schlacken (Analyse Nr. 8—10) bei etwa 1100° beginnen mag.



Fig. 42. Vergrößerung 400:1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.). Bessemerschlacke von Röros (von Zusammensetzung annähernd wie Analyse Nr. 11 und 12). — Große Steinkugel, hauptsächlich von Fayalitkrystallen umgeben. Dieselben zeigen idiomorphe Kontur gegen die Steinkugel. Oben und unten ein wenig Magnetit. In dem Glase zwischen den Fayalitkrystallen sieht man etwas Eisensulfid. — Innerhalb der Steinkugel sind zwei kleine Löcher, ziemlich sicher infolge Herausspringens ganz kleiner Stückchen beim Schleifen oder Polieren des Polierschliffes.

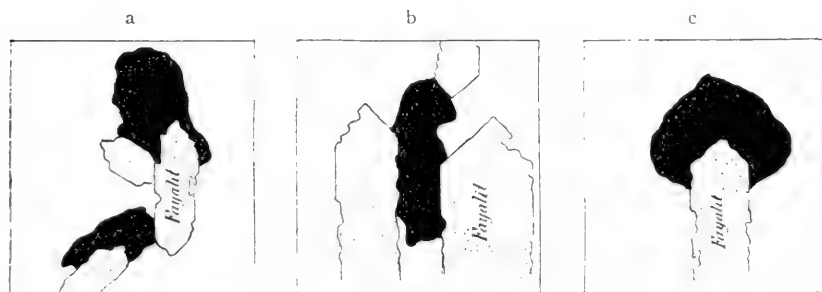


Fig. 43. Vergrößerung 250:1. In reflektiertem Lichte (u. d. M.M.). Verschiedene Rohschlacken von Röros. — Nach Beobachtung u. d. M.M. gezeichnet (Nr. 43 a mit Hilfe einer Photographie u. d. M. M.). — Nur Steinkügelchen (schwarz gezeichnet) und die nächsten angrenzenden Fayalitkrystalle sind mitgenommen.

Und zwei pyrometrische Untersuchungen von mir über die Rösor Rohschlacken ergeben eine Krystallisations-Temperatur von ca. 1125^0 hinunter bis ca. 1040^0 .

Andrerseits liegt das Krystallisations-Intervall der Kupfersteine mit 30—40 % Kupfer zufolge BORNEMANN & SCHREYER bei ca. $980-965^0$ und zufolge RÖNTGEN bei ca. $970-900^0$ (siehe Fig. 4 und 5).

Die Temperaturbestimmungen bestätigen somit unsere aus der Struktur gezogenen Schlüsse, nämlich daß die mechanisch beigemengten Kupferstein-Sulfidtropfen noch jedenfalls am Anfange der Krystallisation des Fayalits flüssig waren.

Die Steinpartikelchen haben oftmals als Fixkörper für den Absatz des sich ausscheidenden Sulfids gedient. Dies läßt sich am einfachsten nachweisen, wo das auskrystallisierte Sulfid aus $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$ besteht (siehe Fig. 28b). — Auch findet man bisweilen einen Kranz von Magnetit rings herum um das Steinpartikelchen.

Über das Auftreten des Kupfers in den Schlacken von Steinschmelzen ausschliesslich oder beinahe ausschliesslich als Steinkugeln („mechanische Verschlackung“),

und über die fehlende oder minimale „chemische Verschlackung“ (darunter minimale Löslichkeit von Cu_2S in FeS-haltigen Silikatschmelzen).

Bezüglich der Verbindungsform¹ des Kupfers in den — bei Gegenwart von Kupferstein gefallenen — Schlacken (Rohschlacken, siehe z. B. die Analysen Nr. 8—10, 13—14, 18—21, 29—30, 32—33) mögen *a priori* die folgenden drei Fälle gedacht werden können:

¹ Betreffs einschlägiger Literatur verweise ich namentlich auf eine ausführliche Abhandlung von W. WANJUKOFF: „Untersuchungen über die beim Steinschmelzen den Eintritt des Kupfers in die Schlacken beeinflussenden Umstände, über die Verbindungsform des Kupfers innerhalb der Schlacken, usw.“ in Metallurgie, IX, 1912, S. 1—27, 48—62. Hier sind die früheren Abhandlungen besprochen; einige derselben werden unten erwähnt.

Ich behandle die Frage über den Kupfergehalt der Schlacken ziemlich eingehend, weil dieselbe eine alte metallurgische Streitfrage ist, und weil ich den Schlüssen, die WANJUKOFF in seiner ausführlichen Abhandlung vom Jahre 1912 zieht, nicht beitreten kann.

- a. mechanische Verschlackung, durch Steinpartikelchen;
- b. oxydische Verschlackung, nämlich Kupferoxyd (oder Oxydul) in Silikatverbindung oder frei für sich ausgeschieden (besonders als Cuprit, Cu_2O);
- c. anfänglich aufgelöstes Sulfid, Cu_2S (eventuell eine Doppelverbindung, $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n\text{FeS}$), das bei der Abkühlung entweder ausgeschieden wird oder in fester Lösung stecken könnte.

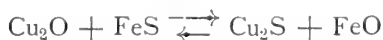
— Bei dem mikroskopischen Studium von Rohschlacken — darunter auch von «absetzbaren» Rohschlacken (mit einem relativ niedrigen Kupfergehalt) — habe ich überaus häufig kleine Steinpartikelchen wahrgenommen, und zwar treten dieselben schätzungsweise¹ in einer solchen Menge auf, wie es dem analytisch festgestellten Kupfergehalt der Schlacke entsprechen würde.

Schon hieraus folgt, daß der Kupfergehalt der üblichen «absetzbaren» Rohschlacken von Steinschmelzen jedenfalls größtenteils, vielleicht sogar ausschließlich von den mechanisch mitgerissenen Steinpartikelchen her stammt.

— Das in Silikatschmelzen bei hoher Temperatur gelöste Monosulfid CaS , $(\text{Ca}, \text{Mn})\text{S}$, MnS , FeS und $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{S}$ scheidet sich bei der Abkühlung — wenn die Erstarrung nicht allzu schnell stattfindet — aus und bleibt nicht in fester Lösung stecken. Dasselbe müßte auch in betreff eventuell aufgelösten Cu_2S oder $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n\text{FeS}$ vorausgesetzt werden.

In der Tat habe ich — wie schon oben (S. 105) besprochen — in einer Reihe von Polierschliffen von kupferhaltigen Rohschlacken u. d. M.M. bei starker Vergrößerung (wie 375 und 750) nach aus der Lösung ausgeschiedenem Cu_2S oder $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n\text{FeS}$, die durch Farbe und Glanz leicht von FeS sich unterscheiden lassen, gesucht, — aber vergebens. Dies berechtigt freilich nicht zu dem Schluß, daß anfänglich aufgelöstes und später ausgeschiedenes Cu_2S (oder $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n\text{FeS}$) in den hier besprochenen Schlacken absolut fehlen müsse. Sicher folgt jedoch aus dieser mikroskopischen Untersuchung, daß in den hier besprochenen Schlacken höchstens nur etwa 0.02 oder 0.04 % Cu als anfänglich aufgelöstes Cu_2S (oder $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n\text{FeS}$) vorliegen kann.

— Bei dem hier besprochenen Schmelzprozeß spielt die Reaktion



(mit Gleichgewicht weit an der rechten Seite) eine fundamentale Rolle. —

¹ Weil die Steinpartikelchen in den Schlacken zufällig zerstreut sind, mag eine Berechnung auf Grundlage des Areals der von den Polierschliffen (oder Dünnschliffen) getroffenen Partikelchen keine exakte Bestimmung liefern.

Das entstandene Cu_2S geht in den Kupferstein ein und entzieht sich somit — eventuelle winzige Spuren abgerechnet — den in den Schlacken stattfindenden Reaktionen. FeS ist durchgängig in großem Überschuß vorhanden, und etwas FeS (bezw. in zinkreichen Schlacken etwas $\text{ZnS} + \text{FeS}$) bleibt in der silikatischen Lösung zurück.

Aus dieser Erörterung folgt, daß oxydisches Kupfer in den hier besprochenen, unter Gegenwart von sehr viel FeS entstandenen Schlacken entweder fehlen muß oder nur in winziger Menge auftreten kann.

Bei dem Zusammenschmelzen von Cu_2O oder CuO mit SiO_2 neben etwas Al_2O_3 , CaO , MgO , FeO usw. erhält man eine einheitliche Schmelze.¹ Aus den Cu_2O -haltigen Schmelzen kristallisiert Cu_2O bei einer nicht zu schnellen Abkühlung und wenn dasselbe nicht in zu spärlicher Menge vorhanden ist — für sich, als Cuprit, Cu_2O heraus.² Beispielsweise wird die rote Farbe der Kupferraffinationsschlacken durch auskristallisiertes Cuprit hervorgerufen.

In einer Reihe von Dünnschliffen von kupferhaltigen Rohschlacken aus Steinschmelzen habe ich vergebens nach Cuprit gesucht.³ Weil dieses Mineral namentlich seiner sehr charakteristischen Farbe wegen sich leicht kundgibt, darf man aus dem negativen Resultat meiner gerade erwähnten mikroskopischen Untersuchung den Schluß ziehen, daß Cuprit in den hier besprochenen Schlacken entweder völlig fehlt, oder nur in nicht nachweisbaren Spuren vorhanden sein dürfte.

¹ Es ist gelegentlich behauptet worden, daß beim Schmelzen von Cu_2O und SiO_2 bestimmte stöchiometrische Verbindungen entstehen. So meint C. NICOLSEN OLIN (Metallurgie, IX, 1912, S. 92—99) die Verbindungen $5\text{Cu}_2\text{O} \cdot \text{SiO}_2$, $3\text{Cu}_2\text{O} \cdot \text{SiO}_2$, $2\text{Cu}_2\text{O} \cdot \text{SiO}_2$ und $\text{Cu}_2\text{O} \cdot \text{SiO}_2$ dargestellt zu haben. Seine Untersuchung berechtigt jedoch nicht zu einem sicheren Schluß in dieser Hinsicht, und seiner Arbeit, wie leider auch vielen anderen entsprechenden metallurgischen Arbeiten aus der späteren Zeit, fehlen die nötigen mineralogischen Untersuchungen.

² Siehe den Abschnitt Cuprit, S. 235—237, in meiner Abh. Mineralbildung in Schmelzmassen, Kristiania 1892.

³ Über die in der metallurgischen Literatur in den späteren Jahren oftmals erwähnten Kupferferrite, namentlich von der angenommenen Zusammensetzung $\text{CuO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ (siehe die Übersicht in Metallurgie, VII, 1910, S. 298) bemerke ich, daß ein entscheidender Nachweis einer solchen Verbindung bisher nicht geliefert ist.

Jedenfalls in den üblichen Schlacken von Steinschmelzen (in Schachtöfen) sind Kupferferrite ausgeschlossen, indem Fe_2O_3 hier teils nur ganz spärlich vertreten ist und teils gänzlich fehlt. So ergeben einige früheren Fe_2O_3 -Analysen von mir (siehe Mineralbildung in Schmelzmassen, 1892, S. 205) in diesen Schlacken in der Regel nur 0.15—0.6 % Fe_2O_3 (und in den Mansfelder-Schlacken, Nr. 32, gar Null Fe_2O_3). In einigen Rohschlacken von Schachtöfen finden wir jedoch ein oder ein paar Prozent Fe_2O_3 .

Die kleine Fe_2O_3 -Menge wird in basischen Schlacken hauptsächlich zur Bildung von Magnetit, bezw. Fe_2O_3 -haltigem Spinell verbraucht; in sauren Schlacken steckt die kleine Fe_2O_3 -Menge dagegen hauptsächlich oder ausschließlich in Silikatverbindung (wie Pyroxen).

— Eventuelles Auftreten von Kupferoxyd (oder Oxydul) in Silikatverbindung wäre aus allgemeinen chemischen Rücksichten vorzugsweise in *sauren* Schlacken zu erwarten. — Um die in solchen Schlacken auskristallisierten Mineralien auf einen eventuellen Gehalt von Kupfer in Silikatverbindung zu prüfen, habe ich einige Untersuchungen ausgeführt.

A. Wir besprechen zuerst eine relativ grobkristalline *Glimmerschlacke* von Kafveltorp (in Schweden), von der Zusammensetzung:¹

Analyse Nr. 66.

S ₂ O ₂	41–44	%
Al ₂ O ₃	9–10	„
FeO	8–11	„
CaO	14–18	„
MgO	12–17	„
ZnO	1.5–2	„
K ₂ O	2.8	„
Na ₂ O	1.5	„
Cu	0.2–0.3	„
S	wenig	

Dabei ein wenig Fluor (!).

Die Biotitblättchen, die parallel der Basis eine Breite bis 5 à 6 mm. erreichen, betragen 10 à 14 % der ganzen Schlackenmasse.

Von grob-gestoßenem Schlackenpulver wurden die Glimmerblättchen mittels der Gleitmethode (auf glattem Papier) isoliert. Nach langdauernden und wiederholten Gleitungen gelang es, ein reines oder beinahe reines Material von Glimmer (Biotit) zu erhalten, ohne oder nur mit einer minimalen Beimischung von Glas und dabei, wie die nachfolgende Analyse ergab, gänzlich ohne anhaftende Steinkügelchen.

Die Glimmerblättchen zeigen unregelmäßige Einschlüsse von Glas und außerdem einigermaßen regelmäßige, beinahe geradlinige, äußerst dünne, parallel (001) eingebettete Einschlüsse von einer schwarzen, undurchsichtigen Substanz, die sich als FeS ergibt (Fig. 44).

Um diese letzteren Einschlüsse soweit möglich zu entfernen, wurden die mechanisch isolierten Glimmerblättchen zuerst äußerst fein gepulvert, dann die Einwäge (3.5867 gr.) mit konzentrischer Salpeter-Salzsäure (40 cm³, 1HCl : 3HNO₃) eine halbe Stunde gekocht, wodurch auch etwas Glimmer angegriffen wurde (Rest 2.1613 gr.; aufgelöst wurde somit ziemlich genau 40 % der ganzen Glimmermasse). Die zwei Portionen, nämlich das in Salpeter-Salzsäure Aufgelöste und das nicht Aufgelöste, wurden (die letztere nach Aufschließen in Soda mit ganz wenig Salpeter) auf S und Cu

¹ Siehe die Analysen Nr. 116–120 in Silikatschmelzlös. I, 1093.

Der gleichzeitig gefallene Kupferstein enthielt ca. 17 % Cu.

Siehe auch eine besondere Abhandlung von mir in Gesellsch. d. Wiss. zu Kristiania 1887, No. 6, S. 19 und Fig. 1.

analysiert* (von Chemiker J. A. BONNEVIE SVENDSEN, Assistent in Chemie an der Technischen Hochschule zu Trondhjem).

Resultat, auf die gesammte Einwäge bezogen:

Analyse Nr. 67.		
	S	Cu
Aufgelöst in Säure	0.111 0/0	Null
Nicht aufgelöst	0.035 "	Null
Summe	0.146 0/0	Null

Zur Kupferbestimmung wurde mit Thiosulfat gefällt; das ausgeschiedene Schwefel wurde filtriert; der Filter geglüht, ohne anderen Rest als die Filterasche. Zur Kontrolle wurde die Filterasche mit Salpetersäure behandelt, und Ammoniak zugesetzt; keine Spur von Blaufarbe konnte nachgewiesen werden.

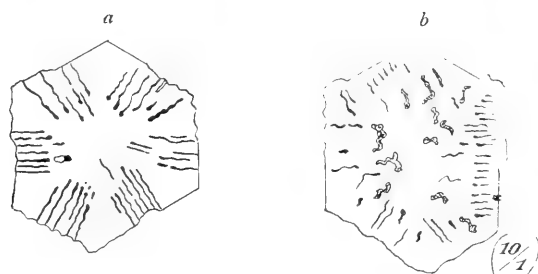


Fig. 44. Biotit aus Schlacke von Kafveltorp (Anal. Nr. 66), mit einigermaßen regelmäßigen Einschlüssen von FeS (schwarz gezeichnet, siehe besonders *a*), und mehr unregelmäßigen Einschlüssen von Glas (punktiert gezeichnet; siehe besonders *b*).

Die Sulfideinschlüsse sind z. T. so äußerst fein in dem Glimmer eingebettet, daß sie durch längere Behandlung mit Salpeter-Salzsäure nicht gänzlich aufgelöst wurden, indem die Säure nicht vollständig in das Innere der Glimmerblättchen hineindringen konnte.

Es ergibt sich hieraus:

1. Der in der Schlacke auskristallisierte Glimmer enthält nicht Kupfer in der Konstitution des Minerals.
2. Die schwarzen Sulfideinschlüsse sind ebenfalls frei von Kupfer. Cu_2S — oder eine Doppelverbindung $\text{Cu}_2\text{S} \cdot n\text{FeS}$ — ist somit nicht vorhanden. — Wie wir schon oben (S. 97—103) erörtert haben, besteht das RS-Mineral in FeO-reichen (und ZnO-armen oder -freien) Schlacken aus FeS. Hiermit stimmt die Undurchsichtigkeit und Farbe der Einschlüsse in dem hier besprochenen Glimmer.

B. Eine entsprechende Untersuchung wurde mit einer «getemperten» Schlacke von Mansfeld (cfr. Nr. 32—33) ausgeführt. Dieselbe war an dem Werke langsam, nämlich im Laufe von ein paar Tagen, abgekühlt, wodurch eine krystalline Struktur entstand. Das ausgeschiedene Mineral

scheint hauptsächlich ein Augitmineral zu sein. Das Mineral wird nur ganz schwach von Säuren angegriffen.

Das äußerst feingeriebene Pulver (Einwäge 10 gr.) wurde zuerst eine halbe Stunde mit konzentrierter Salpeter-Salzsäure (40 cm³) gekocht, dann Wasser zugesetzt und dekantiert. Weiter wurde nochmals mit konzentrierter Salpeter-Salzsäure (40 cm³), und zwar eine ganze Stunde, gekocht. Das bei der Säurebehandlung Aufgelöste und das nicht Aufgelöste (68.5 %) wurden getrennt auf S und Cu analysiert (von J. A. BONNEVIE SVENDSEN).

Resultat, auf die ganze Einwäge bezogen:

Analyse Nr. 68.

	S	Cu
Aufgelöst in Säure	0.154 %	0.093 %
Nicht aufgelöst	0.087 „	0.012 „
Sum	0.243 %	0.105 %

Zur Kontrolle wurde das als Sulfur gefällte und als Oxyd geglühte und gewogene Kupfer in Salpetersäure gelöst und Ammoniak zugesetzt; die erstere Portion gab eine ganz starke und die letztere eine viel schwächere, aber noch sicher erkennbare Blaufärbung.

Zu Mansfeld-Eisleben wird der bekannte Kupferschiefer (mit 2.75–3 % Cu) in großen Schachtöfen verschmolzen. Aus 100 t Kupferschiefer wird 7 à 7.5 t Rohstein (mit durchschnittlich 40–42 % Cu, 21–24 % Fe, 24–25 % S) erhalten. Wegen der Schwermelzbarkeit der Schlacken verbrauchten 100 t Beschickung (Kupferschiefer nebst ein wenig Zusatzschlacke) ca. 18 t Koks, während 100 t Beschickung (Erz und Zuschlag) bei den üblichen basischen Schlacken (wie Nr. 8, 10, 22–23) im allgemeinen nur 11–13 t Koks nötig haben (und bei Pyritschmelzung noch weniger). Bei den Mansfelderöfen fließt die Schlacke mit einer Temperatur von ca. 1500°¹ aus dem Ofen heraus, während die Ofentemperatur bei den basischen Schlacken meist nur 1300° oder 1300°–1350° beträgt. — Die Mansfelder-Schlacken (Nr. 32) sind bei ca. 1200° sehr zähflüssig (und erstarren deswegen bei schneller Abkühlung glasig); bei rund 1500° sind sie dagegen ungefähr ebenso dünnflüssig wie die basischen Schlacken (Nr. 8, 10, 22–23) bei rund 1300°. Aus diesem Grunde und wegen des niedrigen sp. Gewichtes der Mansfelderschlacken (siehe S. 117) findet eine ganz gute Trennung zwischen Stein und Schlacke statt; auch hat man Vortiegel von bedeutender Größe für den Absatz des Steins. — Es resultiert eine Schlacke mit meist 0.2² bis 0.3 %, durchschnittlich ca. 0.23 % Cu (als Kupfer berechnet), und zwar bei einem Stein mit 40–42 % Cu. Es ist nicht gelungen, den durchschnittlichen Kupferprozent der Schlacke noch niedriger herunterzudrücken.

Selbst in den Mansfelderschlacken, mit nur 0.2–0.3 % Cu, kann man — mit bloßem Auge oder mit der Lupe — gelegentlich Steinkügelchen beobachten.³ Auch ist es SCHERTEL⁴ gelungen, durch längeres Rühren der geschmolzenen Schlacke von Mansfeld den Kupfergehalt auf nur 0.04–0.06 % herabzusetzen.

¹ Als Kontrolle dieser hohen Ofentemperatur dient u. a. die relativ sehr hohe CO-Menge in dem Ofengas.

² Vereinzelte Schlackenproben wie z. B. Nr. 33, mögen einen niedrigeren Kupfergehalt geben.

³ Siehe u. a. WANJUKOFFS Abh. in Metallurgie, 1912, S. 52–53.

⁴ Studien über einige Verlustquellen des Blei- und Kupferhochofenprozesses. Diss. Dresden. Ausführliches Referat in WANJUKOFFS Abh. S. 49–53.

Aus der Analyse Nr. 68 folgt:

1. Das durch langdauernde Behandlung mit konzentrierter Salpeter-Salzsäure, wodurch 31.5 % der ganzen Schlacke gelöst wurde, aufgelöste Kupfer, 0.093 %, mag — hauptsächlich oder ausschließlich — von Steinkügelchen herrühren. Zu 0.093 % Cu entspricht nur ca. 0.06 % S, während 0.154 % S gefunden wurde. Der Rest, ca. 0.094 % S, stammt von RS, nämlich FeS (siehe S. 97—103).
2. Der in Salpeter-Salzsäure nicht aufgelöste Rest, 68.5 %, enthielt noch 0.087 % S und 0.012 % Cu, oder, bezogen auf den Rest 0.127 % S und 0.018 % Cu. — Die Verbindungsform dieser winzigen Kupfermenge läßt sich nicht sicher bestimmen. Es handelt sich hier nicht um Steinkügelchen, weil dieselben im allgemeinen nicht zu submikroskopischer Kleinheit heruntersinken, sondern entweder um anfänglich aufgelöstes und später ausgeschiedenes Cu_2S oder um Kupfer in Silikatverbindung. Wahrscheinlich ist das letztere der Fall. — Dies würde somit selbst bei so sauren Schlacken wie den Mansfeldern (mit ca. 50 % SiO_2) nur rund 0.02 % Cu in Silikatverbindung ergeben, — somit einen so winzigen Betrag, daß er technisch oder ökonomisch gerechnet ohne Bedeutung ist.

Das in dem nicht aufgelösten Silikatmineral steckende S, nämlich (bezogen auf den Rest) 0.127 % S mag hauptsächlich oder ausschließlich von äußerst fein innerhalb des Silikats eingebettetem FeS herrühren. Wir verweisen auf die Bemerkungen über die kleine FeS-Menge in den oben umhandelten Glimmer. — Selbst wenn die winzige Kupfermenge in dem nicht aufgelösten Rest, nämlich 0.018 % Cu, als Cu_2S vorläge, würde dies nur 0.005 % S verlangen. Es bleibt also zurück $0.127 \div 0.005$ gleich rund 0.12 %, das als FeS existieren muß.

In den auskristallisierten Glimmer geht keine Spur von Kupfer und in das aus der Mansfelder-Schlacke (mit rund 50 % SiO_2) auskristallisierte Silikatmineral (wahrscheinlich Augit) höchstens ca. 0.02 % Kupfer ein. In den basischen Schlacken, mit 30—35 % SiO_2 , mag noch weniger Kupfer in Silikatverbindung stecken, — also so wenig, daß es ökonomisch gerechnet gänzlich außer Betracht gesetzt werden mag.

Durch die *mikroskopische* Untersuchung wurde festgestellt, daß Cu_2S in den hier besprochenen Silikatschmelzen, die durchgängig mehr oder minder FeS enthalten, entweder gänzlich unlöslich oder nur minimal löslich ist. — Und durch die *chemische* Untersuchung wurde festgestellt, daß

die RS-Einschlüsse in dem Glimmer keine Spur von Cu_2S enthalten, während dagegen ein winziger Gehalt von Cu_2S (von höchstens 0.02 % Cu = 0.025 % Cu_2S) in der Mansfelder-Schlacke nicht ausgeschlossen ist.

Die Löslichkeit von Cu_2S in Silikatschmelzen mag somit im allgemeinen nur äußerst gering sein. Und ist in den Silikatschmelzen etwas FeS — in den basischen Schmelzen 2 bis 3 % FeS — vorhanden, so muß, infolge des Gesetzes von der Löslichkeitserniedrigung durch ein gemeinschaftliches Ion, im vorliegenden Falle S, die Löslichkeit von Cu_2S noch weiter heruntergesetzt werden. Wahrscheinlich handelt es sich um Beträge von höchstens etwa 0.01 oder gelegentlich vielleicht bis etwa 0.025 % Cu_2S .

— WANJUKOFF kam in seiner schon oben zitierten Abhandlung (1912) zu dem Resultat, daß der Cu-Gehalt der üblichen «absetzbaren» Schlacken von Steinschmelzen hauptsächlich von aufgelöstem Cu_2S herrühren müsse. Ich finde jedoch die Schlüsse, die er aus seinen Untersuchungen zieht, nicht berechtigt. Er macht nicht den nötigen Unterschied zwischen Cu_2S in Steinkügelchen und anfänglich aufgelöstem und später ausgeschiedenem Cu_2S . Er unterschätzt dabei die Schwierigkeit, die mit dem vollständigen Herabsinken der Steinkügelchen verknüpft ist. Und seine physikalisch-chemischen Betrachtungen über den Einfluß von FeS auf die Löslichkeit von Cu_2S sind irrig.

Wir geben ferner eine Übersicht über die *technischen Erfahrungen* bezüglich des Cu-Gehalts der Schlacken von Steinschmelzen.

1. Unter sonst gleichen Bedingungen steigt der Cu-Gehalt der Schlacke mit dem *Cu-Gehalt des Erzes* (oder der Beschickung).
2. Bei demselben Cu-Gehalt des Erzes (oder der Beschickung) und bei auch sonst denselben Bedingungen steigt der Cu-Gehalt der Schlacke mit dem *Cu-Gehalt des resultierenden Kupfersteins*.

Beispielsweise ergeben die oben (S. 41 u. 44) zusammengestellten wöchentlichen, bzw. monatlichen Durchschnittsanalysen von Rös und Sulitjelma im Haupt-Durchschnitt:

	Prozent Cu in Kupferstein	Prozent Cu in Schlacke
R ö s		
7 Wochen	35.0—41.8, Mittel 38 % Cu	0.71 % Cu
9 Wochen	30.0—34.9, — 33 % „	0.615 % „
9 Wochen	21.9—29.9, — 26.3 % „	0.58 % „
Sulitjelma		
6 Monate	29.0—34.6, Mittel 31 % Cu	0.61 % Cu.
9 Monate	23.5—29.9, — 27 % „	0.53 % „

Ferner verweisen wir auf die unten (auf dieser Seite) folgende sehr instruktive Tabelle von Tennessee Copper Co.

3. Unter sonst gleichen Bedingungen erniedrigt sich der Cu-Gehalt der Schlacken mit *hoher Ofen-Temperatur*, d. h. mit *zunehmender Dünnflüssigkeit* der Schlacke.

4. Unter sonst gleichen Bedingungen steigt der Cu-Gehalt der Schlacke, wenn man von Schlacken mit etwa 35 % SiO_2 (und dabei etwa 35 % FeO) zu *mehr basischen* und gleichzeitig *eisenreicheren* Schlacken übergeht, und zwar steigt der Cu-Gehalt der Schlacke ganz erheblich, wenn man mit sehr basischen und gleichzeitig stark eisenreichen Schlacken, mit 25—28 % SiO_2 und etwa 50 % FeO arbeitet.

Ich stütze mich hierbei teils auf das Studium der originalen Betriebsanalysen an mehreren Kupferwerken und teils auf zahlreiche Konferenzen, die ich im Laufe von 30 Jahren mit Hüttenbeamten an verschiedenen europäischen Hüttenwerken gehabt habe.

Ferner verweise ich auf eine Abhandlung in Eng. Min. Journ. 1904, I, S. 395 — auf welche Abb. ich übrigens erst kürzlich aufmerksam geworden bin — von W. A. HEYWOOD über „Copper Losses in Blast Furnace Slags“. Hier ist das Resultat von 2500 Kupferbestimmungen in Schlacken an der Schmelzhütte von Tennessee Copper Co. graphisch dargestellt. Die durchschnittliche Zusammensetzung der Schlacken ist durch die obige Analyse Nr. 14 (S. 46) wiedergegeben. Aus der graphischen Tabelle entnehme ich die folgenden Durchschnittswerte, bei Kupferstein mit 30, 35 und 40 % Cu und bei Schlacken mit etwas unterhalb 30 % SiO_2 , 30—31 % SiO_2 , 31—32 % SiO_2 , 32—33 % SiO_2 , und etwas oberhalb 33 % SiO_2 :

Prozent Cu in Schlacken bei			
Schlacken mit Prozent SiO_2	Kupferstein mit		
	30 % Cu	35 % Cu	40 % Cu
Etwas unterhalb 30 % SiO_2	0.465 % Cu	0.475 % Cu	0.495 % Cu
30—31 % SiO_2	0.44 - „	0.465 - „	0.475 - „
31—32 % —	0.42 - „	0.435 - „	0.45 - „
32—33 % —	0.41 - „	0.425 - „	0.44 - „
Etwas oberhalb 33 % SiO_2	0.38 - „	0.41 - „	0.43 - „

Somit eine unzweifelhafte Zunahme des Cu-Gehaltes der Schlacke mit abnehmender SiO_2 -Menge derselben, und dabei auch bei steigendem Cu-Gehalt in dem resultierenden Kupferstein.

Das sp. Gew. der üblichen Kupfersteine mit 25—40 % Cu beträgt (bei 15°) 5.1—5.2. Das sp. Gew. (ebenfalls bei 15°) von Schlacken (größtenteils krystallin entwickelt) mit ca. 85 % $\text{SiO}_2 + \text{FeO}$ und Rest Al_2O_3 , CaO usw. beträgt, zufolge früheren Bestimmungen von mir:

40 % SiO_2 und ca. 45 % FeO	ca. 3.50
35 - - - 50 - - -	- 3.65
30 - - - 55 - - -	- 3.80
25 - - - 60 - - -	- 3.95
20 - - - 65 - - -	- 4.10

Zufolge früherer Bestimmung (durch Trennung mit einer schweren Flüssigkeit, KHgI_3) von mir hat das Glas der Mansfelder-Schlacken (Nr. 32—33) sp. Gew. = 2.70 (und der krystalline Teil = 2.97).

Unter annähernd demselben Verhältnis zwischen FeO einerseits und Al_2O_3 , CaO , MgO usw. andererseits steigt somit das sp. Gew. der Schlacken mit zunehmender Basizität, — und zwar mit rund 0.03 per Prozent abnehmender SiO_2 -Menge (oder zunehmender FeO -Menge).

Mit zunehmender Basizität steigt dabei auch die Dünnschmelzbarkeit (bei derselben Temperatur, wie z. B. 1300°) der Schlacken.

Die Erhöhung des sp. Gewichtes der Schlacke erschwert das Hinuntersinken der Steinkügelchen; in entgegengesetzter Richtung wirkt die Erhöhung der Dünnschmelzbarkeit. Die empirische Erfahrung lehrt, daß die Erhöhung des sp. Gewichtes ein wichtigeres Moment ist, als die gleichzeitig stattfindende Erhöhung der Dünnschmelzbarkeit.

Bezogen auf 15° beträgt der *Unterschied* zwischen dem sp. Gew. von Kupferstein (5.15) und von Schlacke:

bei 35 % SiO_2	ca. 1.5
« 25 % —	1.2

Ziemlich genau derselbe Unterschied wird sich auch im Schmelzfluß geltend machen.

— Die obigen Bemerkungen beziehen sich nur auf Rohschlacken mit höchstens 35—38 % SiO_2 .¹ Bei noch höherer SiO_2 -Menge (und geringerer FeO -Menge) erniedrigt sich freilich das sp. Gew. der Schlacken, aber andererseits werden die Schlacken schon bei 40—45 % SiO_2 ziemlich zähflüssig, und bei 50 % und noch mehr SiO_2 wird die Zähflüssigkeit so bedeutend, daß eine besonders hohe Ofen-Temperatur, d. h. eine besonders hoher Koksverbrauch nötig ist.

Bei solchen sehr zähflüssigen Schlacken steigt der Kupfergehalt erheblich, falls man nicht sehr viel Koks (wie beispielsweise in Mansfeld, siehe S. 113) verwendet.

5. In den Rohschlacken begegnet man beim Schmelzen von silberhaltigen Kupfererzen ziemlich genau *demselben Verhältnis* zwischen *Kupfer* und *Silber* in der Schlacke wie in dem Kupferstein.

Ich verweise hierüber namentlich auf H. O. HOFMAN: Metallurgy of Copper, New York 1914, und die dort zitierte amerikanische Spezial-Literatur.

HOFMAN gibt (S. 259) eine Tabelle von 7 verschiedenen Kupferwerken über die Cu- und Ag-Prozente im Stein und in der Schlacke (Beispiel: 31.91 % Cu und 11.34 Unzen Ag

¹ Nebenbei bemerke ich, daß dieselben am leichtesten schmelzbar sind, weil sie in der Nähe der eutektischen Grenze zwischen $(\text{Fe}, \text{R})_2\text{SiO}_4$ und RSiO_3 liegen.

im Stein; 0.35 % Cu und 0.11 Unzen Ag in der Schlacke; — 23.00 % Cu und 27.50 Unzen Ag im Stein; 0.43 % Cu und 0.45 Unzen Ag in der Schlacke). Durchgängig begegnet man beinahe demselben Cu : Ag-Verhältnis in beiden Produkten; die kleinen Abweichungen, teils in der einen und teils in der anderen Richtung, mögen durch die unvermeidlichen Analysenfehler (namentlich bei der Bestimmung der geringen Ag-Gehalte in der Schlacke) erklärt werden. — HOFMAN kommt zu dem Schluß, „that the Ag-content of slags appears to run parallel with that of Cu; that of Au shows no recognized regularity.“

Andrerseits ergibt eine von C. A. GRABILL („Notes on the Metall Losses in Copper Slags“, Eng. Min. Journ. 1910, I, S. 776) veröffentlichte Tabelle über das Verhältnis Cu : Ag : Au in Stein und in zugehöriger Schlacke eine relative Abnahme von Ag in der Schlacke. Seine Zahlenwerte stimmen somit nicht völlig mit der von HOFMAN gelieferten Darstellung überein.

6. An mehreren Werken, wo ich die Entwicklung ziemlich genau verfolgt habe, stieg der Kupfergehalt der Schlacke beim Ersetzen der früher angewandten Sumpfföfen (mit langdauernder Trennung zwischen Schlacke und Stein innerhalb des Ofens) durch die modernen Brillenöfen (mit kleiner auswendiger Brille).

Und bei vielen Werken hat man eine Erniedrigung des Kupfergehaltes in den Schlacken beim Ersetzen der früher gebräuchlichen kleinen Brillen durch sehr große Brillen erzielt. — Das heißt, unter sonst gleichen Bedingungen vermindert sich der Kupfergehalt der Schlacken durch lange Zeit für die Trennung zwischen Stein und Schlacke.

— Ferner lenke ich die Aufmerksamkeit darauf, daß man bei Laboratoriumsversuchen, durch langdauerndes Erhalten der Schlacken bei ziemlich hoher Temperatur, eine erhebliche Verminderung des Kupfergehaltes der Schlacken erreicht hat, indem gleichzeitig am Boden des Schmelztiegels etwas Kupferstein abgesetzt wurde. Ich verweise auf die schon oben erwähnten Versuche von LEPSØE (S. 42—43) und von SCHERTEL (S. 113). — Namentlich scheint ein Rühren der Schlacke das Herabsinken der Steinkügelchen zu begünstigen. Dies mag darauf beruhen, daß oftmals Gasblasen an die Steinkügelchen anhaften dürften, ungefähr wie bei der Flotation. Aus diesem Grunde mag man gelegentlich sogar einen etwas höheren Cu-Gehalt im Gipfel als in der Mitte der Schlackentöpfe erhalten.

Aus den *mikroskopischen* Untersuchungen, aus den *chemischen* Untersuchungen, aus besonderen *Laboratorium-Schmelzversuchen*, daneben auch aus den *technischen Erfahrungen* (siehe 2—6) folgt, daß der Kupfergehalt der Rohschlacken von Steinschmelzen praktisch gerechnet ausschließlich von Steinpartikelchen herrührt. — Die Verschlackung durch Cu_2S ist Null oder minimal; und die oxydische Verschlackung spielt in basischen Schlacken keine Rolle. Dagegen mag in sehr sauren Schlacken eine minimale oxydische Verschlackung stattfinden.

Bezüglich CoS , NiS , PbS und Ag_2S ergibt die metallurgische Erfahrung, daß diese Sulfide in Silikatschmelzen entweder unlöslich oder nur in Spuren löslich sind.

— Beim Schmelzen von Nickel-Kupfer-Sulfiden (Ni-haltigem Magnetkieserz) enthalten die Rohschlacken Nickel und Kupfer jedenfalls annähernd in derselben Proportion wie der resultierende Nickel-Kupferstein. Hieraus ergibt sich, daß der geringe Nickelgehalt in ähnlicher Weise wie der geringe Kupfergehalt größtenteils von Steinkügelchen herrührt. NiS mag somit in diesen Schlacken (in der Regel mit 32–38 % SiO_2 und 2.5–2 % FeS) nicht mehr löslich sein, wie es mit Cu_2S der Fall ist. Zu demselben Resultat gelangen wir auch bei dem Studium der beim Schmelzen von nickelreicheren Nickel-Kupfersteinen, mit 50 bis 70 % NiS , gefallenen Schlacken.

Dagegen mag in den hier besprochenen Schlacken ein ganz wenig Nickel als Oxyd., in Silikatverbindung, eingehen, — und Kobalt wird in den hier besprochenen Schlacken zu einem wesentlichen Teil als Oxyd., in Silikatverbindung, verschlackt. — Ich verweise hierüber auf meine Abhandlung „Om Nikkel osv.“, 1902.

Ag_2S . — Zur Beleuchtung nehmen wir das frühere Steinschmelzen zu Kongsberg, nämlich Rohschmelzen (I) und Konzentrationsschmelzen (II), mit durchschnittlichen Betriebsergebnissen:

I.

Ca. 20 % Stein (Rohstein, Anal. Nr. 1) mit ca. 0.33 % Ag.
 • 80 % Rohschlacke (Nr. 31, S. 47, 105) - - 0.0045 % -

II.

Ca. 10 % Stein (Konzentr.stein) mit ca. 4 % Ag.
 • 90 % Schlacke (Nr. 15) - - 0.045 % -

Die betreffenden Steine bestanden hauptsächlich aus FeS ; dabei — außer Ag_2S — aus etwas Cu_2S usw. (siehe meine S. 21 zitierte Abh.).

In den Schlacken I–II läßt sich — sowohl makroskopisch wie mikroskopisch — eine Beimischung von Steinpartikelchen nachweisen (betreffend I siehe Fig. 40), und zwar schätzungsweise in einer Menge, die dem analytisch gefundenen Silbergehalt der Schlacken entspricht. Es handelt sich somit um die übliche „mechanische“ Verschlackung. — Eine „oxydische“ Verschlackung von Silber ist ausgeschlossen. — Aus dem Vorhandensein der Steinkügelchen darf man freilich nicht schließen, daß Ag_2S in dem geschmolzenen Silikat absolut unlöslich sein sollte. Wir sind nur berechtigt, den Schluß zu ziehen, daß in den Schlacken Nr. I höchstens 0.001 % Ag und in Nr. II höchstens 0.01 % Ag als aufgelöstes Sulfid, Ag_2S , vorliegen dürfte. Selbst eine solche minimale Löslichkeit ist jedoch nicht wahrscheinlich.

Über das Gleichgewicht zwischen R in RS und R in der Silikatschmelze.

Die Zusammensetzung des aus den Silikatschmelzen ausgeschiedenen Sulfids ist unabhängig von der Zusammensetzung des Ausgangsmateriales, dagegen abhängig von der Zusammensetzung der flüssigen Sulfid : Silikatschmelzlösung. Zwischen R in RS und R in den Komponenten (Silikaten,

bisweilen auch Aluminaten usw.) der Silikatschmelze findet ein Gleichgewicht statt:



CaS : MnS. Wie oben (S. 62) erörtert, ergibt sich die Beziehung zwischen Ca : Mn in dem Sulfid und Ca : Mn in dem Silikat durch die Farbe des ausgeschiedenen Sulfids. Mn scheint sich in dem Sulfid relativ zu konzentrieren — wahrscheinlich sogar ziemlich stark.

CaS : FeS. — Bei nur ungefähr 1 % FeO gegen 30—40 % CaO, somit bei rund 1Fe : 40—50 Ca, krystallisiert (Ca, Fe)S, mit einer ziemlich niedrigen Beimischung von FeS.

Schon bei 1Fe : 10—15 Ca resultiert dagegen ein Eisensulfid, FeS oder vielleicht (Fe, R)S, jedoch mit so wenig RS, daß es sich u. d. M.M. nicht von reinem FeS unterscheiden läßt (siehe S. 97).

FeS : ZnS. Schon bei etwa 7 % ZnO neben 30—40 % FeO in der ganzen Schmelze, somit bei 1Zn : höchstens ca. 5Fe, besteht das ausgeschiedene Sulfid aus (Zn, Fe)S, mit überwiegend ZnS, jedoch mit einer nicht unwesentlichen isomorphen Beimischung von FeS (siehe S. 83).

Das Gleichgewicht Zn : Fe in a) auskrystallisiertem Sulfid, b) auskrystallisiertem Aluminat (Zinkspinell) und c) auskrystallisiertem Silikat (Zinkfayalit) beleuchten wir durch die Untersuchung einer Freiburger Schlacke, wo A. W. STELLZNER (l. c., S. 88) Zinkspinell erforscht hat.

Die Bauschanalyse der betreffenden Schlacke war:

Analyse Nr. 69.

SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	ZnO	S
20.7	2.5	wenig (ca. 0.3)	48.5	14.4	4.1

Dabei 3.9 % CaO, 1.2 % MgO, 0.4 % MnO, 3.9 % PbO, 0.3 % BaO, 1.2 % CuO. — Die ganze Menge von Fe, Zn, Cu usw. wird hier als Oxyd angegeben. Nach Abzug von Steinkügelchen enthält die Schmelze stöchiometrisch 1Zn : ca. 2.75 Fe.

Eine Analyse der übrigens ziemlich stark mit RS, daneben auch mit einigen Steinkügelchen, ein wenig Spinell und wohl auch etwas Glas verunreinigten Zinkfayalitkrystalle ergab:

Analyse Nr. 70.

SiO ₂	FeO	ZnO	MgO	CaO	BaO
28.45	41.98	18.55	0.84	3.00	1.80

Dabei 0.75 % SnO₂, 1.31 % Al₂O₃, 2.50 % PbO, 0.60 % CuO, 1.70 % S; somit in dem reinen Zinkfayalit 1Zn : ca. 2.25 Fe.

Über die Zusammensetzung des Zinkspinells und des Zinksulfids siehe S. 83 u. 88. In dem zum Schluß erstarrten Glas steckt relativ wenig ZnO.

Das stöchiometrische Verhältnis Zn : Fe beträgt somit :

In der ganzen Schmelze	1 Zn : ca. 2.75 Fe.
. dem Zinkfayalit	1 Zn : « 2.25 Fe.
. dem Zinkspinell (in ZnO und FeO) 1 Zn : «	0.6 Fe.
. dem Sulfid	1 Zn : « 0.1—0.2 Fe.

Zn konzentriert sich somit stark in dem Aluminat und noch viel stärker in dem Sulfid.

In dem aus der Silikatschmelze auskristallisierten Monosulfid konzentriert sich somit :

Mn in Relation zu Ca,
 Fe in Relation zu Ca,
 Zn in Relation zu Fe (und Ca).

Bei Gegenwart von sehr viel FeS wird nur ein Teil desselben in der Silikatschmelze aufgelöst; der Rest bildet eine besondere flüssige Phase — die flüssige Sulfidschmelze.

Die Gleichgewichte :



liegen sehr weit an der rechten Seite. Es bilden sich folglich NiS, bzw. Cu₂S, die in der Silikatschmelze entweder unlöslich oder nur in Spuren löslich sind, und die somit gleich eine besondere flüssige Phase bilden.

Vergleich zwischen der Schmelzpunkt-Erniedrigung einerseits der Sulfidschmelzlösungen und andererseits der Silikat-schmelzlösungen.

Bezüglich der Silikatschmelzlösungen verweise ich auf die beistehenden Tabellen (S. 123 u. 124), die nach demselben Schema wie für die entsprechenden Tabellen für die Sulfide (S. 17 u. 18) ausgearbeitet sind. Die Schmelzkurven der binären Silikatsysteme, mit Eutektikum, reproduziere ich auf Fig. 45, wo jedoch die binären eutektischen Mischkrystallsysteme mit einer nennenswerten Menge von *a* in *B* und *b* in *A* nicht mitgenommen sind.

Wir stützen uns hier auf die an dem Washington-Institut ausgeführten, aus den späteren Jahren stammenden Präzisionsuntersuchungen. — Systeme enthaltend MgSiO_3 , das einen wirklichen Schmelzpunkt nicht besitzt, werden nicht berücksichtigt.

1. und 2. BOWEN, The Ternary System Diopside-Forsterite-Silica. Amer Journ. of Sc., Sept. 1914.

3. SHEPHERD and RANKIN. The Binary Systems of Alumina with Silica, Lime and Magnesia. Ebenda, Okt. 1909.

4. BOWEN. The Crystallization of Haplobasaltic, Haplodioritic and related Magmas. Ebenda, Aug. 1915.

5. RANKIN, with WRIGHT: The Ternary System $\text{CaO}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{SiO}_2$. Ebenda, Jan. 1915.

6. ANDERSEN. The System Anorthite-Forsterite-Silica. Ebenda, April 1915.

7. ALLEN and WHITE. Diopside and its Relations to Calcium and Magnesium Metasilicates. Ebenda, Jan. 1909.

8. BOWEN. The Sodium-Potassium Nephelinites. Ebenda, Febr. 1917.

9. BOWEN. The Binary System $\text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8 : \text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$. Abstract of Thesis, 1912. Das Eutektikum bezieht sich auf Nephelin : Anorthit, und es findet ein Knickpunkt zwischen Carnegeit und Nephelin, mit $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ -Lösung, bei 1352° statt. Der in meiner Tabelle angegebene Schmelzpunkt-Unterschied, ca. 225° , ist somit wenig beleuchtend (und gibt ein zu hohes Bild). Es muß auf die Originalarbeit hingewiesen werden.

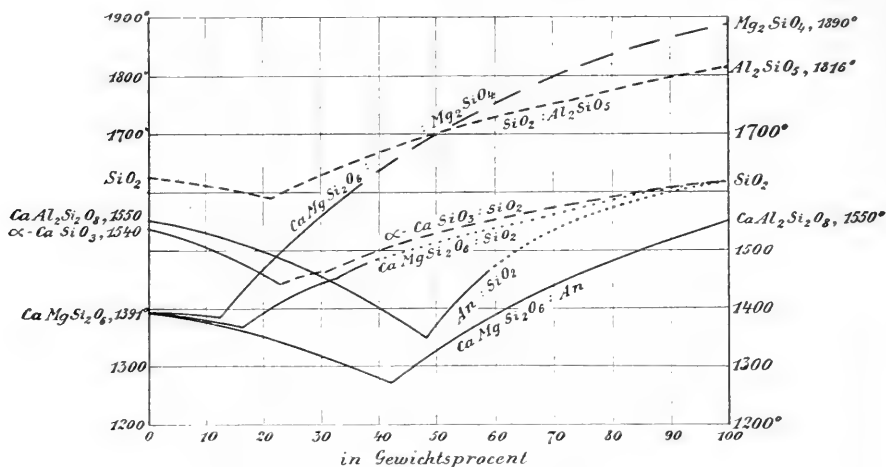


Fig. 45. Binäre Silikatsysteme mit Eutektikum.

Bei den binären eutektischen Silikat-Systemen liegt — wie ich schon auf Grundlage einiger vorläufiger Untersuchungen in meiner Abhandl. Silikatschmelzlös. II betonte — das Eutektikum jedenfalls annähernd in der Mitte der beiden Komponenten, wenn dieselben ungefähr gleich hohe Schmelzpunkte haben. Bei einem bedeutenden Schmelzpunkt-Unterschied verschiebt sich das Eutektikum in die Richtung nach der am niedrigsten schmelzenden Komponente¹ (cfr. die Bemerkungen S. 18).

¹ U. a. verweise ich auf das Eutektikum zwischen den Feldspaten und dem Quarz. — Das Eutektikum zwischen Anorthit (Schmelzp. 1550°) und Quarz enthält (bei einem Atmosphären-Druck) ca. 48 % SiO_2 , — dasjenige zwischen Mikroklin (mit viel niedrigeren Schmelzpunkt, etwa 1150°) in den Tiefengesteinen zufolge meiner früheren Untersuchungen dagegen nur ca. 27.5 % Quarz.

Binäre eutektische Mischkristall-Systeme.

	Schmelzpunkt der am		Schmelzp.- Unterschied der beiden Komp.	Zusammensetz. des Eutektikums. Gew.-prozent der am höchsten schmelzb. Komp.	Schmelzp. des Eutektikums	Schmelzpunkt- Erniedrigung am Eutektikum, verglichen mit dem Schmelzpunkt der am niedrigsten schmelzb. Komp.
	niedrigsten schmelzbaren Komp	höchsten schmelzbaren Komp.				
CaMgSi ₃ O ₆ (Diops.) : Mg ₂ SiO ₄ (Forst.) . .	Diops. 1391°	Forst. 1890°	500°	ca. 12 0/10 Forst.	ca. 1386°	4—5°
CaMgSi ₃ O ₆ (Diops.) : SiO ₂	Diops 1391°	SiO ₂ ca. 1625°	ca. 235°	ca. 16 0/10 SiO ₂	ca. 1362°	29°
SiO ₂ : Al ₂ SiO ₅ (Sillimanit)	SiO ₂ ca. 1625°	Sill. ca. 1816°	ca. 200°	Etwa 20 0/10 Sill.	Ein wenig unter 1600°	ca. 25—30° (?)
CaMgSi ₃ O ₆ (Diops.) : CaAl ₂ Si ₂ O ₈ (An.) . .	Diops. 1391°	An. 1550°	160°	42 0/10 An.	1270°	121°
α-CaSiO ₃ : SiO ₂	CaSiO ₃ 1540°	SiO ₂ ca. 1625°	ca. 85°	ca. 23 0/10 SiO ₂	1436°	104°
CaAl ₂ Si ₂ O ₈ (An) : SiO ₂	An. 1550°	SiO ₂ ca. 1625°	ca. 75°	ca. 48 0/10 SiO ₂	1353°	197°

Eutektische Mischkristall-Systeme, mit mehr oder weniger von der Komp. *a* in der festen Phase *B* und von *b* in *A*.

	Schmelzpunkt der am		Schmelzp.- Unterschied der beiden Komp.	Zusammensetz. des Eutektikums. Gew.-prozent der am höchsten schmelzb. Komp.	Schmelzp. des Eutektikums	Schmelzpunkt- Erniedrigung am Eutektikum, verglichen mit dem Schmelzpunkt der am niedrigsten schmelzb. Komp.
	niedrigsten schmelzbaren Komp.	höchsten schmelzbaren Komp.				
CaMgSi ₂ O ₆ (Diops.) : α-CaSiO ₃ NaAlSi ₃ O ₈ (Carnegeit) : KAlSi ₄ (Kaliophilit) . NaAlSi ₃ O ₈ (Carnegeit) : CaAl ₂ Si ₂ O ₈ (An) . . .	Diops. 1391° Carn 1526° (Carn. 1526°)	CaSiO ₃ 1540° KAlSi ₄ etwa 1800° An. 1550°	149° Gegen 300° (24°)	40 0/0 CaSiO ₃ ca 27 0/0 KAlSi ₄ 45.5 0/0 An.	1357° 1404° 1302°	34° ca. 120° (ca. 255°)

Ein Vergleich zwischen dem Diagramm der bisher bestimmten binären eutektischen *Silikat*-Systeme (Fig. 45) und dem entsprechenden Diagramm einer Reihe binärer Systeme von Schwermetall-*Sulfiden* (Fig. 1) — wie auch von *Schwermetallen*¹ (mit Schmelzp. der an niedrigsten Komponente mindestens ca. 500°) — ergibt für die bisher erforschten Silikat-Systeme einen *flacheren Verlauf der Schmelzkurve* (in der Nähe von Origo) und damit auch eine *geringere Schmelzpunkt-Erniedrigung*², als es bei den Sulfid- und den Schwermetall-Systemen der Fall ist.

Es liegt freilich bisher nur eine geringe Anzahl Präzisionsbestimmungen der Schmelzkurven der binären eutektischen Silikat-Systeme vor. Es darf somit nicht behauptet werden, daß der obige, auf den bisher erforschten Silikat-Systemen aufgebaute Schluß verallgemeinert werden kann.

— Der Verlauf der Schmelzkurve am Origo wird durch die Formel

$$\Delta T = 0.0199 \cdot \frac{T^2}{q}$$

und der weitere Verlauf durch dieselbe Formel, jedoch mit Erstattung von ΔT durch $\frac{\partial T}{\partial b} \cdot m$ (S. 9) bedingt.

Als Konstanten gehen hier ein:

absolute Temperatur (T),

latente Schmelzwärme (q),

Molekulargewicht (nebst elektrolytischer Dissociation).

Unter sonst gleichen Bedingungen ist die Steilheit der Schmelzkurve proportional der abs. Temp. in zweiter Potenz, dagegen umgekehrt proportional der latenten Schmelzwärme wie auch dem «effektiven» Molekulargewicht (nämlich Molekulargewicht nebst der elektrolytischen Dissociation).

Die latente Schmelzwärme der Metalle ist in großen Zügen a) proportional der abs. Temp., b) umgekehrt proportional den Atomgewichten. Zuzufolge der schon oben (S. 14) zitierten Darstellung von J. W. RICHARDS, erhält man Annäherungswerte der latenten Schmelzwärme bezogen auf das Atomgewicht durch Multiplikation der abs. Temp. mit 2.1 — und folglich Annäherungswerte der latenten Schmelzwärme bezogen auf Gramm Metall durch Multiplikation der abs. Temp. mit 2.1 und danach Division mit dem Atomgewichte.

Wir geben einige Werte über die Schmelzwärme pr. Gramm Substanz, indem die von RICHARDS nach der obigen Methode (wie auch nach einer anderen Methode) berechneten Werte durch Kreuz angegeben sind. Die anderen Werte (ohne Kreuz) beruhen auf experimenteller Bestimmung.

¹ Siehe die Zusammenstellungen in BÖRNSTEIN-LANDOLTS Tabellen; siehe auch meine Abh. in Tscherm. Mitt. 1908, S. 113—114.

² Verglichen mit dem Schmelzpunkt der am niedrigsten schmelzenden Komponente.

	Schmelz- wärme Cal. pr. gr.	Schmelzpunkt
Wismuth	12.5	267°
Zinn	13.8	230°
Blei	5.37	326°
Zink	22.6	418.2°
Silber	24.3	960.0°
Kupfer	43.3	1082.6°
Palladium	36.3	1549°
Eisen	ca. 70×	ca 1600°
Kalium	15.7	58°
Natrium	31.7	96.5°
Magnesium	58×	ca. 750°
Calcium	52.6×	780°
Aluminium	100	625°
Silicium	127.7×	1430°

Bezüglich der Schwermetall-Sulfide verweisen wir auf die oben S. 15 angegebenen, freilich nur ganz approximativen Werte.

Bei den Schwermetallen — Eisen jedoch hier z. T. ausgenommen — wie auch bei den Schwermetall-Sulfiden handelt es sich somit um durchgängig ziemlich niedrige Werte.

Im Gegensatz hierzu stehen die Silikatminerale, deren latente Schmelzwärme — zufolge der bisherigen sehr spärlichen Bestimmungen¹ — bei Mineralien mit Schmelzpunkt ca. 1100° bis 1550° ungefähr 80 bis 100 Cal. beträgt (bei Anorthit 104 Cal.).

Das Element Si (Si = 28; Schmelzp. = 1430°) dürfte durch eine ziemlich hohe Schmelzwärme gekennzeichnet werden. Und zufolge einiger Untersuchungen von CUNNINGHAM (Sc. Proc. Royal Dublin Soc., Vol. IX, 1901, siehe Referat in meiner Arbeit Silikatschmelzlös., II, S. 64) mag die Schmelzwärme von SiO₂, Quarz, sehr bedeutend sein, nämlich mindestens 135.3 Cal., wahrscheinlich (oder vielleicht) sogar mindestens 258.9 Cal.

Das Element Aluminium hat mit Sicherheit eine sehr hohe Schmelzwärme — und Natrium eine höhere Schmelzwärme als Kalium. Es dürfte somit angenommen werden, daß Na-reiche Silikate, wie z. B. NaAlSi₃O₈, eine höhere Schmelzwärme haben als K-Silikate, wie KAlSi₃O₈ mit demselben Schmelzpunkt.

Wir berechnen ferner die Molekulardepression, $0.0199 \cdot \frac{T^2}{q}$ (siehe S. 10) einiger Silikate, Sulfide und Metalle.

¹ Siehe oben S. 79. Dabei verweisen wir auf den Unterschied der Lösungswärme (bei gewöhnlicher Temp.) in krystallinem und amorphen Zustande; siehe Besprechung in Silikatschmelzlös., II, S. 63—64.

Molekulardepression.

Silikate ¹	Sulfide. ²	Metalle.
$\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$, 1550° — 635		Eisen ³ , 1600° — etwa 1000
$\text{CaMgSi}_2\text{O}_6$, 1391° — ca. 585		Palladium, 1549° — 1825
$(\text{Ca}, \text{Mg})_4\text{Si}_3\text{O}_{10}$, 1310° — ca. 550		
Fe_2SiO_4 , ca. 1075° — etwa 450	FeS , 1170° — etwa 1200	
	Cu_2S , 1130 — 1850	Kupfer, 1082.6° — 850
	PbS , 1114° — 2400	
	Ag_2S , 834° — 2000	Silber, 960° — 1350
		Zink, 418.2° — 420
		Blei, 326° — 1325

Die Molekulardepression der bei ca. 1100° bis 1550° schmelzenden Silikatmineralien ist somit — ihrer hohen Schmelzwärme wegen — erheblich niedriger als diejenige der bei derselben wie auch bei etwas niedrigerer Temperatur schmelzenden Schwermetalle und Schwermetall-Sulfide.

— Als einen fernerer Faktor bemerken wir, daß die üblichen Silikatmineralien — die Feldspate, Augite, Olivine, Melilithe usw. (hier SiO_2 nicht mitgerechnet) — ein ziemlich hohes Molekulargewicht besitzen. Und dies bewirkt — selbst wenn die in verdünnten Lösungen vorhandenen Komponenten z. T. etwas oder sogar ziemlich stark elektrolytisch dissoziiert sein dürften — bei einem bestimmten *Gewichts*prozent Silikatkomponente in 100 gr. geschmolzenem Silikat *b*, eine relativ niedrige Schmelzpunkt-Erniedrigung in der Nähe von Origo.

— Die Tangente der Schmelzkurve am Origo bei den binären eutektischen Silikat-Systemen muß somit, aus theoretischen Gründen, namentlich wegen der hohen latenten Schmelzwärme der Silikatmineralien, z. T. auch wegen ihrer ziemlich hohen Molekulargewichte, nur einen ziemlich flachen Verlauf besitzen. Dabei mag auch der weitere Verlauf der Schmelzkurven einigermaßen flach ausfallen, indem auch dieser einer Formel gehorcht, wo T^2 in den Zähler und q in den Nenner eingeht. — Und aus dem relativ flachen Verlauf der Schmelzkurven folgt ferner, daß die Schmelzpunkt-Erniedrigung bei den binären Silikat-Systemen im allgemeinen nur mittels bedeutend sein darf.

¹ Siehe S. 79.

² Nur Annäherungswerte, der fraglichen Angaben der Schmelzwärme wegen.

³ Berechnet auf Grundlage der ziemlich genauen Bestimmung des Schmelzpunktes und der etwas fraglichen Angabe der Schmelzwärme, 70 Cal.

Die oben empirisch gewonnene Erfahrung über die nur mittels bedeutender Schmelzpunkt-Erniedrigung (verglichen mit dem Schmelzpunkt der am niedrigsten schmelzenden Komponente) der binären Silikat-Systeme steht somit im besten Einklang mit der theoretischen Erörterung über den Verlauf der Schmelzkurven.

Über die frühzeitige Krystallisation von „Apatit und Erz“ — oder der „telechemischen“ Mineralien.

Selbst bei einem ganz bedeutenden Schmelzpunkt-Unterschied enthält das binäre Eutektikum zwischen (stabilen) Silikat-Komponenten einen relativ beträchtlichen Prozentsatz von der am schwersten schmelzbaren Komponente. Wir geben einige Beispiele (cfr. oben S. 122—123).

	Schmelzpunkte der Komponenten	Schmelz- punkt- Unterschied	Gehalt der am schwersten schmelzb. Komponenten im Eutektikum
$\text{CaMgSi}_2\text{O}_6 : \text{Mg}_2\text{SiO}_4$. .	$1391^\circ, 1890^\circ$	500°	ca. 12 $\frac{0}{0}$ Mg_2SiO_4
Mikroklin : Quarz	ca. 1150° , ca. 1625°	ca. 475°	ca. 27.5 $\frac{0}{0}$ Quarz
$\text{CaMgSi}_2\text{O}_6 : \text{SiO}_2$	1391° , ca. 1625°	ca. 235°	ca. 16 $\frac{0}{0}$ SiO_2

Die gleiche Erscheinung wiederholt sich auch bei den ternären und noch mehr zusammengesetzten Silikatschmelzlösungen (und Silikatmagmen), — hier selbstverständlich vorausgesetzt, daß es sich nur um Kombinationen handelt, wo das betreffende Silikatmineral bei der vorliegenden Temperatur stabil ist.

Im Gegensatz hierzu steht die *extrem frühzeitige* Krystallisation¹ derjenigen Mineralien, die man oftmals kurz unter dem Begriff «Apatit und Erz» zusammenfaßt, nämlich :

Schwefelkies und andere Sulfide, — Apatit (nebst Monazit, Zenotim), — Korund, — Spinell, Chromit, — Rutil, Perowskit, Titanit, — Fergusonit, Columbit, Blomstrandin usw. (in Granitpegmatitgängen), — ferner Kohle (Graphit, Diamant) und Metalle (Nickeleisener, Platina). — Z. T. mag hier auch Magnetit, Eisenglanz und Ilmenit hinzugefügt werden.

¹ Für Magnetkies (und eventuell andere Mineralien mit niedrigem Schmelzpunkt) ist das Wort Krystallisation mit „Ausscheidung in der flüssigen Phase“ umzutauschen.

Wir stellen die Schmelzpunkte einiger dieser Mineralien zusammen:

Apatit ¹ , Chlorapatit	ca. 1530°
— Fluorapatit	ungefähr 1650°
Korund, ² α - Al_2O_3	2050°
Spinell, ³ MgAl_2O_4	2135°
Magnetit, Fe_3O_4	1527°, 1500° ⁵
Eisenglanz, Fe_2O_3	1562°—1565°, 4
TiO_2	ca. 1700° ⁶
Chromit, ältere Bestimmungen ⁶	1670°, 1850°
Titanit, ältere Bestimmung ⁶	1210° (??)
Zirkon, ältere Bestimmung ⁶	gegen 1900°

Außerdem:

SnO_2 ⁷	etwa 1625°	Ta_2O_5 ⁷	ca. 1875°
Cr_2O_3 ⁷	2000°—2080°	ThO_2 ⁷	2425°—2470°
Nb_2O_5 ⁷	gegen 1520°	ZrO_2 ⁷	ca. 2585°

Zufolge dem strukturellen Studium der Eruptivgesteine wird ein wesentlicher Teil von Schwefelkies, Apatit, Zirkon, Korund, Spinell und der anderen »Accessoria« — wobei jedoch in betreff der basischen Eruptivgesteine Magnetit nicht mitgerechnet wird — schon vor dem Anfang des ersten Silikatminerals auskrystallisiert, selbst wenn das betreffende accessorische Mineral nur in ganz geringer Menge vorhanden ist. Das heißt, die eutektische Grenze in den eruptiven Magmen — in binären oder noch mehr zusammengesetzten Systemen — zwischen dem betreffenden accessorischen Mineral und den Silikatmineralien liegt im allgemeinen bei nur etwa 0.05, 0.1 oder gelegentlich 0.25—0.5 % Accessorium und Rest Silikatmineral.

Dieselbe Erscheinung wiederholt sich auch bei den Silikatschmelzen. Beispielsweise haben wir oben gefunden, daß ein wesentlicher Teil von Spinell, selbst wenn die Menge desselben nur 0.5 % erreicht, schon vor dem Anfang der Krystallisation von Silikatmineral (Olivin, Melilith, Plagioklas) auskrystallisiert ist. — Nur ausnahmsweise begegnen wir in betreff der Sulfide, Phosphate, Aluminate usw. ein an dem betreffenden accessorischen Mineral so reiches Eutektikum, wie z. B. bei dem Eutektikum CaS : Melilithmineral, das ca. 2.5 % CaS enthält.

¹ NACKEN, Centralbl. f. Min. Geol. Pal., 1912.

² KANOLT, Wash. Acad., 1913.

³ Geol. Lab., Washington.

⁴ KOHLMAYER, Metall., B. 6, 1909, S. 325.

⁵ SOSMAN, The common refractory oxides, Journ. of Industrial and Engineering Chemistry, Nov. 1916.

⁶ Siehe die Angaben in DOELTERS Handbuch.

⁷ RUFF, Zeitschr. anorg. Chemie, B. 82, 1913.

Zwischen den üblichen Silikatmineralien untereinander und den Sulfiden, Phosphaten, Aluminaten usw. in Silikatlösung gibt es somit einen prinzipiellen Unterschied, indem das Eutektikum (oder die eutektische Grenze) bei den letzteren nur eine ganz geringe, meist nur eine winzige Menge des accessorischen Minerals enthält. Oder mit anderen Worten, alle diese accessorischen Komponenten werden in den Silikatschmelzen bei der Temperatur beim und gleich oberhalb des Krystallisations-Intervalls der Silikatmineralien *in hohem Grade schwerlöslich*.

Die Zusammensetzung der eutektischen Grenze bei den »Apatit- und Erz«-Mineralien ist nicht eine Konsequenz eines besonders hohen Schmelzpunktes. Einige derselben haben freilich einen sehr hohen Schmelzpunkt; so beispielsweise: MgAl_2O_4 2135° — der gesteinsbildende Spinell (Mg, Fe) $(\text{Al}_2, \text{Fe}_2)\text{O}_4$ jedoch einen viel niedrigeren Schmelzpunkt, — Korund 2050° und Zirkon 1900°. Andere dagegen haben einen viel niedrigeren Schmelzpunkt, so beispielsweise: Fluorapatit 1650°, Eisenglanz 1565° — und Magnetkies sogar nur 1170°—1183°.

Im binären System zwischen Silikatmineralien mit einem Schmelzpunkt-Unterschied von rund 500° enthält das Eutektikum eine nicht unwesentliche Menge, wie bei den zwei S. 128 gewählten Beispielen, bzw. ca. 12 % und ca. 27.5 % von der am schwersten schmelzbaren Komponente. In betreff der »Apatit- und Erz«-Mineralien führt dagegen die eutektische Grenzlinie — bei sehr bedeutendem wie auch bei mittelgroßem und bei niedrigem Schmelzpunkt-Unterschied — nur einen ganz geringen, meist sogar einen winzigen Gehalt von dem betreffenden Accessorium.

In betreff vieler der hier besprochenen accessorischen Mineralien steigt ihre gegenseitige Löslichkeit so erheblich mit wachsender Temperatur, daß man eine unbegrenzte gegenseitige Löslichkeit (unterhalb des Schmelzpunktes des accessorischen Minerals) erhält. Beispielsweise ist dies der Fall mit CaS (gegen *basische*, Ca-reiche Silikatmineralien), Korund—Spinell, Apatit (mit Schmelzp. nur bzw. ca. 1530° und 1650°), wie auch mit anderen Phosphaten (zufolge Erfahrung in Betreff der Thomasschlacken).

Bei leicht schmelzbaren fremden Bestandteilen, wie z. B. FeS (Schmelzp. 1170°) bekommen wir dagegen zwei getrennte Flüssigkeiten, also nur eine begrenzte gegenseitige Löslichkeit.

— Die ausgeprägte Schwerlöslichkeit bei und unmittelbar oberhalb des Erstarrungs-Intervalls der Silikatmineralien ist eine *allgemeine* Erscheinung in betreff sämtlicher Verbindungen (und Elemente), die sich *in chemischer Beziehung mehr oder minder weit von den Silikaten entfernen*. So begegnen wir dieser Erscheinung bei Korund, Spinell, Chromit, Titansäure (nebst Perowskit, Titanit), den verschiedenen Phosphaten, Sulfiden, Tanta-

laten, Niobaten usw. Dasselbe gilt, und zwar in typischer Weise auch für Zirkon, ZrSiO_4 , welches Mineral jedoch nicht als ein übliches Silikat, sondern vielmehr als ein Oxyd aufgefaßt werden mag.¹

In betreff der Sulfide findet gleich oberhalb des Eutektikums (oder der eutektischen Grenze) eine nennenswerte, fortwährend jedoch ziemlich geringe Löslichkeit von CaS , MnS , FeS und ZnS , in beziehungsweise CaO -, MnO -, FeO - und ZnO -reichen Silikatschmelzen statt. Für NiS ist die Löslichkeit erheblich geringer, — und für PbS , Cu_2S und Ag_2S handelt es sich in Silikatschmelzen bei 1300^0 — 1350^0 entweder um eine extrem minimale Löslichkeit oder sogar um eine vollständige Unlöslichkeit. — Und die Schwermetalle (Eisen, Nickeleisen, Kupfer usw.) sind in unseren üblichen Silikatschmelzen, bei 1200^0 bis etwa 1700^0 , soweit bisher bekannt, gänzlich unlöslich.²

Magnetit (und Eisenglanz, Ilmenit) krystallisiert sehr frühzeitig in den eisenarmen Graniten, — dagegen etwas später in den mehr basischen und dabei eisenreicheren Gesteinen. Und das Eutektikum Fe_3O_4 : Fe_2SiO_4 liegt bei einer nicht ganz geringen Menge von Fe_3O_4 .

Die Silikatminerale untereinander ergeben gleich oberhalb und an dem Krystallisations-Intervall eine normale gegenseitige Löslichkeit; die «Apatit- und Erz»-Mineralien ergeben dagegen in Silikatlösung gleich oberhalb und an dem Krystallisations-Intervall der Silikatminerale eine ausgeprägte *Schwerlöslichkeit*, — und zwar *steigt diese Schwerlöslichkeit in großen Zügen mit der chemischen Entfernung von der Zusammensetzung der Silikatlösung*.

Die auffallend frühzeitige Krystallisation dieser Mineralien steht somit in Verbindung mit ihrer Entfernung in chemischer Beziehung von der Silikatzusammensetzung. Und deswegen schlage ich vor, daß diese Mineralien mit dem Schlagwort **telechemisch**³ bezeichnet werden, — und daß die von einigen Forschern benutzte Begrenzung des Begriffes *accessorisch*

¹ Ich verweise auf das hohe sp. Gew. und die hohe Brechungsexponente des Zirkons ferner auf die Isomorphie mit Rutil-Zinnstein.

² Das Auftreten von Awaruit (Nickeleisen) und den Platinmetallen in Peridotit ergibt eine gewisse Löslichkeit dieser Metalle in Peridotitmagma (bei sehr hohem Drucke). — Auch erwähne ich das Auftreten von Kohle (Diamant, Graphit) in gewissen Eruptivgesteinen.

³ Aus dem griechischen $\tau\eta\lambda\epsilon$, tele, gleich fern, weit ab, weit entfernt. Dasselbe Wort benutzt man in Telegramm, Telefon, Telepatie usw. — Telechemisch bedeutet also fernchemisch, d. i. in chemischer Beziehung weit von der Silikatzusammensetzung entfernt.

rischer¹ Mineralien gerade für die frühzeitig krystallisierenden Mineralien nicht aufrecht gehalten wird.

¹ Abgeleitet von accessio, gleich Anhang, Zuläge und zwar von zufälliger Natur.

ROSENBUSCH (Elemente der Gesteinslehre, 2te Aufl., 1901, S. 18—19) teilt die Gemengteile der Gesteine in Hauptgemengteile, Nebengemengteile und accessorische oder Übergemengteile, und die letzteren wiederum in vikarierende Übergemengteile (wie Erstattung von Glimmer in Granit durch Turmalin) und charakteristische Übergemengteile (wie Perowskit in Melilithbasalten, Melanit in Leucitophyzen) ein. Die zuerst krystallisierenden Mineralien faßt er in dem gerade zitierten Werk als „Apatit und Erze“ zusammen; in Mikr. Phys. d. Gest., 4te Aufl. II, 1, 1907, S. 10 bezeichnet er dagegen dieselben als „Erze und accessorische Gemengteile.“

Andere Forscher benutzen den Ausdruck „zufällige oder accessorische Gemengteile“.

Während viele Forscher die Bezeichnung accessorisch für alle in geringer und scheinbar „zufälliger“ Menge vorhandenen Mineralien anwenden, gleichgültig ob dieselben früh oder spät, sogar an der allerletzten Stufe krystallisieren, begrenzen andere, und zwar namentlich amerikanische und englische Forscher accessorisch oder Accessorium ausschließlich auf die frühzeitig krystallisierenden Mineralien. Das Wort wird somit von den verschiedenen Forschern in verschiedenartiger Bedeutung benutzt.

Die frühzeitig krystallisierenden Mineralien, wie z. B. Chromit—Picotit in Peridotiten, sind oftmals für das betreffende Gestein in hohem Grade charakteristisch. Es ist somit sprachlich irreleitend, dieselben als accessorisch zu bezeichnen.

Es ist wünschenswert, ein kurzes Schlagwort für die oftmals in winziger Menge, aber trotzdem sich frühzeitig ausscheidenden Gemengteile zu haben. Eine Begrenzung des Begriffs Accessorium für diese Mineralien, in Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauche vieler besonders amerikanischer und englischer Forscher, ist sprachlich nicht zutreffend, dabei auch schwierig durchzuführen. Deswegen schlage ich *telechemisch* vor, und dieses Wort hat u. a. den Vorteil, daß der Stamm „tele“ auch mehrfach sonst in neugebildeten Worten (Telegramm usw.) angewandt worden ist.

SUR LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE DANS LE
CAS GÉNÉRAL OÙ LES ACCÉLÉRATIONS NE
DÉRIVENT PAS D'UN POTENTIEL

PAR

RICHARD BIRKELAND

4VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1918. No. 2)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA

EN COMMISSION CHEZ JACOB DYBWAD

1918

Fremlagt i fællesmøte den 30te mars 1917 ved aktuar Palmstrøm.

1. Introduction. — Nous considérons un fluide en mouvement. Les projections u, v, w de la vitesse d'un élément fluide sont des fonctions continues uniformes des coordonnées (x, y, z) de l'élément et du temps t . Les projections ξ, η, ζ du vecteur tourbillon Ω de l'élément considéré sont au point (x, y, z) à l'instant t

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

On appelle *lignes de tourbillon* à l'instant t les lignes qui admettent pour tangente en chacun de leurs points le tourbillon Ω relatif à ce point et *surface de tourbillon* la surface obtenue en faisant passer une ligne de tourbillon par chaque point d'une courbe déterminée tracée, à l'instant t , dans le fluide. Si cette courbe est fermée nous obtenons un *tube de tourbillon*. On sait que le vecteur tourbillon joue un rôle important dans la théorie classique des fluides parfaits notamment dans le cas où il existe un potentiel de l'accélération et les équations du mouvement sont de la forme¹

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

$Q(x, y, z, t)$ étant uniforme dans toute l'étendue du fluide à chaque instant t . Dans ce cas nous avons les théorèmes.

- 1^o. Si, à un instant $t = 0$, pour un élément fluide déterminé le tourbillon $\Omega_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ est nul le tourbillon $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ est nul pour ce même élément à un instant postérieur quelconque t et inversement si Ω_0 est différent de zéro, Ω l'est aussi². (Théorème de Lagrange).
- 2^o. Les éléments fluides qui, à un instant $t = 0$, se trouvent sur une surface ou une ligne de tourbillon se trouvent encore, à un instant postérieur quelconque t , sur une surface ou une ligne de tourbillon³. (Théorème de Helmholtz).

¹ Paul Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, 2^e Édition p. 330.

² Paul Appell, loc. cit. p. 331.

³ Paul Appell, loc. cit. p. 396.

Ces théorèmes importants, d'où découlent une foule d'autres, ne s'appliquent plus dans le cas plus général où *les accélérations ne dérivent pas d'un potentiel*. Par exemple dans le cas où les forces extérieures sont non conservatives ou dans le cas où la densité n'est pas fonction de la pression ou enfin dans le cas où il existe un frottement entre les éléments du fluide.

Dans ce cas j'ai obtenus quelques résultats qui me semble d'être d'intérêt. La plupart de ces résultats est communiqué dans un cours en 1915 à d'École Technique Supérieur de Norvège.

Les théorèmes que nous allons déduire s'appliquent dans le cas où les équations du mouvement sont de la forme

$$\frac{du}{dt} = A(x, y, z, t), \quad \frac{dv}{dt} = B(x, y, z, t), \quad \frac{dw}{dt} = C(x, y, z, t).$$

A, B, C étant des fonctions continues uniformes de x, y, z à chaque instant t dans toute l'étendue du fluide. En appliquant la transformation de Clebsch¹ ces équations deviennent

$$(a) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

où Q, σ, ψ sont des fonctions uniformes, continues de x, y, z, t . Cette transformation n'est pas nécessaire pour démontrer les théorèmes.

Nous allons alors associer, à chaque instant t , à chaque élément fluide un certain vecteur *solénoïdal* K de composantes p, q, r . Nous désignons ce vecteur par le nom: *vecteur caractéristique associé à l'élément fluide considéré*. Si les accélérations dérivent d'un potentiel ce vecteur caractéristique se confond avec le tourbillon du même élément. Mais, en général, le vecteur caractéristique est la différence géométrique du vecteur tourbillon $\mathcal{Q}(\xi, \eta, \zeta)$ est un autre vecteur *solénoïdal* $P(\lambda, \mu, \nu)$ qui dépend du mouvement du fluide et qui est nul à l'instant initial choisi $t=0$. Si les accélérations dérivent d'un potentiel le vecteur P est nul identiquement.

Ce vecteur caractéristique $K(p, q, r)$ joue maintenant, dans les théorèmes, le rôle du vecteur tourbillon. Nous allons voir qu'il faut dans les théorèmes précédentes remplacer le mot »tourbillon« par »vecteur caractéristique«.

Pour préciser: désignons par le nom *ligne caractéristiques*, à l'instant t , les lignes qui admettent le vecteurs caractéristique K pour tangente en

¹ Si A, B, C sont trois fonctions de x, y, z il existe toujours trois fonctions Q, σ, ψ des mêmes variables telles que l'on ait identiquement

$$A dx + B dy + C dz = dQ + \sigma d\psi.$$

(Transformation de Clebsch). Voir: Paul Appell, l. c. p. 453.

chacun de leurs points et *surface caractéristique*, à l'instant t , la surface obtenue en faisant passer une ligne caractéristique par chaque point d'une courbe déterminée tracée dans le fluide à l'instant t . Nous avons alors les théorèmes.

1^o. Si à un instant pour un élément fluide déterminé, le vecteur caractéristique est nul il sera aussi nul pour ce même élément à un instant postérieur et antérieur quelconque.

2^o. Les éléments fluides qui, à un instant, se trouvent sur une surface ou une ligne caractéristique se trouvent encore, à un instant postérieur quelconque sur une surface ou une ligne caractéristique.

À l'instant initial $t = 0$ les lignes et surfaces caractéristiques se confondent avec les lignes et surfaces de tourbillon.

L'importance de ce vecteur caractéristique $K(p, q, r)$ devient évidente en l'appliquant à des cas particuliers. Nous allons démontrer:

A. Si les lignes de tourbillons se conservent comme des lignes fluides nous avons

$$p = \lambda \xi, \quad q = \lambda \eta, \quad r = \lambda \zeta$$

λ étant une fonction de t seulement. En outre: Si nous désignons par ξ', η', ζ' les composantes du tourbillon de l'accélération nous avons

$$\xi' = -v\xi, \quad \eta' = -v\eta, \quad \zeta' = -v\zeta$$

v étant une fonction de t seulement savoir la fonction $\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}$. M. Paul Appell a dans une note récente¹ considéré le cas où le tourbillon de l'accélération est parallèle au tourbillon de la vitesse dans le cas où le facteur de proportionnalité est une fonction de t seulement. Notre théorème montre que ce cas est le cas le plus général.

Si les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides les équations du mouvement doivent être de la forme

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} - v(t)u, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} - v(t)v, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} - v(t)w$$

$v(t)$ étant une fonction de t seulement et U une fonction de x, y, z, t .

B. Si le mouvement est permanent et les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides nous avons

$$p = e^{kt}\xi, \quad q = e^{kt}\eta, \quad r = e^{kt}\zeta$$

¹ C. R. Séance du 8 janvier 1917, p. 71.

k étant une constante. Les composantes ξ', η', ζ' du tourbillon de l'accélération seront

$$\xi' = -k\xi, \quad \eta' = -k\eta, \quad \zeta' = -k\zeta$$

et les équations du mouvement de la forme

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} - ku, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} - kv, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} - kw$$

U étant une fonction de x, y, z . Si la constante k est nulle nous retombons au cas classique où les accélérations dérivent d'un potentiel.

2. Définition du vecteur caractéristique. — Un élément fluide dont les coordonnées sont (x, y, z) , à l'instant t , occupait à l'instant $t=0$ une certaine position de coordonnées (a, b, c) . Les coordonnées (x, y, z) sont des fonctions uniformes et continues de ces coordonnées initiales a, b, c et du temps t

$$(a) \quad x = f_1(a, b, c, t), \quad y = f_2(a, b, c, t), \quad z = f_3(a, b, c, t).$$

En mettant en évidence les variables a, b, c les équations du mouvement 1 (a) deviennent de la forme¹

$$\frac{du}{dt} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dw}{dt} \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial a} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial a}$$

et deux équations analogues obtenues en permutant a, b, c . Si maintenant on désigne par Φ l'expression

$$\Phi = \int_0^t [Q + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)] dt$$

(la quantité sous le signe \int est une fonction de a, b, c et t où a, b, c sont indépendants de t) l'équation précédente et les deux analogues deviennent² en intégrant par rapport à t

$$(b) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial x}{\partial a} + v \frac{\partial y}{\partial a} + w \frac{\partial z}{\partial a} &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \int_0^t \sigma \frac{\partial \psi}{\partial a} dt \\ u \frac{\partial x}{\partial b} + v \frac{\partial y}{\partial b} + w \frac{\partial z}{\partial b} &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \int_0^t \sigma \frac{\partial \psi}{\partial b} dt \\ u \frac{\partial x}{\partial c} + v \frac{\partial y}{\partial c} + w \frac{\partial z}{\partial c} &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial c} + \int_0^t \sigma \frac{\partial \psi}{\partial c} dt \end{aligned}$$

¹ Horace Lamb: Hydrodynamics, Third Édition p. 12.

² Horace Lamb, loc. cit. p. 14.

u_0, v_0, w_0 étant les composantes de la vitesse de l'élément considéré à l'instant initial $t=0$. Les composantes du tourbillon Ω_0 de ce même élément, à l'instant $t=0$, sont

$$(c) \quad 2\xi_0 = \frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}, \quad 2\eta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a}, \quad 2\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}.$$

Soient m, n, o trois fonctions des quatres variables a, b, c, t définies par les formules

$$(d) \quad \begin{aligned} m \frac{\partial x}{\partial a} + n \frac{\partial y}{\partial a} + o \frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \int_0^t \sigma \frac{\partial \psi}{\partial a} dt \\ m \frac{\partial x}{\partial b} + n \frac{\partial y}{\partial b} + o \frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \int_0^t \sigma \frac{\partial \psi}{\partial b} dt \\ m \frac{\partial x}{\partial c} + n \frac{\partial y}{\partial c} + o \frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{\partial \Phi}{\partial c} + \int_0^t \sigma \frac{\partial \psi}{\partial c} dt \end{aligned}$$

Nous pouvons toujours trouver m, n, o de ces formules car le déterminant

$$(e) \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro¹, il est égal à $\frac{\varrho_0}{\varrho}$, ϱ_0 étant la densité au point (a, b, c) à l'instant $t=0$ et ϱ la densité au point (x, y, z) à l'instant t . En remplaçant dans m, n, o les variables a, b, c par x, y, z et t tirés des formules 2(a) ces quantités deviennent fonctions de x, y, z et t . Désignons par P un vecteur de composantes λ, μ, ν définies par

$$(f) \quad 2\lambda = \frac{\partial o}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial z}, \quad 2\mu = \frac{\partial m}{\partial z} - \frac{\partial o}{\partial x}, \quad 2\nu = \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}.$$

Les composantes p, q, r du vecteur caractéristique K sont alors données par

$$(g) \quad p = \xi - \lambda, \quad q = \eta - \mu, \quad r = \zeta - \nu.$$

¹ Paul Appell, loc. cit. p. 232 et 276.

Si nous désignons par U, V, W les fonctions

$$U = u - m, \quad V = v - n, \quad W = w - o$$

nous obtenons

$$2p = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad 2q = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad 2r = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

En prenant la différence entre les formules 2(b) et (d) il vient

$$\begin{aligned} & U \frac{\partial x}{\partial a} + V \frac{\partial y}{\partial a} + W \frac{\partial z}{\partial a} = u_0 \\ (h) \quad & U \frac{\partial x}{\partial b} + V \frac{\partial y}{\partial b} + W \frac{\partial z}{\partial b} = v_0 \\ & U \frac{\partial x}{\partial c} + V \frac{\partial y}{\partial c} + W \frac{\partial z}{\partial c} = w_0 \end{aligned}$$

Le vecteur P est nul identiquement si les accélérations dérivent d'un potentiel. En effet. Supposons $\sigma = 0$ et introduisons dans les formules 2(d)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}$$

et des expressions analogues pour $\frac{\partial \Phi}{\partial b}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial c}$ il vient

$$\left(m - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(n - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(o - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

et deux équations analogues obtenues en permutant a, b et c . Le déterminant 2(e) est différent de zéro. Nous avons donc

$$m = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad n = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad o = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Le vecteur $P(\lambda, \mu, \nu)$ défini par les formules 2(f) est nul identiquement. Le vecteur caractéristique K se confond donc avec le tourbillon si les accélérations dérivent d'un potentiel.

Pour $t = 0$ nous avons en vertu de 2(d): $m = n = o = 0$. Le vecteur caractéristique à l'instant $t = 0$ se confond donc avec le tourbillon Ω_0 .

3. Propriétés du vecteur caractéristique. — Des formules 2(h) nous obtenons en dérivant la troisième par rapport à b , la seconde par rapport à c et en prenant la différence

$$\frac{\partial U}{\partial b} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial U}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial V}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial W}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c} = 2\xi_0.$$

En permutant a, b, c et u_0, v_0, w_0 nous obtenons deux formules analogues. En introduisant

$$\frac{\partial U}{\partial b} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b}, \quad \frac{\partial U}{\partial c} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c}, \dots$$

et en suivant la méthode¹ pour développer les formules de Cauchy nous obtenons de la formule précédente et les deux analogues

$$(a) \quad \begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} p &= \xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\rho_0}{\rho} q &= \xi_0 \frac{\partial y}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\rho_0}{\rho} r &= \xi_0 \frac{\partial z}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial z}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial z}{\partial c} \end{aligned}$$

pour calculer les composantes p, q, r du vecteur caractéristique K associé à cet élément fluide qui à l'instant t occupait la position (x, y, z) . Ces formules deviennent les formules de Cauchy si les accélérations dérivent d'un potentiel.

Si, à l'instant $t=0$, pour un élément fluide déterminé, le tourbillon $\Omega_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ est nul le vecteur caractéristique $K(p, q, r)$ est nul pour ce même élément à un instant postérieur quelconque t . Inversement. Si K est nul à l'instant t , $K_0(p_0, q_0, r_0)$ ou $\Omega_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ l'est aussi car le déterminant D (formule 2(e)) est différent de zéro. Nous pouvons donc énoncer:

1°. Si, à un instant, pour un élément fluide déterminé, le vecteur caractéristique est nul il est encore nul pour ce même élément à un instant postérieur quelconque. Si le vecteur caractéristique d'un élément n'existe pas il ne naîtra pas et, si il est né, il subsistera.

Soit $f_0(a, b, c)$ une fonction de a, b, c telle que la surface

$$f_0(a, b, c) = \text{const.}$$

soit une surface de tourbillon à l'instant $t=0$. Désignons par $f(x, y, z, t)$ ce que devient $f_0(a, b, c)$ en remplaçant a, b, c par ses valeurs en fonction de x, y, z, t tirées des formules 2(a). Nous avons donc

$$f(x, y, z, t) = f_0(a, b, c) = \text{const.}$$

pendant le mouvement. La surface $f(x, y, z, t) = \text{const.}$ est donc une *surface fluide*² qui varie de forme et de position avec le temps t . En multi-

¹ Paul Appell, loc. cit. p. 334. Les formules de Cauchy sont les formules (21) et (21').

² Si des éléments fluides sont, à un instant t_0 , disposés sur une surface S_0 ou une ligne L_0 , ces mêmes éléments sont encore, à un autre instant quelconque t sur une surface S ou sur une ligne L . Nous appellerons la surface S et la ligne L , qui varient de forme et de position avec t une surface *fluide* et une ligne *fluide*.

pliant les formules 3(a) par $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ respectivement et en ajoutant il vient parce que

$$\frac{\partial f_0}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial b} = \dots$$

la formule suivante

$$(a') \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} \left(p \frac{\partial f}{\partial x} + q \frac{\partial f}{\partial y} + r \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \xi_0 \frac{\partial f_0}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial f_0}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial f_0}{\partial c}.$$

Le second membre est nul parce que la surface $f_0(a, b, c) = \text{const.}$ est une surface de tourbillon à l'instant $t = 0$. Le premier membre est aussi nul. La surface $f(x, y, z, t) = \text{const.}$ est donc une surface caractéristique à l'instant t . Mais cette surface est aussi une surface fluide. Nous pouvons donc énoncer:

2°. *Les éléments fluides qui, à un instant, se trouvent sur une ligne ou une surface caractéristique se trouvent encore à un instant postérieur quelconque sur une ligne ou une surface caractéristique.*

Supposons que par les divers points d'une courbe fermée C tracée dans le fluide, à l'instant t , on mène des lignes caractéristiques partant de ces points. On formera un tube: *tube caractéristique*. Quand t varie le tube change de forme et de position mais il est toujours *formé des mêmes éléments fluides*.

Il est aussi d'intérêt pour ce qui va suivre de développer des formules analogues aux formules appliquées par Helmholtz¹ dans le cas où les accélérations dérivent d'un potentiel. En dérivant la première des formules 3(a) par rapport au temps t il vient

$$\varrho_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\varrho} \right) = \xi_0 \frac{\partial u}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial u}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial u}{\partial c} = \left(\xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \left(\xi_0 \frac{\partial y}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial y}{\partial c} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\xi_0 \frac{\partial z}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial z}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial z}{\partial c} \right) \frac{\partial u}{\partial z}$$

en introduisant pour $\frac{\partial u}{\partial a}$ l'expression

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}$$

et pour $\frac{\partial u}{\partial b}$ et $\frac{\partial u}{\partial c}$ des expressions analogues. En comparant avec 3(a) il vient en divisant par ϱ_0

¹ Paul Appell, loc. cit. p. 353, formules (43) et (43').

$$(b) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{q}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{r}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

De la même manière nous trouverons les deux formules analogues

$$(c) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{\rho} \right) &= \frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{q}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{r}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{\rho} \right) &= \frac{p}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{q}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{r}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

4. Condition pour que les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides. — Nous allons appliquer les propositions précédentes pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides. Les éléments fluides qui l'instant $t=0$ se trouvent sur une ligne de tourbillon se trouvent encore à un instant postérieur quelconque t sur une ligne caractéristique. La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides est donc que *les lignes caractéristique se confondent avec les lignes de tourbillon*. Il faut donc que

$$(a) \quad p = \lambda \xi, \quad q = \lambda \eta, \quad r = \lambda \zeta.$$

Nous allons démontrer: *Le facteur λ est une fonction de t seulement*. En effet. Supposons que λ soit une fonction de x, y, z, t . Le vecteur caractéristique étant solénoïdal nous avons

$$\frac{\partial(\lambda \xi)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \eta)}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \zeta)}{\partial z} = 0.$$

Le vecteur tourbillon est aussi solénoïdal. Il vient donc

$$\xi \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \eta \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0$$

d'où nous pouvons, en vertu de 4(a), conclure que les surfaces

$$\lambda(x, y, z, t) = \text{const.}$$

soient des surfaces caractéristique à l'instant t . Les surfaces sont donc aussi d'après la proposition 2^o (§ 3) des surfaces *fluides* et nous avons

$$(b) \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0$$

car λ est constant pendant le mouvement. Celà posé. En introduisant p, q, r d'après 4(a) dans les formules 3(b) et (c) il vient

$$(b') \quad \begin{aligned} \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) + \frac{\xi}{\rho} \frac{d\lambda}{dt} &= \lambda \left[\frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{\rho} \right) + \frac{\eta}{\rho} \frac{d\lambda}{dt} &= \lambda \left[\frac{\xi}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) + \frac{\zeta}{\rho} \frac{d\lambda}{dt} &= \lambda \left[\frac{\xi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

En comparant ces relations avec les relations suivantes données par M. Paul Appell¹

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) &= \frac{\xi'}{\rho} + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{\rho} \right) &= \frac{\eta'}{\rho} + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) &= \frac{\zeta'}{\rho} + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

ξ' , η' , ζ' étant les composantes du *tourbillon de l'accélération* il vient

$$(c) \quad \xi' = -\xi \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \quad \eta' = -\eta \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \quad \zeta' = -\zeta \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}$$

d'où en vertu de 4(b)

$$\xi' = \eta' = \zeta' = 0.$$

Les accélérations dérivent d'un potentiel ce que nous ne supposons pas. Il faut donc conclure que λ soit une fonction de t seulement. Le tourbillon de l'accélération est, en vertu de 4(c), parallèle au tourbillon de la vitesse et nous avons les relations suivantes entre les deux tourbillons

$$\xi' = -v\xi, \quad \eta' = -v\eta, \quad \zeta' = -v\zeta$$

v étant une fonction de t seulement savoir la fonction $\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}$. Il existe un théorème de Sir W. Thomson d'après lequel les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides quand le tourbillon de l'accélération est parallèle au tourbillon de la vitesse. Nous avons démontrés ici que le facteur de proportionnalité soit une fonction de t seulement.

La forme la plus général que les équations de mouvement peut avoir pour que les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides est donc

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} - v(t) \cdot u, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} - v(t) \cdot v, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} - v(t) \cdot w$$

¹ Journal de Mathématique Pures et Appliqués 5^e série, t. 9, 1903, p. 5.

v étant une fonction de t seulement et U une fonction de x, y, z et t . En introduisant pour $v(t)$ l'expression $\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}$ il vient

$$\frac{d(\lambda u)}{dt} = \lambda \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d(\lambda v)}{dt} = \lambda \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d(\lambda w)}{dt} = \lambda \frac{\partial U}{\partial z}.$$

5. Tube caractéristique. — En multipliant les trois formules 2(h) par da, db, dc respectivement et en ajoutant en remarquant que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc, \dots$$

il vient

$$(a) \quad Udx + Vdy + Wdz = u_0 da + v_0 db + w_0 dc.$$

Intégrons les deux membres en faisant décrire au point géométrique (a, b, c) une courbe L_0 et en remarquant que le point correspondant (x, y, z) décrit une courbe L il vient

$$\int_L Udx + Vdy + Wdz = \int_{L_0} u_0 da + v_0 db + w_0 dc.$$

Le second membre est indépendant de t , le premier membre

$$C = \int_L Udx + Vdy + Wdz$$

est donc aussi indépendant de t . Si la courbe L_0 est fermée L l'est aussi. Dans ce cas: faisons, à l'instant t , passer par la courbe L une surface simplement connexe S donc cette courbe soit la limite. D'après le théorème de Stokes nous avons

$$(b) \quad C = 2 \iint_S K_n d\sigma$$

K_n désignant la projection du vecteur caractéristique K au point $d\sigma$ sur la normale à la surface S . L'intégral double est le flux du vecteur caractéristique à travers la portion de surface S .

Si L est une courbe fluide sur un tube caractéristique et entourant le tube le flux du vecteur caractéristique à travers la cloison Σ menée dans le tube et ayant la ligne fermée L pour contour est constant: 1° à l'instant t tout le long du tube, 2° quand t varie.

Nous appelons ce nombre le *moment du tube caractéristique*. Quand t varie le tube caractéristique change de forme et de position mais il reste un tube caractéristique et son moment ne change pas.

Considérons un tube caractéristique indéfiniment délié et désignons par $d\sigma$ une section droite du tube. La cloison referme maintenant un seul

élément superficiel $d\sigma$ et K_n se confond avec K . Nous avons donc l'expression suivante pour le moment

$$C = 2Kd\sigma.$$

Le produit $Kd\sigma$ est constant: r^0 à l'instant t tout le long du tube, z^0 quand t varie.

Si le mouvement est tel que les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides nous avons (4(a))

$$K = \lambda\Omega$$

λ étant une fonction de t seulement. Le moment du tube sera dans ce cas

$$C = 2\lambda\Omega d\sigma$$

qui est constant à l'instant t le long du tube et quand t varie. Le tube caractéristique est devenu un tube de tourbillon et nous avons: Pour que le produit $\Omega d\sigma$ ne change pas avec le temps il faut que λ soit une constante ou que le tourbillon de l'accélération soit nul. (Voir 4(c)).

6. Sur le mouvement permanent. — Lorsque le mouvement est permanent, u, v, w et, par suite ξ, η, ζ sont indépendants du temps t , ils dépendent seulement du point (x, y, z) considéré. Les lignes de tourbillon à chaque point ne varient donc pas avec t .

Les éléments fluides qui, à l'instant $t = 0$, se trouvent sur une ligne de tourbillon déterminée T , se trouvent, à un instant postérieur t , sur une ligne L . Cette ligne est une ligne caractéristique. Les éléments fluides qui à un autre instant t_0 se trouvent sur la ligne de tourbillon T , se trouvent, à un certain instant postérieur t_1 sur la même ligne L car le mouvement est permanent. L'instant t_1 est défini par la relation $t_1 - t_0 = t$. Les lignes caractéristique ne dépend donc pas du temps initial choisi, elles sont des lignes déterminées à chaque point à chaque instant.

Supposons que les lignes de tourbillon se conservent comme des lignes fluides. Nous avons alors

$$p = \lambda\xi, \quad q = \lambda\eta, \quad r = \lambda\zeta$$

λ étant une fonction de t seulement. La première des formules 4(b') devient en divisant par λ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) + \frac{\xi}{\rho} \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Tous les termes dans cette formule dependent de x, y, z seulement saufe le terme $\frac{\xi}{\rho} \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}$ qui peut aussi dependre de t . En tenant x, y, z fixes la relation doit avoir lieu pour une infinité de valeurs de t il faut donc que

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = k$$

k étant une constante. Pour $t=0$ nous avons $\lambda=1$; il vient donc

$$\lambda = e^{kt}.$$

En vertu de 4(c) nous avons

$$\xi' = -k\xi, \quad \eta' = -k\eta, \quad \zeta' = -k\zeta.$$

Les équations du mouvement sont donc dans ce cas de la forme

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} - ku, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} - kv, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} - kw$$

U étant une fonction de x, y, z .

En poursuivant les mêmes idées développées ici j'ai trouvé une série d'autres résultats qui me semble d'intérêt.

Trondhjem, janvier 1917.

PSYKIATRISKE BEMÆRKNINGER OM SPROGETS OPRINDELSE

AF

PAUL WINGE

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NAT. KLASSE. 1918. No. 3)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD
1918

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 1ste juni 1917

Forbemærkning.

Min hensigt med dette lille arbejde er nærmest den at henlede vore sprogmands opmærksomhed paa ønskeligheden af et samarbejde med psykiaterne med det formaal at studere visse psykiske foreteelser, som efter min tro har interesse for udforskningen af sprogets oprindelse. Da de heromhandlede psykiske fænomener neppe kan forudsættes almindelig kjendte inden sprogmandenes kreds, har jeg anseet det rigtigst at optage den største del af pladsen for en elementær udredning af en række psykologiske og psykiatriske symptomkomplexer, uagtet jeg vel indser, at psykologisk og psykiatrisk dannede læsere maa finde denne trættende bred, særlig alt for lang i forhold til den knappe behandling af det sproglige stof. Havde jeg troet mig berettiget til at forsøge paa at give en sproglig oversigt over glossolalien (noget som naturligvis først og fremst vilde kræve en nøiagtig optegnelse af sproglydene), vilde afhandlingen have faaet et helt andet indhold. Mit arbeides specielle formaal er min undskyldning for dets beskaffenhed.



I.

Spørgsmaalet om sprogets oprindelse og væsen har interesseret mennesker med forskertrang lige fra historiens morgen.

Den græske filosofi optog selvfølgelig ogsaa dette spørgsmaal til drøftelse, og i PLATONS dialog »Kratylos« gives det følgende formulering: Er sproget *φύσει* eller *θέσει*?, det vil sige: Betegner ordene tingene i overensstemmelse med naturen, og har saaledes ordene en »sand mening« (*ορθῶς*), eller er de blot vedtægtsmæssige betegnelser (*νόμιμα*)?

Vi stiller det samme spørgsmaal saaledes: Er sproget et produkt af naturgivne kræfter og en naturbestemt udvikling, eller er det et kunstprodukt, et system af vilkaarligt valgte tegn — dette system være nu en menneskelig opfindelse eller en af Guddommen færdigdannet gave?

Ud fra en af disse hypoteser spekulerede man allerede i den klassiske Oldtid fuldstændig vildt paa grundlag af en sproglig viden, som ikke strakte sig synderlig ud over græsk og latin.

Som bekjendt blev den fantastiske hypothese om menneskenes nedstammen fra en mand og en kvinde, der af Gud var skabt som voxne mennesker, indarbejdet i den kristne dogmatik og endog gjort til en axiomatisk forudsætning for denne.

Ifølge denne lære var de to første mennesker allerede fra skabelsesøjeblikket i besiddelse af fornuft og erfaring samt af et sprog tilstrækkelig fuldkomment til, at de kunde modtage Guds tilkjendegivelse af betingelserne for tilladelsen til som syndefri og udødelige mennesker at tilbringe livet i en have uden at behøve at arbejde for føden. Dette af Gud færdigdannede og til det første menneskepar overleverede sprog var det hebraiske; og selv efterat de første mennesker havde brudt de bud, hvis overholdelse var betingelsen for tilladelsen til at opholde sig i haven og leve evindeligt, og til straf for denne synd var blevet drevne ud og paalagt at sørge for slægtens bevarelse, beholdt de og deres efterkommere det hebraiske sprog, indtil Gud for at hindre opførelsen af Babylons taarn forstyrrede sprogenheden paa en saadan maade, at kun Jøderne fik beholde det rene hebraiske, medens de øvrige folkeslag maatte nøie sig med fordærvede afarter.

Den etymologiske forskning havde ifølge den her skitserede teori til opgave at paavise, hvorledes det undersøgte ord havde udviklet sig fra hebraisk til den form, det havde faaet i det paagældende sprog; og en etymologi med dette program var naturligvis ikke mindre vild end den klassiske og rammes træffende af den bekjendte definition, at etymologien er en videnskab, som forklarer ordenes afstamning uden at tage det ringeste hensyn til vokalerne og kun et yderst ubetydeligt til konsonanterne.

Det var først, da man i overgangstiden mellem det 18de og 19de aarhundrede endelig brød med disse fantastier, at der kunde blive tale om en videnskabelig etymologi; og da en saadan først var grundlagt, spurgte man ikke længer om sprogenes oprindelse, men alene om hvorledes det undersøgte sprog forholdt sig til ældre kjendte sprogformer¹.

Da evolutionslæren omkring forrige aarhundredes midte havde paavist den genetiske sammenhæng mellem dyr og mennesker og i og med dette trængt igjennem i al biologisk tænkning, blev spørgsmaalet om sprogets oprindelse atter sat paa dagsordenen; og det var DARWIN, som ogsaa paa dette felt brød isen med sit berømte verk »Expression of the emotions in man and animals.«

Allerede dengang havde man forlængst været opmærksom paa børnesprogets værdi for den heromhandlede forskning; og da kravet paa oplærelse af døvstumme omtrent samtidig havde vundet sine grundlæggende triumfer, var det blevet klart, at et indgaaende studium af det saakaldte spontane døvstummesprog kunde ventes at kaste lys over kræfter, som maatte have været medvirkende ved den oprindelige sprogdannelse; men det var dog først og fremst DARWINS verk, som ledede den biologiske psykologi til at underkaste spørgsmaalet om sprogets oprindelse en mere omfattende og indgaaende naturvidenskabelig behandling. Paa dette felt var WUNDT med sit store verk: »Die Sprache«, der udkom i 2 bind i 1900, banebryderen, idet han for første gang foretog en integration af en stor mængde fysiologiske og psykologiske fænomener, som seet i sammenhæng kaster lys over det heromhandlede fundamentale spørgsmaal. Behandlingen af det foreliggende materiale stødte imidlertid paa overordentlige vanskeligheder. De opdagelsesreisende, der kom til primitive folk, som endnu ikke havde været i berørelse med den evropæiske civilisation, besad ikke de videnskabelige forudsætninger — den kombination af biologiske, sociologiske og sprogvidenskabelige kundskaber — som er nødvendig for at studere og vurdere de egenartede fænomener, som mødte dem, og de blev derfor ofte ikke opmærksomme paa fundamentale forhold og misforstod

¹ Se Vilh. Thomsen: »Sprogvidenskabens Historie« (1902).

andre, som syntes dem særlig besynderlige¹. Under indflydelse af en høiere civilisations varige tryk mister de primitive stammer temmelig hurtigt sin sociale konstitution og med den sit oprindelige sprog, hvilket forklarer det mærkelige forhold, at vi endnu ikke kjender noget virkelig primitivt sprog, idet selv de stammer, der endnu staar paa det animistiske udviklingstrin, har opgivet sine oprindelige sprog og istedet antaget — tildels meget antikke — dialekter af de omboende høierestaaende stammers; og samtlige disse dialekter repræsenterer et forholdsvis langt fremskredet udviklingstrin med stor rigdom baade paa gloser og former.

Heller ikke kjender man nogen nulevende stamme, hos hvem der fysiologisk foregaar en spontan nydannelse af sprog, som kan tjene til at belyse den oprindelige sprogdannelse; og de i nutidens civiliserede lande dannede kunstsprog kan i den heromhandlede henseende ikke komme i betragtning.

Studiet af børnesproget har i den senere tid været drevet med stor iver og dygtighed; og det er neppe tvilsomt, at dette studium har stor betydenhed for erkjendelsen af sprogets væsen og udvikling; men man maa holde sig skarpt for øie, at baade psykiske og sociale forholde var helt andre paa den tid, de første sprog blev dannede, end i nutiden; og ikke mindst maa man — naar der spørges om sprogets oprindelse — agte paa den omstændighed, at selv den første børnelallen udvikler sig under paavirkning af de voxnes fuldfærdige talesprog. Erfaringer fra børnesprogets udvikling maa derfor kun med den allerstørste forsigtighed og begrænsning benyttes som analogi til den oprindelige sprogdannelse; og end større forsigtighed maa udvises, naar man vil paaberaabe sig de saakaldte selvavede børnesprog som en saadan analogi².

Det spontane døvstummesprog er i den heromhandlede henseende mere oplysende; men dette er jo grundlagt paa »synsbilleder«, ikke paa hørselsbilleder, hvilket naturligvis gjør en fundamental forskjel.

Vi har da al opfordring til at se os om, hvorvidt der ikke ogsaa i nutiden under visse særegne forhold foregaar en dannelse af lydssprogs-elementer, som kan oplyse noget af interesse for løsningen af spørgs-maalet om den oprindelige sprogdannelse; og jeg mener, at den, som søger efter en saadan dannelse, vil finde den.

¹ Det er nu paa høie tid at gaa igang med et indgaaende og alsidigt studium af de primitive stammers kultur og sprog. I næste slægtsled turde allerede hoivigtige fænomener ikke længer kunne indvindes for videnskaben.

² Se OTTO JESPERSEN: „Nutidssprog hos Børn og Voxne“ (1916).

Under enkelte patologiske tilstande indtræder der nemlig situationer, som stiller visse sproglige krav, som ikke gør sig gjældende for det normale civiliserede menneske; og det er efter min mening af interesse for vort spørgsmaal at undersøge, hvorledes disse syge bærer sig ad for at faa sine særkrav opfyldte. Det er da fortrinsvis (men ikke udelukkende) de sindssygdomsformer, der karakteriserer sig ved prælogisk mentalitet, som bliver undersøgelsens gjenstand.

Ganske vist er den situation, som foreligger for den sindssyge, der skal nydanne et lydsprog, overordentlig forskjellig fra den, som forelaa for de primitive mennesker, som skabte sit første sprog. Den sindssyge besidder jo i forveien et færdigt sprog, som strækker til for hans almindelige daglige behov; og han trænger derfor kun et slags hjælpesprog til brug for sine sygelige forestillinger og de af disse betingede specielle formaal; og i mange tilfælde kan dette forlangende fyldestgøres ved dannelsen af en del nye ord, som indføres i hans modersmaal. Det primitive menneske forudsættes derimod netop at have manglet et artikuleret sprog, og opgaven er jo den at forklare, hvorledes man fra først af har kunnet skaffe sig et saadant. De civiliserede sindssyge raader jo desuden — selv om deres mentalitet er udpræget prælogisk — over et rigt fond af forestillinger, som den vilde mand helt mangler og følgelig heller ikke finder trang til at give sprogligt udtryk; og omvendt har vildmanden forestillinger, som, ialfald fra først af, er den civiliserede sindssyge fremmede.

Alligevel tror vi, at de faktorer, som kommer i betragtning under den sindssyges sprogdannelse, maa have gjort sig gjældende ogsaa ved sprogets oprindelige dannelse, særlig forsaavidt angaar det mere omfattende sprogstof, som — ialfald for en væsentlig del — tilveiebringes uden nogen bevidst bestræbelse fra patientens side; og vi skal i det følgende søge at begrunde denne opfatning.

Jeg vil dog strax bemærke, at vi ikke kan vente ved psykiatriske undersøgelser at faa oplysninger af interesse for vort emne, som spænder udover den første begyndelse til et artikuleret meddelelsesmiddel eller vel rettere udtrykt gaar videre end til et forstadium til sproget, som man kunde kalde »protoglossisk«¹. Vi kommer ikke længer end til det punkt, hvor den lingvistiske forskning, specielt etymologien, tager sin begyndelse, ja neppe engang saalangt. Der forbliver en kløft aaben mellem det punkt, hvortil psykiatrien kan formodes at føre os frem, og det forholdsvis fremskredne standpunkt, hvorpaa filologen forefinder de mest primitive sprog. Denne kløft omfatter en et uhyre langt tidsrum omspændende udvikling, som

¹ Vi vil dog for kortheds skyld i det følgende betegne dette forstadium som sprog.

ligger mellem det af artikulerede lyd understøttede gebærdesprog og det artikulerede lydsprog, der blot benytter gebærder som et understøttelsesmiddel, der holder paa at overflødiggjøres; det vil sige et tidsrum, som formentlig omfatter hele den animistiske tid og rækker langt ned i den totemistiske¹ — flersteds maaske endnu længere.

Jeg finder det hensigtsmæssigt, før vi gaar over til vort egentlige emne, at indskyde nogle bemærkninger angaaende visse fysiologiske, psykologiske og psykiatriske fænomener, som har væsentlig interesse for dette.

II.

Man har ved forsøg paavist, at en plante kan opnaa evne til at vende sig mod lyset i kortere tid, end den før forsøgets begyndelse formaaede; med andre ord, man har godtgjort, at planten kan erhverve en skarpere reaktion paa lysirritamentet. Det maa vel antages, at man ved det heromhandlede forsøg i forbindelse med en række andre har konstateret en grundegenskab hos organismen, som kort kan defineres saaledes: For hver gang et irritament paavirker den levende normale celle, udløses der hos denne ved samme intensitet en kraftigere reaktion; og for hver ny paa-virkning kræves blot en svagere intensitet for at opnaa en reaktion af samme styrke — begge dele indenfor en vis amplitude. Denne øgede reaktions-evne maa antages at bero paa en forandring af cellens kemiske konstitution, og denne konstitution, hvis natur er ukjendt, har R. SEMON nævnt et mnemisk engram².

SEMON forudsætter, at den større reaktionsevne kan overføres ved arv, hvilken forudsætning ogsaa er nødvendig for antagelsen af hans lære om de blinde instinkter som arvede mnemiske engrammer — et spørgsmaal, hvortil vi strax kommer nærmere tilbage. Det skal imidlertid indrømmes, at denne forudsætning ikke er mere end en arbejdshypothese, og at denne ikke finder støtte i den moderne arvelighedsforsknings hidtidige resultater. Problemet om »erhvervede egenskabers« arvelighed eller, som W. JOHANNSEN langt klarere, end tidligere var tilfælde, har formuleret det samme spørgsmaal, om hvorvidt kaarene (de ydre leveforholde) kan øve en modificerende indflydelse paa afkommet af saadan art, at selve anlægspæret (genotypien) undergaar arvelige ændringer, samt om hvorvidt i tilfælde saadanne ændringer blot indtræder ved mutation eller tillige ved

¹ Se WUNDT: „Elemente der Völkerpsychologie“ (1912).

² RICHARD SEMON: „Die Mneme“ (1911).

en sum af smaa variationer — dette spørgsmaal er ikke løst ved noget af alle arvelighedsforskere som bindende bevis anerkjendt experiment¹.

Det er selvfølgelig ikke her stedet til at drøfte dette problem; men jeg vil dog tillade mig den bemærkning, at det forekommer mig lidet sandsynligt, at den experimentelle arvelighedsforskning — saalænge dens felt ikke er væsentlig udvidet — vil komme til at lære os noget væsentligt om arvets forhold til evolutionen. Man maa jo holde sig for øie, at denne forskning hidtil (med fuld berettigelse) har indskrænket sig til at undersøge den variable arv og først og fremst de afvigelser fra typen, som fremkommer ved krydsning (Mendelisme); men den har ikke beskæftiget sig med hele det ubegrænsede, meget udflydende, problem, som de ældre arveligheds-spekulationer omspændte. Den har saaledes ikke optaget til behandling spørgsmaalet om arveligheden af de for arten som saadan karakteristiske konstruktive grundtræk; den har f. ex. ikke beskæftiget sig med spørgsmaalet om, hvorfor alle hvirveldyr har et benskelet af en vis type — ligesaalidt som den har arbeidet med spørgsmaalet om formerelsens væsen.

Der synes os imidlertid, saalænge hele vor biologiske tænkning er bunden til evolutionsidéen, at foreligge en logisk tvingende nødvendighed til at antage, at arvelige egenskaber, eller rettere de vævsdele, af hvilke de er funktioner — altsaa anlægspræget — under indflydelse af forandrede kaar kan undergaa varige forandringer. Det lader sig heller ikke — ligesaalidt for dyrene som for planterne — opstille en principiel forskjel mellem kimplasma og soma; og da lader det sig neppe heller antage, at kimplasma er dækket af stormfrie fæstningsmure.

Jeg mener, at idéen om den arvelige mneme letter os forstaaelsen af de blinde instinkters natur, og er dette saa, maa vi efter min mening være berettiget til indtil videre at benytte den som en brugbar arbeidshypothese.

SEMON antager — hvad han ogsaa følgerigtigt kan gjøre — at der ogsaa udenfor nervesystemet finder sted en optagelse af mnemiske engrammer; men det er vel givet, at, ialfald hos de høiere dyr, nervesystemet, specielt sanseapparatet, er særlig skikket hertil.

Naar et irritament indvirker paa en sensitiv nerve, forplanter virkningen sig gennem centralnervesystemet til vedkommende motoriske nervebane og udløser en spænding med paafølgende afspænding af en muskel. Dette fænomen kalder vi en reflex; og en ufrivillig spænding af en muskel

¹ W. JOHANNSEN: „Arvelighed“ (1917).

udover dens normale tonus kalder vi krampe; — dens afspænding udover den normale tonus — lammelse.

Kramperne er af to forskellige typer, de kloniske og de toniske. Til den førstnævnte type henfører vi de kramper, som inden brøkdelen af et sekund naar sin maximale spænding for derpaa inden faa sekunder at afspændes, saaledes at der indtræder hurtigt paa hverandre følgende rykninger. Til den sidstnævnte type regner vi de kramper, som karakteriserer sig derved, at den forstærkede spænding varer længere og afspændingen forløber langsommere, saaledes at der ikke indtræder rykninger.

Blandt kramperne har en enkelt gruppe — de saakaldte intentionskramper — adskillig interesse for vort emne. Disse har faaet sit navn deraf, at de kun indtræder, naar vedkommende individ staar i begreb med at foretage en bestemt bevægelse. Man vil f. ex. til at skrive, og der indtræder kramper i de muskler, som da maa sættes i bevægelse. I disse kramper deltager som oftest ikke blot en enkelt muskel, men hele den gruppe, som associeres i den koordinerede bevægelse, eller som i det hele taget er indstillet paa at arbeide sammen, f. ex. extremiteternes extensorer eller flexorer eller de muskler, som styrer aandedrætsbevægelsen.

Den motoriske reaktion kan indtræde saavel i tverstribede som i glatte muskler; og af særlig interesse for os er de toniske kramper med paafølgende lammelse, som indtræder i karvæggenes muskulatur og derved fremkalder forandring i karrenes kaliber — de saakaldte vasomotoriske kramper og lammelser.

En irritation af en bestemt sensitiv nerve fremkalder normal bevægelse i den muskel, der innerveres af den motoriske nerve, som korresponderer med den sensitive. Sanseorganerne forholder sig i denne henseende paa samme maade som de øvrige sensitive nervers endeapparater. Irritation af et af disse fremkalder ved reflex en krampe i en bestemt muskelgruppe. Indvirker saaledes et surt stof paa vedkommende parti af tungen, kan der fremkaldes krampe i visse mimiske muskler. Omvendt kan ogsaa en krampe fremkalde en irritation af det sensitive og sensorielle nervesystem; den kan f. ex. fornemmes som smerte, og den kan, som senere skal omtales, fremkalde en bestemt affekt.

Forøvrigt er reflexen en samvirken af motoriske og sensitive funktioner, som udløses i og med hinanden, og det kan derfor være umuligt at afgjøre spørgsmaalet om, hvorvidt reflexen oprindelig er fremkaldt ved en irritation af en sensitiv eller af en motorisk nervebane.

Er dyret bevidst og dets sanseapparat draget ind i reflexen, kan denne fornemmes og betones. Refleksvirkningen kan altsaa være indifferent eller lyst- eller ulystbetonet. Kramperykningen kan saaledes være led-

saget af smerte, skræk eller angst, og afspændingen af beroligelse, lettelse og velvære.

En irritation af et sanseorgan fremkalder dog ingenlunde blot en reflex, idet den tvertimod foruden denne har andre og væsentligere virkninger. Sanseindtryk maa som bemærket antages at være den oprindelige årsag til dannelsen af de andre mnemiske engrammer, som vi benævner de »blinde instinkter«, og som karakteriserer sig ved en spontan trang og dygtighed, der er identisk hos alle sunde individer af samme art eller race, f. ex. visse dyrs trang og dygtighed til at bygge rede eller foretage periodiske vandringer. De arvede engrammer kan ogsaa hos de enkelte individer inden visse grænser udvikles og blive maalbevidste, i hvilket tilfælde vi betegner dem som intellektuelle instinkter. En del af de mnemiske engrammer naar en saadan intensitet, at de bliver dyret bevidste, det vil sige, at de paatrænger sig dette som en reel foregang i omverdenen. Disse bevidste mnemiske engrammer, som vi — uagtet de omfatter saavel syns- som hørsels- og andre sanseindtryk — benævner erindringsbilleder, opmagasineres for en større eller mindre del i sindet og kan senere ekfores, det vil sige paany kaldes frem i bevidstheden. Erindringsbillederne associeres indbyrdes i komplekser og indgaar ogsaa i faste associative forbindelser med instinkterne, navnlig de intellektuelle. Disse komplekser danner forestillinger.

Forestillingerne kan ligesom sanseindtrykkene være indifferente eller betonedede og i sidste tilfælde henholdsvis lyst- eller ulystbetonedede. De kan ogsaa indbyrdes associeres og indgaa i meget sammensatte komplekser med instinkterne, et forhold, hvortil vi strax kommer nærmere tilbage.

Saa ofte et nyt sanseindtryk af lignende art som et tidligere rammer sindet, vil der, dersom erindringsbilledet af det forrige ikke er udslettet, vækkes en forestilling af lignende art som den, det forudgaaende fremkaldte; og naar dette forhold har gjentaget sig nogle gange, ved dyret paa forhaand, at nogle bestemte sanseindtryk fremkalder lystbetonedede, andre ulystbetonedede fornemmelser eller forestillinger.

Dyret har saaledes faaet erfaring og med denne forventning om det betræffende sanseindtryks virkning.

Gjennem forestillingskredsen danner der sig nu en indirekte vei mellem sanseindtrykket og den motoriske sfære. Et forestaaende angreb kan sætte muskulaturen i spænding og det hele legeme i en stilling, som er skikket for angreb eller forsvar; men skrækken kan ogsaa jage paa flugt og fremkalde innervation af de muskler, som da kommer til anvendelse. Ogsaa muskelbevægelserne fremkalder erindringsbilleder, og naar den samme bevægelse næste gang udføres, vækkes et erindringsbillede af samme art

som det forrige, og ved gentagelse vindes erfaring om det hensigtsmæssige i bevægelsen. Lidt efter lidt erhverves øvelse, det vil sige evne til at udføre sammensatte bevægelser, uden at hvert enkelt led i disse kommer til bevidsthed. Ogsaa disse sammensatte bevægelsesimpulser associeres indbyrdes i de komplekser, vi kalder handlinger.

De sanseindtryk, instinkter og forestillinger, som fremkalder eller hemmer handlingen, kan man passende ordne i to grupper, nemlig de impulsive eller tilskyndende og de prohibitive eller tilbageholdende.

De impulsive repræsenteres af drifterne, først og fremst af de fire kardinaldrifter: alimentationsdriften, detumescentdriften, konrektationsdriften og fugaldriften, de prohibitive af kontrastforestillingerne, blandt hvilke de vigtigste er de etiske modforestillinger, som kan sammenfattes i budet: »Du skal ikke«.

Nu er store og sammensatte grupper af forestillinger indbyrdes mere eller mindre fast associerede, og blandt disse vil der findes baade impulsive og prohibitive. Naar derfor en impulsiv forestilling kommer til bevidsthed, skal der normalt i og med denne ogsaa vækkes en prohibitiv. Der opstaar da i sindet en kamp mellem tilskyndende og tilbageholdende forestillinger, og udfaldet af kampen beror paa deres indbyrdes styrkeforhold. En svag tilskyndende forestilling kan overvindes af en svag modforestilling, og en stærk tilskyndende kan gjenembryde en endog meget stærk modforestilling. Omvendt kan en stærk modforestilling hemme en meget stærk drift. Kampen kan forløbe hurtigere eller langsommere. En stærk modforestilling kan pludselig gjenembrydes efter at have holdt stand i lang tid. Men kampen kan ogsaa holdes gaaende i længere tid, idet snart den ene snart den anden forestilling har overtaget i sindet.

Denne kamp mellem tilskyndende og tilbageholdende komplekser kalder vi vilje; og jo flere og rigere sammensatte og betonedede forestillingsgrupper deltager i kampen, desto fuldkommere er handlingsmotiveringen og desto friere viljen.

Det tør være hensigtsmæssigt, før vi gaar videre, at komme lidt nærmere ind paa spørgsmaalet om den maade, paa hvilken forestillingerne associeres. Vi vil herunder kun have den menneskelige mentalitet¹ for øie og saaledes ikke berøre problemet om dyrenes forestillingsassociation, noget hvorom man endnu ved temmelig lidet, skjønt studiet af dyrepsykologien allerede har begyndt at kaste lys over de høiere dyrs sjæleliv.

¹ Jeg benytter ordet „mentalitet“ som betegnelse for indbegrebet af de psykiske processer, eller anderledes udtrykt som fællesbetegnelse for sindets funktioner.

For den menneskelige mentalitets vedkommende maa man skjelne mellem to forskellige udviklingsfaser, den prælogiske og den logiske, hvilke karakteriserer sig ved hver sin, for den eiendommelige maade, hvorpaa forestillingerne associerer.

Studiet af de primitive folkestammers liv og skikke har lært os, at disse stammers hele forestillingskreds og tankegang, deres slutninger og domme er væsentlig forskellige fra de civiliserede folks¹; og da der endnu eksisterer folkestammer, som staar paa det animistiske kulturtrin, har vi leilighed til at studere den prælogiske mentalitets udvikling fra dette tidlige kulturtrin gennem den totemistiske epoke helt ned til nutiden.

Den animistiske tid, som efter min opfatning kan antages at begynde med menneskets iagttagelse af exspirationen, karakteriserer sig derved, at alt det, som omgiver mennesket, baade levende og livløst, personificeres. Alt har to naturer, eller, om man heller vil udtrykke det saa, alt er dobbeltvæsener sammensatte af to elementer, et legemligt og et sjæleligt².

Den hele natur er belivet og kan handle, stenen og vandet saavel som planter, dyret og mennesket. Enhver handling eller en hvilkenksom helst funktion tænkes igangsat af følbare og flytbare kræfter knyttede til bestemte substantser, og det enkelte handlende individ opfattes som noget passivt, der af udenfor det selv eksisterende kræfter maa sættes igang paa lignende maade som en maskine. Den hele mentalitet beherskes af mystik, alt materialiseres og substantiseres. De afdøde personer, der fremstiller sig for den drømmende, opfattes som virkelig eksisterende materielle væsener, der besøger den drømmende, og speilbilledet og skyggen som følgesvende, som et alter ego. Man kan vistnok skjelne mellem oplevelser i vaagen tilstand og i drømme; men drømmebilleder, illusioner og hallucinationer ansees som ligeværdige med reelle sanseindtryk, alle har den samme virkelighed; ja sansebedragene har endog en høiere værdi, fordi de giver meddelelser af den største, den mest bestemmende betydenhed.

Individets personlige forestillinger og evner, ja endog de ord, der udgaar fra dets egen mund, kan blive materielle gjenstande eller væsener, som har en tilværelse, der til en vis grad er uafhængig af vedkommende individ selv, eller som ialfald fører et liv udenfor dette. Idet nu alle disse til individet bundne og dog halvt selvstændige væsener stilles imellem

¹ Angaaende den prælogiske mentalitet hos primitive folkestammer finder man en udredning hos L. LÉVY-BRUHL: „Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures (1910)

² PAUL WINGE: Den norske sindssygeret, historisk fremstillet. B. I s. 1 f.

mennesket og dæmonerne — eller senere guderne — kommer der istand en hypostasedannelse¹.

Identitetskravet gjør sig ikke gjældende, det contradictoriske princip over ingen magt over individet, og causalitetskategorien faar saaledes heller ingen bestemmende indflydelse. Den omstændighed, at et enkelt individ mener at se eller høre, hvad ingen af dets tilstedeværende omgivelser kan bemærke, vækker ingen tvil om sansningens virkelighed, den beviser kun, at vedkommende har evne til at se og høre, hvad de øvrige ikke kan opfatte.

At det samme objekt ved fornyet iagttagelse af det samme individ skal vise sig for dette paa samme maade som ved den første iagttagelse, kræves heller ikke som betingelse for antagelse af sansningens virkelighed. Individernes allestedsnærværelse antages mulig — det samme menneske kan altsaa paa samme tid være paa forskellige steder; det antages ogsaa, at det samme individ paa samme tid kan være forskellige væsener; et menneske kan saaledes ogsaa være f. ex. en fugl eller en sten. Sindet modsætter sig derfor ikke troen paa alle slags forvandlinger. Stene, planter og dyr kan omskabes til mennesker, og disse til dyr, planter eller stene.

Fænomenerne opfattes som samhörige og tillige som sidestillede og indordnes derfor ikke i noget logisk system med over- og underordning samt sondring mellem væsentligt og uvæsentligt. Den hele tilværelse er en samling af indbyrdes sideordnede komplekser, hvis enkelte led ikke tilkommer en forholdsvis større eller mindre værdifuld andel i disse, men som dog alle maa være med for at konstituere det hele kompleks. Det enkelte led kan derfor ikke elimineres, uden at det hele kompleks ødelægges. Navnet er uadskilleligt fra individet, navnet og tingen er et og det samme. Skyggen og billedet (baade speilbilledet og det tegnede billede) er vistnok ikke integrerende dele af individet, men dog i den grad samhörige med dette, at naar en af disse rammes, skades ogsaa selve individet. Ogsaa den hele familjekreds (og i den totemistiske tid den hele totemklan) danner et kollektivt hele; den enes forsømmelse hævner sig rent fysisk paa en eller flere af de øvrige, særlig paa de nærmeste. Endog mellem jægeren og vildtet bestaar der en mystisk sammenhörighed, og opretholdelsen af denne er nødvendig, for at jagten skal give udbytte, og denne sammenhörighed brydes, hvis en af jægerens nærmeste begaar en forsømmelse. Er derfor manden paa jagt, maa konen nøie passe paa at overholde skikkene; thi hvis byttet er daarligt, er grunden den, at konen har overtraadt eller for-

¹ I en afbleget form lever den endnu i vor tids personifikationer, som f. eks. folket, staten o. s. v., hvilke anskues som væsener udstyrede med sjæl og en hel række psykiske egenskaber — for det meste af fortrinlig art.

sømt en eller anden skik, medens manden var paa jagt. Hele denne betragtning fremmer naturligvis en stærk medføling mellem de samhørende individer og underholder en stadig frygt for ved allehaande mystiske paa-virkninger at skade sig selv eller sine nærmeste. Skyheden bliver inciteret, og tabu-idéer kommer til at beherske sindet.

I overensstemmelse med de her beskrevne forhold fungerer ogsaa hukommelsen. Mærkeevnen har ofte en forbausende skarphed, navnlig kan evnen til at indprente sig stedlige detaljer være vidunderlig; og de opdagelsesreisende faar derfor ofte anledning til at forbauses over det primitive menneskes evne til at orientere sig selv paa steder, som tidligere var det helt fremmede. Reproduktionsevnen har en tilsvarende skarphed, og den primitive gjenkender derfor øieblikkelig det sted, som han for lang tid siden en enkelt gang har besøgt, og han formaar at gjentage det engang hørte med en nøiagtighed, som har forekommet de opdagelsesreisende fast utrolig. Rekordationsevnen er derimod meget svagt udviklet; at ordne erindringsbillederne efter væsentligt og uvæsentligt og at ekforere netop det, som det i tilfælde kommer an paa, uden allehaande uvæsentlige biom-stændigheder — formaar derfor den primitive ikke.

Kort sagt, det erindrede (mindet) er ikke et enkelt træk eller en enkelt vigtig omstændighed, men et helt kompleks uden logisk vurdering af de enkelte leds værdi.

Fænomenerne søges forklarede ved analogier, som paa grund af kundskabsmangelen og paa virkningen af drømme og hallucinationer bliver fantastiske; og under disse vilkaar er naturligvis analogisk bevisførelse umulig. Beviset for en antagen forklarings rigtighed føres derfor heller ikke ved et ræsonnement, men derved at paastanden gjentages et stort antal gange.

Fantasien — det vil sige evnen til at bearbejde eller forandre forestillingernes indhold, forbindelser eller betoning — er svag, medens suggestibiliteten er stærk. Stemningen er kun svagt hemmet og følgelig mere labil med større svingningsamplitude. Det primitive menneske geraader derfor let i affekt med illusioner og hallucinationer, noget som antagelig væsentlig bidrager til at give drømmebillederne deres store livagtighed.

Drømmene er vistnok under den prælogiske som under den logiske mentalitet for den væsentligste del synsbilleder; men vi antager dog, at den prælogiske associationsmaade maa bevirke, at klangbillederne kommer til at spille en større rolle under den prælogiske end under den logiske mentalitet, og dette forhold maa vel antages at øve en mægtig indflydelse

paa drømmenes karakterer og særlig at styrke det auditive moments betydning.

Efter hvad vi har lært om de primitive menneskers levesæt, er vi ikke berettigede til at frakjende dem moralske og ethiske forestillinger eller evnen til at vurdere et ethisk forhold — ialfald ikke forinden de er blevne depraverede ved omgang med civiliserede folk. Allerede den stærke solidaritetsfølelse maa ansees som en ethisk og moralsk faktor af høit værd, og deres personlige hengivenhed roses af mange reisende, der er komne i nærmere berørelse med dem, for civilisationen har paavirket dem. Men de primitive menneskers etik og moral kan ikke prøves med de civiliserede folks maalestok, dertil er deres mentalitet for uensartet. Den høie suggestibilitet og impulsivitet i forbindelse med passivitetsfølelsen hindrer baade dannelsen og virkningen af kontrastforestillinger; følgelig kommer der kun en fattig handlingsmotivering istand, og viljen faar altsaa blot en meget ringe frihed. — Af det ovenfor udviklede fremgaar det efter vor opfatning, at det mest karakteristiske for den prælogiske mentalitet er det forhold, at den hele forestillingskreds næsten udelukkende bestaar af anskuelser (det vil sige forestillinger, som ved paavirkning af sanseindtryk dannes uden reflexion), og kun for en meget ringe del af begreber (det vil sige sammensatte forestillinger, der fremgaar som resultat af reflexion over det erfarede). Begrebsdannelsen er ialfald for fattig til, at der i synderlig grad kan komme istand en association efter begreber, hvilken associationsmaade netop er den karakteristiske for den logiske mentalitet. Ganske vist foregaar der ogsaa under denne mentalitet foruden den begrebsmæssige tillige andre associationer af forestillingerne — særlig efter lydighed, men disse spiller kun en underordnet rolle eller ialfald ikke den dominerende som under den prælogiske.

Overgangen mellem den prælogiske og den logiske mentalitet er dog ingenlunde skarp; tvertimod udvikler den prælogiske sig henimod den logiske gennem et tidsrum, der vel spænder over hundredetusinder af aar; ja denne udvikling er nok endnu langt fra tilendebragt selv hos de høiest civiliserede nationer. Allerede i den totemistiske tid, 'som efter min opfatning kan antages at tage sin begyndelse med erkjendelsen af respirationsfænomenet og slutte med patriarkatets definitive seir¹, sondres der mellem den levende og den livløse natur, og hermed finder en begyndende begrebsdannelse sted. Denne udvikling kan dog ikke naa synderlig udover de første tilsprang, før sproget har erholdt en vis grad af fuldkommenhed; men naar først dette maal er naaet, kan de videre fremskridt

¹ Se PAUL WINGE: „Psykiatriske og sexologiske bemærkninger om tabu og totem“ (1915).

gaa forholdsvis raskt, idet begrebsdannelse og sprog voxer i og med hinanden i en mangeslungen uløselig forbindelse.

Den prælogiske mentalitet gjør sig ogsaa hos de civiliserede nationer fremdeles gjældende med større eller mindre styrke i ethvert menneskesind, stærkest i barndommen og under manglende aandsdressur, svagest i moden alder med god skole. Sindet forbeholder sig altid en større eller mindre sfære, hvor den logiske mentalitet ikke tillades at herske. De saakaldte oversanselige fænomener behersker — alt efter kjøen og arvelige anlæg, tradition samt de ydre forhold — et større eller mindre felt af vort aandsliv selv under psykisk normalitet; og under abnorme sindstilstande kan dette felt blive stærkt udvidet. Bliver den psykiske udvikling staaende paa et infantilt trin, bevares i større eller mindre udstrækning den prælogiske mentalitet, og under visse sindslidelser kan den ogsaa under den mest fremskredne civilisation og den høieste personlige kultur atter paa sine steder under givne forhold naa en blomstring som i den længst svundne totemistiske tid.

Blandt disse sindslidelser kommer, som nedenfor nærmere skal omtales, særlig den paranoide dements i betragtning. Under denne sygdom kan nemlig alle de for den prælogiske mentalitet karakteristiske egenskaber komme til fuld udvikling, og tendentsen til materialisation og substantiation kan saaledes faa meget prægnante udtryk.

Da dette forhold har adskillig interesse for vort emne, skal jeg, før vi gaar videre, belyse det ved et eksempel.

En af Gaustad sindssygeasyls patienter, en 58 aar gammel bondemand, forklarer, at han har 3 fædre — en lensmand og to gaardbrugere — og en ahnerække uden sidestykke, samt at han underholder en stadig forbindelse med Gud, som opholder sig paa planeten Jupiter. — Patienten siger, at han eier en uhyre mængde forstand, og for at give et begreb om dennes størrelse forklarer han, at en almindelig gaardbruger har 50 studenters forstand, medens en general bør have 1000 studenters; men for at have ret til alle kvinder, maa man have mindst 1200 studenters forstand; og saa meget har, foruden ham selv, blot enhver af hans 3 fædre. Selv eier han imidlertid en langt større beholdning af forstand, nemlig for tiden 40 millioner generalers. En saa stor mængde kan han imidlertid under sine nuværende forhold desværre ikke disponere, og han anvender derfor nu kun noget over 1200 studenters. Resten har han lagret i en kiste, som han har nedgravet paa et sikkert sted i byens omegn. Han inspicerer dog ofte sin kiste og kan naarsomhelst hente, hvad han kan bruge af dens indhold. Han er ingenlunde helt uvillig til mod en pas-

sende tjeneste at overlade til andre et større eller mindre forstands-parti, f. ex. en generals — skjønt han ved sin gavmildhed har lidt betydelige tab. Dette er dog ikke saa farligt, da han har erfaret, at Gud atter har fyldt hans kiste, for hver gang han har forbrugt eller bortgivet noget af dens indhold.

I dette tilfælde er jo substantiationen meget udpræget. Hans forstand er materielle gjenstande, som kan forbruges, lagres og hentes; og af de øvrige for den prælogiske mentalitet karakteristiske træk gjenfinder vi ogsaa en hel række.

Resultaterne af forestillingernes betoning konstituerer stemningen. Ligesom den enkelte fornemmelse og forestilling saaledes kan ogsaa stemningen være lystbetonet eller ulystbetonet; eller anderledes udtrykt: der kan foreligge en expansiv (hævet) eller depressiv (nedtrykt) stemning. Har stemningen en vis intensitet, finder der en koncentration af forestillingerne sted, som følge af hvilken opmærksomheden fæstes paa et enkelt fænomen med saadan styrke, at den ikke lettelig kan bortledes fra dette. Der foregaar en indsnevring af sindet samtidig med en svagere eller stærkere omtaagning af bevidstheden, hvilken under patologiske tilstande kan stige til bevidstløshed. I og med disse symptomers indtræden finder der ogsaa forstærket motorisk reaktion sted særlig i det vasomotoriske system. Vedkommende muskler kan da trække sig sammen og derefter afspændes, i hvilket tilfælde der altsaa indtræder kloniske eller toniske krampes.

De psykiske tilstande, der karakteriserer sig ved den heromhandlede intensive forstærkning af stemningsbetoningen i forbindelse med motorisk reaktion, benævner vi affekter.

Nogle affekter som f. eks. skræk karakteriserer sig ved et akut forløb, andre saasom vrede forløber vel omtrent lige hyppigt akut som kronisk, og atter andre saasom angst, kummer, sorg og glæde pleier at have et mere eller mindre kronisk forløb. Naar affekten forløber akut, har den en stigning, et hødestadium (akme) og et fald.

Under de saakaldte fysiologiske eller normale affekter kan der indtræde saavel kloniske som toniske krampes og lammelser i extremitetsmusklerne, skjønt bevidstheden ikke er synderlig omtaaget; og under de patologiske eller abnorme affekter kan musklerne vedblive at arbejde koordineret, selv efterat bevidstløshed er indtraadt.

Vi skal nu gaa over til en lidt nærmere omtale af de under akute eller subakute affekter indtrædende motoriske fænomener og disses stilling

i affektens symptomkomplex. — Man har reist spørgsmaal om, hvorvidt stemningsforandringen eller den motoriske reaktion er affektens første symptom, altsaa om man knytter næven, fordi man er vred, eller om man bliver vred, fordi man knytter næven. Vi skal ikke drøfte dette spørgsmaal, men indskrænke os til at fremhæve, at der bestaar en fast sammenhæng mellem affektens psykiske og motoriske symptomer, samt søge at belyse dette ved et par eksempler.

Under skrækaffekten indtræder der som bekjendt en vasomotorisk krampe i hudens kar, som følge af hvilken disses kaliber formindskes; de fyldes derfor af en mindre blodmængde og huden bliver følgelig bleg. Ved skamfølelse ser vi det modsatte fænomen; der indtræder en lammelse i hudens kar, hvorved disses kaliber forstørres; karret optager en større blodmængde, og huden bliver rød. Angstaffekten kan ogsaa bevirke vasomotoriske forandringer, som fremkalder forøget sekretion af svedkjerterne, og vi sveder angstens sved.

Forskjellige affekter kan fremkalde sammentrækninger i vore lemmers muskler. Vi møder en pludselig fare og gjør reflektorisk en afværgende bevægelse med haanden; eller vi ophidses ved en fornærmelse og tilføier fornærmeren et slag. En lystbetonet affekt sætter vore lattermuskler i bevægelse, og vi ler.

Affekterne har i det hele en generel indvirkning paa vor muskulatursspænding, hvilket kommer tilsyne i hele vor holdning. Vi strammer os op til angreb eller forsvar og synker sammen i afmagt. Selve holdningen øver atter en tilbagevirkende indflydelse paa affekten. Opstramningen øger angrebs- eller forsvarsviljen, sammenfaldet opgivelsestilbøieligheden. Ogsaa hos dyrene kan vi iagttage, hvorledes deres hele holdning er betinget af deres affektilstand. Hunden viser tænder, naar den vil true med fiendskab, men logrer med halen, naar den vil tilkjendegive sin hengivenhed.

Vi har netop nævnt en affektkrampe, der fremkalder lyd, nemlig latteren, og den er ikke den eneste affektytring med denne egenskab. Her skal i forbigaaende nævnes de kramper i respirationsorganerne, som fremkalder skriget med dettes talrige nuancer, og til denne affektytring kommer vi i det følgende nærmere tilbage; men først maa vi kortelig omhandle de affekterne ledsagende bevidsthedsforandringer og dermed beslægtede symptomer. Naar en patient under bevidstløshed eller stærkere omtaaget bevidsthed har foretaget en handling, vil han, næste gang han kommer i den samme tilstand, have tilbøielighed til at gjentage denne. Naar han atter bliver fuldt bevidst, har han tabt erindringen om handlingen, eller han har ialfald kun et drømmeagtig, fragmentarisk minde om den; men naar han paany bliver bevidstløs eller bevidsthedsomtaaget, kan erindringen

om den betræffende handling gjenopvaagne for atter at svinde, naar han paany bliver bevidst. Under bevidstløshed eller bevidsthedsomtaagning kan sansningen være meget skarp samtidig med, at suggestibiliteten er stærkt forhøiet, og patienten er da ofte tilbøielig til at efterligne den suggererendes bevægelser (ekkopraxi og ekkolali). Herom har han som bevidst ingen, eller kun en svag erindring; men under et nyt anfald vil erindringen atter vende tilbage, og tilbøieligheden og evnen til at gjentage bevægelsen være forøget. Under hysteri er de heromhandlede bevidsthedsforandringer et almindeligt forekommende symptomkomplex, og under religiøs og sexuel ekstase spiller de en overmaade stor rolle.

Der handles dog her blot om en patologisk forstærkelse af fænomener, som ogsaa kan indtræde hos det normale og bevidste menneske. Affekt-symptomerne smitter jo ogsaa den bevidste, og naar vi møder et menneske i affekt, har vi derfor tilbøielighed til at geraade i samme tilstand. Vi taler jo om en smittende latter. Det er ogsaa en bekjendt sag, at de forskellige sanser under vore iagttagelser støtter hverandre. Ved spædbarnets tilegnelse af sproget spiller vistnok synet af de voxnes mimik — vel særlig deres læbebevægelser — en ikke uvigtig rolle; og hos de hørestumme børn med relativ god intelligents kan man overbevise sig om, at patientens lydopfatning støttes ved det samtidige syn af den talendes læbebevægelser — selv forinden barnet er labiologisk øvet.

Til denne skildring af de akute og subakute affekter maa vi tilføie nogle ord om visse kroniske affekttilstande, der har betydenhed for forstaaelsen af vort emne.

Vi har ovenfor omtalt, at erindringsbillederne er forbundne i faste associative komplekser med instinkter og forestillinger og som saadanne opmagasineres af sindet, samt at disse komplekser kan være indifferente eller betonedede og i sidste tilfælde lystbetonedede eller ulystbetonedede. Ethvert menneske huser saaledes et dobbelt sæt af erindringer, nogle lystbetonedede, behagelige, som man med glæde dvæler ved og omtaler, andre ulystbetonedede og ubehagelige, som man helst skyver fra sig og nødig vil tale om. Alle søger vi mere eller mindre klart bevidst at mindes det vi vil huske, og glemme det vi vil glemme. Glemselen er ikke blot noget negativt, et udfaldssymptom, men tillige noget positivt, resultatet af en villet akt; med andre ord glemselen er ikke blot passiv, men tillige aktiv.

Men intet menneske besidder et absolut herredømme over hele sin skat af erindringer. Rekordationen er aldrig fuldkommen, men kun mere eller mindre klar. Vi formaar derfor ikke efter behag at ekforere et hvilket-somhelst enkelt erindringsbillede, ligesaa lidt som at stille samtlige erindringsbilleder ind i sin rette sammenhæng med den rigtige vurdering af

det enkelte billedes betydenhed for den hele erindringsskat; og vi kan heller ikke efter behag rydde erindringsbilleder ud af vort sind som gammelt skrab af et pulterkammer. Det kan lykkes os at trykke det pinlige minde ned i underbevidstheden; men der bliver det liggende halvbevidst som et truende fremmedlegeme. Selv om det pinlige minde under dagens travlhed og optagethed af interesser og arbeide ikke ekforeres, bliver det ikke dermed udslettet, men træder i nattens stilhed frem i vore drømme. — Mod dette psykiske fremmedlegeme reagerer hele den øvrige personlighed, klart bevidst og halvbevidst, i vaagen tilstand som i drømme. Kort, der underholdes i sindet en varig konflikt, en kronisk affekt af depressiv natur.

Sædvanligvis er de pinlige erindringer meget sammensatte komplekser f. eks. skuffede ønskemaal, krænkelser af vor selvfølelse, der maaske har bragt os til at handle overilet eller endog ligefrem uhæderligt. Selvbefreidelsen kan vistnok være overvunden af selvforsvaret, ønskemaalene maaske forringet, til det er blevet det modsatte af attraaværdigt. Rognebærrene er blevne sure. Men trods alt er det ikke lykkedes helt at beseire mindet og forsone sig med det; sindet er ikke frigjort, mindet ligger der og piner.

Ofte kan konflikten løses og sindet befries, enten derved at man udfører en handling af mere eller mindre voldsom karakter, eller derved at man faar talt helt ud, sagt den fulde sandhed og modtaget fornuftgrunde, altsaa naar man har faaet mindet frem i bevidsthedens fulde dagslys og saaledes kunnet underkaste det en rolig bedømmelse; eller som IBSEN har udtrykt det i »Fruen fra havet«, naar man er kommen derhen, at man kan træffe et valg i frihed. Men muligheden herfor er jo betinget af mange omstændigheder, først og fremst af vedkommendes karakteranlæg og dernæst af de omgivelser, hvorunder han er stillet.

For saadanne pinlige komplekser spiller ofte et enkelt eller nogle faa sanseindtryk en meget stor rolle, idet de ligesom forankrer mindet, og saasnart et lignende sanseindtryk rammer sindet, ekforeres det samlede pinlige kompleks. Disse sanseindtryk kan vistnok være f. ex. smags- eller lugteindtryk, men i de fleste tilfælde er de utvilsomt hørsels- eller synsindtryk.

Navnet paa det sted, hvor den pinlige begivenhed foregik, eller blot et lignende navn eller endog bare et ord, som faldt under begivenheden kan, naar det paany nævnes, ekforere det pinlige minde; og synet af et lignende sted eller en lignende situation kan have samme virkning. Vi søger derfor at beskytte os mod at høre et saadant ord eller se en saadan situation, et forhold der støtter opkomsten af tabuidéer.

Det at et enkelt sanseindtryk kan ekforere et helt forestillingskomplex, gjælder forøvrigt ikke blot de pinlige erindringer, men ogsaa lyse minder, ved hvilke vi gjerne dvæler, samt indifferente erindringer. Vi har jo alle erfaret, hvorledes syns- og hørselsindtryk kan ekforere gamle minder, helt fra vor barndom, som ikke synes at have nogen betydenhed for vor personlighed. Et vers, som vi har lært i vor barndom, og som har ligget forankret i underbevidstheden i en lang aarrække, kan pludselig under paa-virkning af et ydre sanseindtryk ekforeres, saa vi klart husker det hele; ja vi har endog eksempler paa, at uforstaaede ord — f. ex. af latinske bønner — som vedkommende har hørt i barndommen, men senere for-glemte, kan ekforeres med stor nøiagtighed.

Men konflikten i sindet mellem de pinlige erindringer og personlig-hedens frigjørelsesforsøg er for vort emne af betydelig interesse, navnlig fordi den hyppigt ligger til grund for en akut affekt, under hvilken be-vidstheden i større eller mindre grad omtaages og indsnevres.

Vi skylder S. FREUD samt hans medarbeidere og elever en betydelig række arbejder angaaende de heromhandlede pinlige minder og deres psykiatriske vurdering, hvilke har fremkaldt et indgaaende studium af og diskussion om de heromhandlede problemer. Den Freudske skole frem-hæver stærkt de sexuelle¹ skuffelser som grundlag for de pinlige kom-plexer. Skolen har imidlertid delt sig i flere retninger, af hvilke enkelte lægger en meget betydelig vægt paa skuffelser af anden art.

Til opsporing af komplekserne benytter Freudianerne sig af den saa-kaldte psykanalyse.

Selv det psykisk normale menneske gaar neppe helt fri for de herom-handlede konflikter; men disse forløber hos dette roligt, uden at forestillings-perseverationen bliver truende for sindsligevægten.

Den logiske mentalitet hemmer affekterne og hindrer derigjennem de nævnte konflikter i at vinde herredømmet over sindet; og jo nærmere ved-kommendes mentalitet staar den prælogiske type, desto svagere bliver derfor *ceteris paribus* den hemmende indflydelse. Under de sindslidelser, som karakteriserer sig ved prælogisk mentalitet, kan de heromhandlede konflikter antage svære former. Affektintensiteten bliver nemlig under disse lidelser ofte meget stærk, og i sammenhæng hermed indtæder der en større eller mindre omtaagning af bevidstheden og indsnevring af sindet. Konflikten kan derfor spille af med overordentlig kraft, idet personligheden med opbydelse af al sin energi søger at fjerne det psykiske fremmed-legeme. Selvbefredelsen og selvforsvaret kjæmper haardt om seiren.

¹ Freudianerne tager dog dette ord i en overmaade vidtomfattende betydning.

Qui s'excuse s'accuse, og herunder kan begjæret slaa over i afsky, kjærlighed og had krydse hinanden; og jo haardere kamp, desto stærkere affekt. Erindringsforfalskninger, tvangstanker og hallucinationer kommer til, og patientens hele tænkesæt bliver patologisk bestemt¹.

Under affekten brydes tændernes gjærde, og i en mere eller mindre ordnet sammenhæng skaffer de pinlige erindringer sig udtryk og med dem ogsaa andre halvforglemte minder. Engang tillærte, men forlængst glemte ord og udtryk, endog fra fremmede sprog, som patienten aldrig har forstaaet, kommer frem, rigtignok ofte i en saa forvansket skikkelse, at de vanskelig kan gjenkjendes og forstaaes.

Vi har ovenfor omtalt de under akute affekter indtrædende kramper, og vi vil her tilføie nogle ord angaaende de kroniske affekter ledsagende kramper, samt hertil føie en bemærkning om de under affektkramper indtrædende skrig og artikulerede lyd.

Naar under kronisk affekt intensiteten naar en vis grad, kan der indtræde en akut opblussen, som eksplosivt fremkalder en motorisk reaktion af krampeagtig karakter; eller anderledes udtrykt: en akut affekt kan fremgaa af en kronisk. Forskjellen er vel i virkeligheden kun den, at den motoriske udløsning under den kroniske affekt for længere eller kortere tid er hemmet, medens den under den akute følger umiddelbart efter det sensitive irritament. De kramper, der indtræder under kronisk affekt, er i ethvert fald af samme art som de, der ledsager de akute; eller maaske rettere udtrykt de fra først af akut indtrædende affekter. Saa er ogsaa tilfælde med de kramper, som volder latteren og skriget, og heller ikke de, der fremkalder artikulerede lyd, gjør nogen undtagelse i den heromhandlede henseende.

Artikulationsevnen er ikke udelukkende betinget af visse muskelgruppers kontraktion, men tillige af en række andre ligesaa vigtige, faktorer. Blandt disse kommer paa den ene side i betragtning cerebrosplanalsystemets — specielt visse hjernedele og nervøse endeapparaters funktion — og paa den anden anatomiske forhold saasom læbernes, mundhulens, tændernes, strubens, stemmebaandenes og først og fremst tungens konfiguration.

Men naar alle disse betingelser er opfyldte, vil kramper i de betræffende muskler kunne frembringe artikulerede lyd, hvorom mere nedenfor. Artikulationsevnen er som bekjendt ikke udelukkende menneskets eie — en papegoie kan jo ogsaa frembringe artikulerede lyd; men dermed er det naturligvis ingenlunde givet, at dyret kan bruge disse lyd som med-

¹ Drømme har utvilsomt en regulerende indflydelse af stor betydning; men paa dette emne kan vi ikke her gaa nærmere ind.

delelsesmiddel. — Hos de nulevende anthropeide abearter skal man, efter hvad der anføres, i forbindelse med skriget kunne høre artikulerede lyd; og det er vel antageligt, at saadanne lyd bidrager til at variere skriget og saaledes fuldkommengjøre dette som meddelelsesmiddel; men saalænge man ikke hos disse dyr med sikkerhed har konstateret meddelelser ved hjælp af artikulerede lyd uden forbindelse med skrig¹, maa man efter vor mening gaa ud fra, at de uddøde hominider (menneskets nærmeste stamfædre, antagelig en eller flere halvabe-arter) har erhvervet artikulations-evnen, efterat afspaltningen fra de øvrige abearter havde fundet sted; og denne evne har utvilsomt først efter en lang udvikling naaet frem til den grad af fuldkommenhed, som den har hos nutidens mest primitive folkestammer.

Allerede hos spædbarnet kan krampe frembringe visse sproglyd. En ulystfornemmelse kan saaledes fremkalde rynkning af næsen, og hvis luften herunder udstødes gennem denne, vil der fremkomme en n-lyd. Det despektive j skyldes ogsaa en lignende foregang, og interjektionerne, der i fortrinlig forstand er affektlyd, er jo ogsaa artikulerede.

At der under hysteriske kramper kan fremkomme artikulerede lyd, er vel kjendt; men det har været paastaet, at dette blot sker, naar vedkommende staar i begreb med at tale; med andre ord, at der her altid foreligger intentionskramper; og det maa ogsaa medgives, at saa i almindelighed er tilfælde. Vi mener dog, at man er berettiget til at hævde den mening, at intention ikke er nogen nødvendig betingelse for, at kramper i de betræffende muskelgrupper skal kunne indtræde, og hvis saa sker, maa der fremkomme artikulerede lyd.

Men kloniske kramper bestaar som regel ikke i en enkelt rykning, men i flere paa hinanden følgende, der som oftest kumuleres i grupper med længere intervaller. Hvor derfor kramperne frembringer artikulerede lyd, vil ogsaa disse blive gjentaget flere gange (redupliserede), hvorhos der paa grund af kumulationen lettelig vil indtræde en vis rytme.

Affektytringer, særlig de akute, er i og for sig skikkede som meddelelsesmidler. Dyrets holdning giver allerede besked om dets stemning og begjær, og i forbindelse med dets størrelse, udseende og lugt samt stilling og omgivelser — tillige om dets angrebs- og forsvarsevne. Selv det monotone skrig giver yderligere værdifulde oplysninger, og disse fuldkommengjøres, eftersom skriget kan moduleres. Varselsskriget spiller jo for mange dyr en overordentlig stor rolle.

¹ Angaaende spørgsmaalet om, hvorledes det i saa henseende virkelig forholder sig, vil jeg ikke have udtalt nogensomhelst mening.

Alt efter respirationsorganernes anatomiske bygning muliggjøres en mere eller mindre fin nyancering af skriget; og man kan derfor hos de høiere dyr iagttage en ret betydelig forskjel i deres skrig. Det synes, som om denne evne til differentiation kan øges ved arvede mnemiske engrammer; og dette er vel i saa fald grunden til, at hundens skrig er saa meget rigere nyanceret end dens stamdyrs, schakalens og ulvens. Men menneskets evne i saa henseende overgaar langt det maal, som er naaet af noget andet dyr.

Tonehøiden, dens stigning og falden, rhythmien, dens langsomhed og hurtighed, spiller en stor rolle; og end bedre kan stemning, begjær og forsæt gives udtryk, naar modulationen udvikles i retning af primitiv musik.

Lokken og advarsel kan da gives paa en forholdsvis fuldkommen maade, og kommer saa artikulerede lyd til, sker der et mægtigt fremskridt, selv om der endnu kun kan frembringes enkelte interjektioner.

III.

En række af de muskelbevægelser, der spontant fremkommer som led i affekternes symptomkomplexer, kan med vilje efterlignes; og vi kan saaledes foretage handlinger, som i større eller mindre grad ligner affektens motoriske fænomener. Ogsaa dyrene er istand til at foretage saadanne handlinger, men for mennesket frembyder der sig i saa henseende langt rigere muligheder.

Naar man bortser fra hjertet, kan jo saagodtsom alle de bevægelser, der udføres af de tverstribede muskler, efterlignes.

De villede muskelbevægelser, som efterligner de under akute affekter indtrædende kramper, kalder vi primære gebærder; og da ogsaa de kramper, som fremkalder lyd, navnlig skrig, kan efterlignes, kan vi skjelne mellem lydløse og lydende gebærder¹.

Da de primære gebærder er efterligninger af visse bestemte kramper, som spontant udløses af hver sin affekt, kan de benyttes som meddelelsesmiddel, idet de underretter om den gebærdendes virkelige eller simulerede affekttilstand og saaledes indirekte ogsaa om de af denne fremkaldte handlinger. Paa en saa meget fuldkomnere maade kan dette naturligvis ske, naar man faar til hjælp de sekundære gebærder (det vil sige tillærte muskelbevægelser, som ikke efterligner affektkramper), hvilke ogsaa kan være saavel lydløse som lydende (skrig, klappen i hænderne o. s. v.).

¹ I mangel af et mere betegnende ord bruger vi her „gebærder“ i en udvidet betydning.

De primære gebærder forudsætter kun mnemiske engrammer, ingen erfaring, lærdom eller overenskomst. De er umiddelbart forstaaelige, og det ene menneske kan derfor ved deres hjælp meddele det andet underretning om stemninger, situationer og handlinger.

Men først ved tilkomsten af de sekundære gebærder faar man et virkeligt gebærdesprog; og dette forudsætter jo en vis grad af lærdom og overenskomst. Dette er dog ikke til hinder for, at det kan naa en temmelig høi grad af udvikling med bevarelse af sin umiddelbare forstaaelighed; og allerede paa et temmelig tidligt udviklingstrin optræder tegnegebærden, som bestaar deri, at vedkommende med sin finger ligesom tegner i luften den gjenstand, han vil paavise. Pantomimen og det spontane døvstummesprog giver os ogsaa et godt begreb om, hvorlangt selv det lydløse gebærdesprog kan udvikles, og tages et rigt nyanceret skrig med, naar man naturligvis endnu noget videre. For at gebærdesproget skal naa en høiere grad af fuldkommenhed, maa der imidlertid overenskomst, undervisning og øvelse til, hvad de døvstummes kunstige fingersprog noksom lærer os — og til det artikulerede lydsprogs udviklingsmuligheder kan det overhovedet aldrig naa.

Det store gjenembrud finder sted, naar de artikulerede affektlyd efterlignes i den hensigt at benytte dem som meddelelsesmiddel.

Som ovenfor bemærket smitter affekten, og naar derfor et menneske iagttager et andet, som er i affekt, vil det, hvis modforestillinger ikke gjør sig gjældende med tilstrækkelig styrke, selv geraade i samme affekt som det andet, og de samme muskelbevægelser med de samme artikulerede lyd vil indtræde ogsaa hos dette.

Efterligningstilbøieligheden vil ogsaa bevæge mennesket til at efterabe lyd — uartikulerede som artikulerede — som det hører, og saaledes danne ord — til at begynde med sandsynligvis saadanne, hvis betydning er given ved selve deres lyd, de saakaldte onomatopoietiske ord. Mange ord er ogsaa oprindelig onomatopoietiske, men i tidens løb saa stærkt forandrede, at de ikke længer kan gjenkjendes som saadanne og derfor heller ikke er umiddelbart forstaaelige. Men interjektioner og onomatopoietiske ord udgjør alligevel en saa ringe del af det ordforraad, som er nødvendigt selv for et meget primitivt sprog, at forsøg paa at forklare sprogets oprindelse ved hjælp af disse er opgivne. Selv for de mest primitive sprog gjælder det, at den aller største del af dets ordforraad ikke er forstaaeligt, før man har lært det.

Det er derfor dette skrifts hovedopgave at søge paavist de psykiatriske fænomener, som antages at have interesse for løsningen af spørgsmaalet om, hvorledes menneskene er komne til at tillægge visse artikulerede lyd eller grupper af saadanne sproglig betydning. Dette var ogsaa det store spørgsmaal i striden mellem tilhængerne af *φύσει*- og *θεσει*-theorien; og det vil altid vedblive at være grundproblemet i spørgsmaalet om sprogets oprindelse.

Efter det anførte maa vi antage, at menneskene i den ældre animistiske tid kun kan have benyttet de lettest artikulerbare lyd, altsaa vel nærmest de, der dannes i mundhulhedens forreste partier; men naar først artikulations- evnen er tilstede, maa den antages at have gjort sig gjældende under affekt- kramper i de betræffende muskler; og naar dette en tidlang jevnlig er skeet, maa ogsaa disse lyd være søgt efterlignede og følgelig være bragte i forbindelse med lydende gebærder.

Erhvervelsen af den opreiste gang er vel blandt de første af de fundamentale fremskridt, der betegner overgangen fra dyrelivet til menneskelivet. Hænderne frigjøres fra deltagelsen i gangen, idet disse og fødderne differentieres, hvorved det bliver muligt at anvende hænderne til forfærdigelse af redskaber, og — hvad der for vort emne er det vigtigste — at nyttiggjøre dem for sekundære gebærder.

Herved var allerede tilveiebragt et meddelelsesmiddel af langt større fuldkommenhed end det, hvorover noget andet dyr raader; og denne udvikling maa antages at have fundet sted i skridt med en fuldkommengjørelse af skrigets nyancering og modulation; og naar saa artikulerede lyd er komne til, er de lydende gebærder blevne en ligesaa vigtig del af de foreliggende meddelelsesmidler som de lydløse.

Naar nu først situationen er denne, vil de gebærder, der ledsages af artikulerede lyd, snart godtgjøre sine uhyre fortrin for de øvrige. Vi antager derfor, at artikulerede lyd — dog formentlig kun i ringe antal — allerede tidligt har faaet sprogligt værd; men dette udviklingstrin maa af de forskellige stammer være naaet paa en meget forskellig tid, og uden at den ene har kunnet paavirke mere end faa andre. Det kan derfor ikke antages, at de forskellige stammer udenfor et meget begrænset omraade — ialfald naar man bortser fra de onomatopoeiske ord — kan have til- lagt de betræffende artikulerede lyd den samme eller en lignende betydning. Om noget oprindeligt sproglægtskab kan der derfor neppe være tale, noget som naturligvis ikke udelukker, at enkelte artikulationer paa grund af deres forbindelse med stemmens hæven og sænken — eller andre

modulationer — af forskellige stammer uafhængig af hverandre kan være tillagte lignende betydning.

Naar vi her taler om ordenes sproglige betydning, pligter jeg meget skarpt at fremhæve følgende: Vi kan paa det heromhandlede udviklings-trin ikke skjelne mellem enkelte ord, ordklasser eller sætninger, ligesaa lidt som vi kan tale om ordføining. Vi forstaar derfor ved »ord« kun en artikuleret lyd eller en gruppe af saadanne, hvorved man kan give eller modtage en meddelelse. Naar vi taler om ordenes betydning, mener vi ikke begrebsmæssig betydning, men kun en lydsproglig betegnelse for gjenstande, fornemmelser og stemninger. Paa den heromhandlede tid staar jo endnu mentaliteten paa et meget tidligt prælogisk standpunkt, og paa dette trin kan der ikke foreligge begreber, og altsaa heller ikke finde nogen begrebsmæssig association sted. Ord som betegnelse for begreber kan først tilveiebringes, naar den logiske mentalitet har gjort sig gjældende, det vil sige paa et udviklingstrin, da sproget allerede er naaet langt udover det protoglossiske stadium, vi her behandler. — Begreberne dannes som ovenfor bemærket i og med sprogets fremadskridende udvikling.

Skjønt de lydløse og lydende gebærder, navnlig skriget, antagelig længe har holdt sig som det vigtigste meddelelsesmiddel, medens de artikulerede lyd blot har spillet en sekundær rolle, kan der dog neppe være hengaaet noget langt tidsrum, før disse lyd for enkelte formaals vedkommende har vist sig gebærderne i den grad overlegne, at de helt har fortrængt dem.

Er samfundsorganisationen naaet udover de ældste stadier, maa først og fremst de enkelte personer, men dernæst ogsaa de vigtigste redskaber og husbehov gives navne. En af de væsentligste fordringer til et personnavn er imidlertid den, at man ved hjælp af dette skal kunne tilkalde et bestemt individ, selv om dette ikke kan sees, f. ex. fordi det er mørkt, og af et redskabsnavn maa det ogsaa kræves, at man med dette skal kunne forlange gjenstanden tilbragt, selv om denne ikke kan sees; men denne fordring kan ikke opfyldes uden anvendelse af artikulerede lyd. Idet nu disse lyd benyttes til navngivning, faar de et stadig længere forsprang for de lydende gebærder; men den afgjørende seir over disse vinder de formentlig først, efterat tegnekunsten allerede var tagen i brug som meddelelsesmiddel¹.

¹ Vi kjender fra totemistiske Indianerstammer en ret fuldkommen billedskrift, som synes opkommen derved, at man har villet fæste paa et fast underlag de flygtige tegninger, som man tidligere havde nøiet sig med at gøre i luften.

WUNDT meddeler i „Die Sprache“ B. I s. 233 en saadan billedskrift.

Tegninger af mammut og andre diluviale dyr giver jo os et fuldgyldigt bevis for, at mennesket allerede i den animistiske tid har kunnet tegne; og af denne kjendsgjerning maa man kunne drage den slutning, at tegnegebærden har været kjendt lang tid forud. Men dette beviser igjen, at gebærdesproget allerede paa et meget tidligt stadium maa have naaet en saa høi grad af fuldkommenhed, at det selv uden støtte af artikulerede lyd har muliggjort en virkelig tankeudvexling. Men er denne følge-slutning rigtig, foreligger der efter vor mening god grund til at antage, at skriftsproget og det artikulerede lydsprog allerede fra den første tid har udviklet sig i skridt med hinanden, og at saaledes skriftsproget ingenlunde blot kan opfattes som resultatet af bestræbelser for at give en billedlig fremstilling af artikulerede lyd eller anderledes udtrykt som et forsøg paa at erstatte lydbilleder med synsbilleder.

IV.

I og med skabelsen af et artikuleret sprog begyndte selvfølgelig nydannelsen af ord; og denne proces har senere til alle tider været igang og er det fremdeles.

En tidligere ukjendt gjenstand kræver et nyt navn, og eftersom forestillingerne differentieres, forlanges nye ord for disse; men selv hvor et saadant behov ikke foreligger eller gjør sig gjældende, har tilbøieligheden til at lave ord en saa stor styrke og udbredelse, at den maa tages med i beregningen. Dette behov og denne tilbøielighed tilfredsstilles vel i regelen ved benyttelsen af de foreliggende ordforraad, der kan modificeres for det første derved, at betydningsomraaderne dels indskrænkes, dels udvides, dels glider sammen (hvilken proces fremmes ved feilhørsel, erindringsforfalskning, falske sammenligninger o. s. v.), og for det andet derved, at ogsaa selve ordene undergaar en omdannelse, som vel hovedsagelig skyldes lydlovenes indvirkning, men som ogsaa undtagelsesvis kan fremkaldes alene ved feilhørsel, erindringsforfalskning, sammenglidning, falsk analogi o. s. v. og endelig ved bevidst forvrængning.

Ved navngivningen spiller den heromhandlede nydannelse en ganske stor rolle. Opfindsomheden er jo meget stor, naar det gjælder at finde paa kjælenavne; og foranledningen til dannelsen af opnavne er som regel en ganske ubetydelig begivenhed i vedkommendes liv, som ofte meget snart er helt forglemt, saa ingen længer er istand til at oplyse noget om navnets ophav. Ogsaa forskellige lokaliteter, brugsgjenstande, nærings- og nydelsesmidler kan antagelig faa navn paa denne tilfældige maade.

Tilbøieligheden til nydannelse af ord med stærkere eller svagere benyttelse af det foreliggende sprogmateriale gjør sig ogsaa gjældende paa et langt videre omraade end navngivningen.

Inden visse familjer eller omgangskredse, ja endog mellem et par enkelte individer kan denne nydannelse gro ganske kraftig, og man træffer ofte børn, som navnlig under legen laver sig et betydelig antal nye ord — af og til endog hele sprog¹, som de noder omgivelserne til at lære. De hemmelige sprog, som dannes inden visse organisationer, f. ex. forbrydersamfund, gjør en vidtstrakt brug af den heromhandlede tilbøielighed; og her spiller en bevidst forvrængning en meget stor rolle, fordi det jo netop er opgaven at tilviebringe et meddelelsesmiddel, som ikke kan forstaaes af andre end de indviede.

Paa denne maade skabes der vistnok en række nye ord med hver sin betydning; men samtidig dannes der ogsaa en mængde synonymer, udvidelser og variationer. For den prælogiske sprogdannelse er det ogsaa karakteristisk, at der samtidig med stor mangel paa nødvendige ord optræder en mængde synonymer og ordudvidelser. Det er saaledes ikke blot de kjære børn, som faar mange navne. Den logiske mentalitet lægger baand paa den heromhandlede tilbøielighed, ialfald saa længe den ikke tages i brug for dannelsen af hemmelige sprog; men det forekommer os antageligt, at den i prælogisk tid har øvet en mægtig indflydelse.

Det ligger da nær paa forhaand at forvente, at man under de psykopathiske tilstande, der karakteriserer sig ved en gjenopvaagnen af den prælogiske mentalitet, vil finde tilbøieligheden til nydannelse af sprog stærkt fremtrædende; og erfaring synes ogsaa at vise, at saa virkelig er tilfælde.

De sindslidelser, som i den heromhandlede henseende kommer i betragtning, er foruden den ovennævnte paranoide dements, lettere grader af idioti, paranoid imbecillitet samt sværere former af hysteri og nevrastheni, og blandt disse først og fremst paranoid dements og visse svære hysteriformer. Under paranoia og paralysis generalis vil det hos civiliserede folk ikke let komme til psykopathisk sprogdannelse. Ved den førstnævnte af disse lidelser er nemlig den logiske evne saa godt bevaret, at den vil reagere mod en saadan nydannelse; og ved paralyzen finder der, ialfald under dens senere stadier, sted en saa gennemgribende opløsning af mentaliteten, at der kun foregaar ødelæggelse, ikke nydannelse af sprog. Paralyzen har derfor vistnok stor interesse for sprogets pathologi, men ikke for den nydannelsesproces, hvormed vi her taler.

¹ Se herom JESPERSEN ovencit. s. 296 f.

Den psykopathiske sprogdannelse finder sted saavel under affekt med mere eller mindre omtaaget bevidsthed som under affektfrie intervaller med bevaret bevidsthed. Den sproglige nydannelses mekanisme er ligesaa vel som dens produkt i almindelighed af en noget forskjellig beskaffenhed, eftersom denne dannelse finder sted under affekt eller under psykisk ro; men skjønt grænserne, som nedenfor skal omtales, er flydende, finder vi det tjenligt for oversigten at opstille en inddeling af den psykopathiske sprogdannelse i to former, nemlig en affektiv og en inaffektiv glossolali.

Vi skal først omhandle den affektive, der er den form, som efter vor mening har størst interesse for vort emne; og for med engang at komme in medias res, vil vi forestille os en scene, under hvilken der foregaar en affektiv nydannelse af et artikuleret sprog.

Scenen er et værelse fyldt til trængsel af gamle og unge; de fleste af de tilstedeværende er kvinder, men der findes ogsaa adskillige mænd.

Mødets leder, en asketisk udseende mand, staar paa en talerstol, og eftersom hans foredrag skrider frem, tiltager hans ophidselse og fanatiske glød. Mod denne mand er alle de tilstedeværendes øine og øren rettede med spændt opmærksomhed; alle er betagne af hans person og hans ord. Lederens ophidselse stiger, hans minespil og gestikulation bliver livligere og hans stemme tordnende. Pludselig begynder han at udstøde artikulerede lyd, mest enkle forbindelser af en konsonant med en efterfølgende vokal, som gjentages rhythmisk med en meget forskjellig stemmemodulation og ledsagede af en betegnende mimik og andre gebærder. Tilhørerne bliver mere og mere henrevne, og enkelte begynder at udstøde lignende lyd og lydforbindelser, som de lederen lige forud har præsteret. Etersom ekstasen stiger, udvikler fænomenet sig; og der udstødes ikke blot de enkle artikulationer af en konsonant med en efterfølgende vokal, men tillige langt mere sammensatte lydforbindelser, samtidigt som variationen bliver rigere. I disse mere sammensatte artikulationer gjenfinder man stumper eller misdannelser af fremmede eller nationale ord, tildels ogsaa enkelte rigtigt gjengivne ord, som tilhører et eller andet fremmed sprog. Profeten lægger ikke selv nogen mening ind i de artikulerede lyd, han fremsiger; tvertimod føler han det, som en fremmed aand taler gennem ham i et fremmed tungemaal; først senere lærer han at forstaa betydningen.

Paa et vist tidspunkt indtræder nemlig et fænomen af en ny orden. En af tilhørerne erklærer, at han skønner meningen af de ord, som Gud har udtalt gennem profetens mund, og som denne ikke selv har forstaaet. Den nye aktør optræder nu som tolk og oversætter for forsamlingen profetens guddommelige foredrag. Ophidselsen naar sit høidepunkt, og flere af de forsamlede faar forvirringsanfald med kramper og hallucinationer.

Imidlertid er der kommen rapport istand mellem profeten og tolken; og eftersom samme scene gjentager sig under paafølgende møder, lærer baade profeten, tolken og flere andre af forsamlingen at forstaa det hellige sprog. Efterhaanden bliver en større del af kredsen delagtig i visdommen, og det guddommelige sprog lyder ogsaa, naar flere eller færre af kredsen kommer sammen, selv om profeten ikke er tilstede.

Kredsen har saaledes lagt sig til en række lydende gebærder med artikulerede lyd, i hvilke den lægger en mening, paa lignende maade som uoplærte døvstumme lægger mening i sine lydløse gebærder.

Der er saaledes nydannet et slags sprog eller vel rettere en *protoglossa*.

Den religiøse affektive glossolali, som vi nu kortelig har skitseret, er kjendt helt fra Oldtiden¹, og for os er Heraklits udsagn om det delfiske orakel meget oplysende. Han siger nemlig: *ὁ ἄναξ, ὃ τὸ μαντεῖόν ἐστι τὸ ἐν Δελφοῖς, οὔτε λέγει οὔτε χρίπτει ἀλλὰ σημαίνει*². Det vil sige: Pythia taler ikke et for enhver Hellener forstaaeligt sprog, men guden giver gennem hende meddelelser, som kun kan forstaaes af de indviede. Pythia har under exstase med bevidsthedsomtaagning glossolaleret, og presten har fortolket hendes tale og oversat den i klingende hexametre.

Som bekjendt omtales den affektive glossolali paa flere steder i Det nye testamente som en naadegave, der meddeles de troende under exstatiske tilstande. I »Apostlernes gjerninger« 2det kapitel skildres saaledes den første pintsefest, under hvilken mange af de tilstedeværende befandt sig i hallucinatorisk forvirring³ og glossolalerede⁴.

Der var ogsaa fremmødt udlændinger, som mente i glossolalien at høre sine egne modersmaal — et ogsaa for vor tids religiøse glossolali vel kjendt fænomen.

Apostelen Paulus, der selv drev glossolali, har meddelt oplysninger af stor interesse for bedømmelsen af dette symptoms væsen. I sit første brev til Korintherne (kap. 12 v. 4—10) opregner han nogle *χαρίσματα* (naadegaver), og en af disse benævnes *γένη γλωσσῶν* (sprogglavning), en anden *ἐξμνηεῖα γλωσσῶν* (sprogtydning) — altsaa netop de to »evner«, der konstituerer den affektive glossolali. I samme brev 14de kapitel omtaler Paulus noget udførligere glossolalien og bemærker (v. 2—4):

¹ Se herom FEINE: „Zungenreden“ i Herzog-Hauck: Realencyklopädie für protestantische Theologie und Kirche (1908).

² Guddommen, hvis orakel er i Delfi, hverken taler eller skjuler, men giver tegn (varsler).

³ De hørte lyd fra himmelen som under et uveir og saa „ildtunger“ sætte sig paa de tilstedeværende.

⁴ Jeg har ikke kunnet finde paa en korrekt oversættelse til dansk af det græske udtryk *γλώσσαις λαλεῖν*.

»ὁ γὰρ λαλῶν γλώσση οὐκ ἀνθρώποις λαλεῖ ἀλλὰ θεῷ· οὐδεὶς γὰρ ἀκούει, πνεύματι δὲ λαλεῖ μυστήρια· ὁ δὲ προφητεύων ἀνθρώποις λαλεῖ οἰκοδομὴν καὶ παράκλησιν καὶ παραμυθίαν. ὁ λαλῶν γλώσση ἑαυτὸν οἰκοδομεῖ· ὁ δὲ προφητεύων ἐκκλησίαν οἰκοδομεῖ. θέλω δὲ πάντας ὑμᾶς λαλεῖν γλώσσαις, μᾶλλον δὲ ἵνα προφητεύητε· μείζων δὲ ὁ προφητεύων ἢ ὁ λαλῶν γλώσσαις, ἐκτὸς εἰ μὴ διερμηνεύῃ, ἵνα ἡ ἐκκλησία οἰκοδομῇν λόβῃ«¹.

Som man ser, er det her skarpt fremhævet, at en speciel guddommelig naadegave er betingelsen for selv at kunne glossolalere og en anden for at kunne forstaa glossolalien, og nedenfor i samme kapitel (v. 27—33) fremhæver Paulus det for menighedens opbyggelse unyttige i at glossolalere, naar der ikke er en fortolker tilstede.

Skal vi nu fra et psykiatrisk standpunkt søge at bedømme de fænomener, som vi har lært at kjende fra den skildrede scene, vil vi strax fæste os ved den omstændighed, at forsamlingen for den overveiende dels vedkommende bestaar af mennesker, hvis personlighed karakteriserer sig ved en labil stemning med høi suggestibilitet; mange er hysterikere, nevra-sthenikere eller paranoid demente, hvis mentalitet er mer eller mindre prælogisk. Idet disse folk møder i forsamlingen, er deres sind behersket af forventningen om, at noget guddommeligt vil ske. For de fleste er lederen allerede fra før kjendt, og anerkjendt, som den store profet, der skal bringe dem fred og lykke. Profeten selv har de væsentlige karaktertræk fælles med sine tilhængere; ogsaa han lider under en labil stemning og en forhoiet suggestibilitet, ogsaa hans mentalitet er mere eller mindre prælogisk; men hans personlighed er de andres overlegen med hensyn paa de egenskaber, som netop er de afgjørende for hans stilling i kredsen.

Allerede hans prælogiske passivitetsfølelse bringer ham til at tro, at han staar under høiere magters ledelse, og han kan derfor fortælle subjektivt sandt om sine oversanselige erfaringer. Lider han af sigtelsestro (Beziehungs-Wahn) eller hallucinationer, kan han med desto større anskuelighed og glød tale om, hvad Gud indgiver ham; og hans tilbeielighed til substantiation giver hans hele optræden liv og relief.

¹ Den, som glossolalerer, taler ikke til mennesker, men til Gud; ingen har øre for ham, thi han taler hemmeligheder (det er noget for uindviiede uforstaaeligt) i aanden. Den, som profeterer, taler derimod til mennesker, som han opbygger, opmuntrer og trøster. Den, som glossolalerer, opbygger sig selv, men den, som profeterer, opbygger forsamlingen. Jeg vil gerne, at I alle skal glossolalere, men heller, at I skal profetere; thi den, som profeterer, er større end den, som glossolalerer, med mindre han giver en tolkning, som kan opbygge forsamlingen.

Den paranoid demente har ogsaa i sin sygdom andre overmaade værdifulde fortrin. Hans qvasi-logik og skraasikkerhed styrker hans autoritet, og han har desuden let for at tilveiebringe seksuelle forhold til sine kvindelige tilhængere, som han gjør til sine slavinder.

De mellem profeten og hans tilhængere knyttede baand er følgende mange og meget stærke.

Allerede ved sin indtræden i mødets lokale finder han en skare, som hungrer og tørster efter hans ord. Hans eget sind er ogsaa optaget af tanken paa al den miskjendelse og forfølgelse, for hvilken han selv har været udsat, men ikke mindre af idéen om egen storhed. Han føler, hvorledes han staar ved begyndelsen til de begivenheder, som skal skaffe ham magt og væld og tifold erstatning for de mange uforskyldte lidelser. Han taler til en forsamling, som ganske vist skal refses og formanet (et program, der naturligvis øger hans egen selvfølelse), men som først og fremst skal opmuntres til at kjæmpe for hans ophøielse.

Fanatismen stiger under talen, og han arbejder sig op i en affekt, som snart naar en saadan høide, at bevidstheden omtaages. Nu er hans mimik og gestikulation ikke længer alene gebærder, men ogsaa affekt-kramper; de muskelgrupper, som fremkalder artikulerede lyd, inddrages i kramperne, og der udstødes rækker af saadanne lyd¹, som af de ovenfor anførte grunde i stor udstrækning redupliceres og optræder rhythmisk.

Hos den paranoid demente profet vil ogsaa pinlige komplekser af den ovenfor omtalte art skaffe sig afløb, og hermed vil følge mere komplicerede artikulationer. Nogle vil være forvrængte ord fra modersmaalet eller andre sprog, medens andre vil være rigtigt udtalte ord, som feilhøres af tilhørerne, og som senere af fortolkeren kastes tilbage til profeten og derefter optages af forsamlingen i den forvrængte form.

Da disse fænomener spiller af i en tilstand af bevidsthedsomtaagning, vil de for en væsentlig del være gjentagelser af, hvad der har fundet sted under tidligere bevidsthedsomtaagninger; og de artikulerede lyd vil derfor ogsaa være væsentlig de samme og indtræde i den samme rækkefølge som ved tidligere leiligheder.

Profetens forsikring om, at han selv ikke forstaar, hvad han siger, og at det er Gud, som taler gjennem hans mund, virker naturligvis i høi grad suggererende, og flere eller færre af forsamlingen faar lignende kramper og udstøder tilsvarende artikulerede lyd.

At disse lyd for størstedelen er de selv samme, er allerede givet ved det forholdsvis ringe antal artikulationer, men desuden betinget deraf, at de psykisk

¹ At det her hovedsagelig dreier sig om intentionskramper, er vistnok utvilsomt.

smittede tilhørere under sin bevidsthedsomtaagning skarpt iagttager profetens læbebevægelser og derfor ubevidst eller halvbevidst efterligner disse — et velkendt hypnotisk fænomen.

Hørselsindtrykket af lyden og synet af læbebevægelsen støtter hinanden indbyrdes og bevirker tillige, at forestillingerne saameget bedre indprentes og reproduceres.

Naar de forsamlede fanatikere er bragte op i en affekt af en vis intensitet, vil der være stor chance for, at flere af dem bliver illusionerede, og maaske ogsaa hallucinerede, for hørselen, og isaafald for at de forstaar meningen af profetens guddommelige ord samt forsamlingens refrain til disse. Den inspirerede tolk træder frem og oversætter for forsamlingen de guddommelige ord.

Vi har saavidt udførligt som skeet omhandlet den affektive glossolali, fordi den efter vor mening kaster et ganske skarpt lys over en af de maader eller veie, som kan antages at føre til, at artikulerede lyd tillægges sproglig betydning.

Spørgsmaalet bliver da, om det er antageligt, at forbindelsen af artikulerede lyd med forestillinger eller forestillingsgrupper hos de ældste menneskearter er kommen istand paa lignende maade, som den vi kjender fra en langt senere tids affektive glossolali.

Mange vil a priori være tilbøielige til at besvare dette spørgsmaal benægtende, kanske endog til helt at afvise det. Det maa jo ogsaa indrømmes, at der bestaar en uhyre forskjel mellem situationen i den forhistoriske og den historiske tid samt paa livsvilkaarene i et primitivt og et civiliseret samfund. I historisk tid har alle de samfund, til hvilke vi har nærmere kjendskab, haft en saavidt udviklet civilisation, at baade glossolalen selv og hans tolk har været i besiddelse af et modersmaal, som de har behersket, og til hvis sproglige konstitution de har haft et større eller mindre kjendskab. Ialfald i vor tid ved de begge forskjel paa enkelte ord og sætninger, vel endog paa ordklasser. Hertil kommer, at de begge, selv om deres mentalitet er udpræget prælogisk, har behov for ord for en række forestillinger — tildels begreber —, som den primitive ikke kjender, og et saadant behov stiller selvfølgelig videregaaende sproglige fordringer. Endelig har vore dages glossolalers fortolkere til sin raadighed et udviklet lydsprog, til hvilket de kan oversætte glossolalien. — Helt anderledes er situationen i den animistiske tid (særlig i dennes tidligste epoke); da er jo lydsproget endnu ikke kommet ud over sin spædeste barndom.

Trods denne uhyre forskjel vover vi ikke desto mindre at besvare vort spørgsmaal bekræftende, og vi skal ganske kort redegjøre for vore grunde.

Det maa vel antages, at menneskearterne i den animistiske tid har haft en brunsttid om vaaren; og jeg har i min lille afhandling om tabu og totem¹ udtalt den mening, at de fra dyrelivet nedarvede parringslege har været fortsatte under denne og er bleven kultisk behandlede. Er denne opfatning rigtig, maa det efter vor mening ansees givet, at der under vaarfesterne er indtraadt exstatiske tilstande med hysteriske symptomer, og isaafald maa der have fundet en mægtig suggestiv paavirkning sted.

Naar der først foreligger en kultisk ceremoni, vil aldrig samtlige deltagere i denne være ligeværdige; der vil blive en mere eller mindre skarp forskjel mellem lederen og de ledede. Der vil optræde en shaman, om end dennes stilling og autoritet i den animistiske tid ikke vil kunne opnaa den fasthed og autoritet som i den paafølgende totemistiske.

Shamanen vil under ceremonien geraade i exstase, og der vil hos flere eller færre af de øvrige deltagere indtræde affektkramper med skrig, hvori der vil kunne blandes artikulerede lyd. Affekttypen vil blive den samme under de følgende som under den første exstase, og de samme lyd vil isaafald i større eller mindre udstrækning gjentages i den samme rytme.

Jo større shamanens autoritet er, desto større er naturligvis ogsaa hans suggestive indflydelse; og de øvrige deltagere vil for hver gang ikke blot se og høre de samme gestikulationer og skrig med og uden artikulerede lyd; men de vil erindre dem, tænke paa dem, efterabe dem og drømme om dem.

Heller ikke de øvrige deltagere i ceremonien er imidlertid ligeværdige; selvfølelsen, intelligentsen og suggestibiliteten er individuelt forskjellig hos dem alle. Den enes kopi af shamanens exstase er bedre end den andens; og de gode efterlignere kommer i intensere rapport med sin helt end den daarligere. Naar nu de samme artikulerede lyd reproduceres af flere, indprentes de desto kraftigere ikke blot hos vedkommende personer selv, men ogsaa hos den store mængde af de øvrige deltagere; og naar disse mennesker gjentagne gange hører de samme lyd i forbindelse med den samme situation, ekforeres, for hver gang de hører lyden, hele den tidligere situation med flere eller færre detaljer, selv om de i det givne øieblik ikke oplever andet end hørselen af de betræffende lyd — altsaa ganske uafhængigt af den for øieblikket foreliggende situation.

¹ S. 29.

De betræffende artikulerede lyd bliver saaledes for vedkommende kreds i og for sig tilstrækkelige til at betegne affektens hele symptom-komplex og videre den hele fase i ceremonien. Nu maa man vel erindre, at mentaliteten i den heromhandlede epoke (ialfald i den ældste tid) endnu er helt prælogisk; og artikulerede lyd eller lydgrupper kan derfor, som ovenfor fremhævet, ikke paa denne tid betegne noget definerbart begreb, men blot en sansning eller mangel paa en saadan, eller en lyst- eller ulyst-betonet stemning, f. eks. udtryk for haab eller frygt, velvilje eller had, hvortil der da allerede temmelig tidlig slutter sig navnegivning baade paa personer og gjenstande; og for tilfredsstillelsen af dette behov tiltrænges kun faa artikulerede lyd og kun et ringe antal ord.

Imidlertid tilveiebringes efterhaanden en mere inderlig rapport mellem shamanen og en engere kreds inden stammen; og har man nu til raadighed et nogenlunde brugbart gebærdesprog, vil denne rapport fremtvinge et voxende krav til en noget mere specificeret betydning af de foreliggende ord samt til optagelse af nye saadanne til betegnelse for en række andre forestillinger; og resultatet vil under de følgende kultiske ceremonier indprentes de øvrige deltagere.

Samtidigt med at samfundets organisation skrider frem, voxer shamanens autoritet og magt, og herunder stilles nye krav baade til gebærdesproget og til det artikulerede lydsprog.

Begge disse faktorer maa antages i et overmaade langt tidsrum at have udgjort nødvendige bestanddele af det sproglige meddelelsesmiddel. I begyndelsen har de artikulerede lyd spillet en underordnet rolle; men deres betydenhed har stadig voxet. Langt ned i den totemistiske tid har dog de sekundære gebærder været aldeles uundværlige; thi alene ved dem har man kunnet betegne en række overmaade vigtige forhold, saasom bevægelse og hvile, bevægelsens retning og hurtighed, størrelse og antal, stigen og falden o. s. v.

Af de anførte grunde anser vi os berettigede til at antage, at der allerede i den animistiske tid — og naturligvis saa meget mere i den totemistiske — har foreligget et sprogligt meddelelsesmiddel tilstrækkelig fuldkomment til, at den rapport mellem shamanen og hans adepter, som er en nødvendig forudsætning for den affektive glossolali, har kunnet komme istand; og medgives denne antagelses rimelighed, maa det formentlig indrømmes, at den affektive glossolali kan have spillet en væsentlig rolle ved det artikulerede sprogs opkomst; men det maa vistnok antages, at datidens affektive glossolali har haft en noget anden karakter end nutidens, eftersom der — ialfald i den animistiske tids tidligere epoker — neppe har foreligget

mulighed for frembringelsen af andre artikulationer end de aller letteste, det vil sige, de som dannes i mundhulhedens forreste partier.

Til spørgsmaalet om forklaringen af de vanskelig artikulerbare lyds forekomst under glossolalien kommer vi strax nærmere tilbage.

Vi skal derefter gaa over til omtalen af den psykopathiske sprogdannelse under affektfrie intervaller.

Under flere sindslidelser indtræder der ogsaa under relativ ro uden bevidsthedsomtaagning faser, i hvilke patienten beherskes af trang til at snakke, særligt til uafledeligt at gjentage enkelte ord eller korte sætninger, hyppigst meningsløse ramser, i hvilke der ofte optages enkelte omdannede eller helt nydannede ord (verbigeration)¹; og ikke sjelden kastes ordene om hverandre i kaotisk uorden (ordsalat).

De omdannede eller nydannede ord er dels lavede for leiligheden og strax forglemte, dels er de fæstede i erindringen og stadigt gjentagne. I sidste fald kan de af patienten tillægges betydning og optræde i saavidt stor mængde, at der indtræder inaffektiv glossolali. Ikke sjelden tror baade patienten selv², at glossolalien (saavel den affektive som den inaffektive) er et virkeligt eksisterende sprog f. ex. hebraisk, kinesisk, tysk eller engelsk, og giver den navn efter dette sprog.

Hyppigst forefindes dette fænomen under paranoid dements, men det kan ogsaa optræde under andre tilstande. Grunden hertil er efter vor opfatning ikke vanskelig at forstaa.

Som ovenfor bemærket begunstiger den prælogiske mentalitet i og for sig udviklingen af glossolali, og den paranoide dements udmærker sig netop fremfor de øvrige sindssygdomme ved denne mentalitet; og hertil kommer, at glossolali let og naturligt indføies i denne sygdoms hele symptomkomplex. Disse syge beherskes nemlig af vrangforestillinger om at være miskjendte eller forfulgte storheder. Forfølgelsen tænkes hyppigst iscenesat ved forskellige mystiske overnaturlige midler og paavirkninger, og storhedsidéerne er sammenvævede med religiøse og seksuelle forestillinger samt begjær. De syge er profeter, Guds store talsmænd paa jorden, eller de er ialfald overmennesker, der venter paa sin storhedstid. I almindelighed er de ogsaa hallucinerede, navnlig for hørselen.

Til brug for formuleringen af sine vrangforestillinger trænger de et ordforraad, som de ikke forefinder i noget kjendt sprog, fordi de normale

¹ EVENSEN meddeler i sin bog „Dementia præcox“ s. 116 exemplar paa saadanne ramser.

² Tildels ogsaa hans omgivelser.

mennesker ikke har brug for dem, eftersom de ikke kjender de paranoide idéer, for hvilke de skal give udtryk. Hertil kommer, at klangassociationer, drømmebilleder og de ovennævnte pinlige erindringskomplekser hos disse patienter oftest spiller en ganske anden fremtrædende rolle end hos normale mennesker. Navnlig er drømmene af stor betydning, og disse syge er derfor hyppig tilbøielige til at sætte drømte artikulerede lyd i forbindelse med de substantser, som har interesse for deres vrangforestillinger; og isaafald vil de efter opvaagningen kunne give disse navn.

Den inaffektive glossolali har, som bemærket, en anden karakter end den affektive. Den er intet affekt-fænomen, dens ordforraad er (i det mindste for en væsentlig del) tilveiebragt under psykisk ro. Patienten vil derfor selv tillægge vedkommende ord en betydning og behøver altsaa ingen tolk. Da der ikke handles om blotte krampelyd, men ialfald for en meget væsentlig del om viliede bevidste artikulationer, vil han kunne benytte enhver saadan, som han formaar at frembringe; og fra sit modersmaal har han jo tilegnet sig en hel række saadanne, hvoriblandt kanske mange meget vanskelige. Det er ogsaa et vistnok ikke sjældent forekommende træk, at disse patienter med en vis forkjærlighed vælger de vanskeligste af disse, hvilket vel har sin naturlige forklaring i deres forhøiede selvfølelse.

Endelig finder man under den heromhandlede glossolali ikke blot de rhythmiske artikulationer, som karakteriserer den rene affektive, men selvstændige ord af forskellige ordklasser, som efter mønster af vedkommendes modersmaal er grammatisk sammenføjede i sætninger.

Der lader sig dog som bemærket ikke optrække nogen skarp grænse mellem de to former af glossolali. Den paranoid demente profet kommer nemlig let i affekt, under hvilken der kan indtræde affektiv glossolali; og de under en saadan dannede ord kan, naar tolken har forklaret dem, anvendes ved et paafølgende inaffektivt sproglaveri, og omvendt kan der i en affektiv glossolali indkomme forskellige ord, som allerede foreligger færdigdannede fra den inaffektive, f. ex. paa grundlag af drømmebilleder eller pinlige erindringskomplekser. Vi har til belysning af dette forhold i den ovenskildrede scene ogsaa indflettet det heromhandlede fænomen.

Den inaffektive glossolali kan, som bemærket efter vor mening vistnok ikke tillægges saa stor betydning for den oprindelige sprogdannelse som den affektive; men vi mener ikke destomindre, at den under studiet af sprogets oprindelse ingenlunde bør lades ud af betragtning, men tvertimod har krav paa megen opmærksomhed. For det første vil nemlig en

nærmere indtrængen i dens væsen kunne kaste lys over den prælogiske analogislutnings mekanisme; og denne har utvilsomt spillet en vigtig rolle, navnlig i semasiologisk henseende, men ogsaa med hensyn til den lydlige sammenglidning af forskellige ord; og for det andet bør man neppe frakjende den inaffektive glossolali en væsentlig indflydelse paa selve orddannelsen — om ikke i den aller ældste tid saa dog paa et protoglossisk udviklingstrin eller ialfald paa et stadium, der ligger forud for det, som repræsenteres af de mest primitive af de eksisterende sprog; og navnlig maa det nævnes som høist rimeligt, at drømme har øvet en stor indflydelse.

Naar man da stiller sig spørgsmaalet om, hvorvidt den inaffektive glossolali, som vi forefinder hos vor tids paranoid demente, har interesse for studiet af den oprindelige sprogdannelse, maa man holde sig for øie, at disse patienters mentalitet i væsentlig henseende er den samme som de primitive stammers, og det maa derfor paa forhaand synes rimeligt, at studiet af den maade, hvorpaa disse under affektfrie tilstande tilveiebringer det for deres behov nødvendige ordforraad, vil være oplysende for forstaaelsen af de primitive stammers orddannelse; thi menneskenes anatomiske og fysiologiske betingelser for sprogdannelsen har jo i menneskehedens ældste tid været væsentlig den samme som i nutiden, og naar dertil kommer en væsentlig lighed i mentaliteten, maa efter vort skøn visse analogislutninger være berettigede — selvfølgelig under skarp kritik; og ogsaa fra lingvistisk hold har det jo i den nyere tid med styrke været fremholdt, at man i den maade, hvorpaa nutidens sprogudvikling foregaar, maa søge oplysninger om fortidens — og vice versa.

Vi mener, at berettigelsen af saadanne analogislutninger strækker sig et godt stykke udenfor det felt, hvor affekter og gebærder kommer i afgjørende betragtning.

Vi skal med nogle eksempler søge at belyse det ovenfor udviklede angaaende glossolaliens væsen og blandt disse først omtale tre tilfælde blandt Gaustad sindssygeasyls patienter, af hvilke de to første gjælder paranoid demente, hvis glossolali ansees som inaffektiv, og det tredje en hysteriker, hvis glossolali opfattes som affektiv.

No. 1, som er en 52 aar gammel mand, der lider af den fantastiske form af paranoid dements, og hos hvem tendentsen til substantiation er stærkt fremtrædende, forklarer, at han har følgende indretninger i sin hjerne: navnetavlen, der ogsaa kaldes kaasjetten, salæren, spirallen, fisken, de dobbelte symboler og kontakten. Navnetavlen, der er et redskab, som kan aabnes og lukkes, har forskellige »afsorteringer« med hvert fag for sig selv, en for lægevidenskab, en for sprogvidenskab og en for retsvidenskab,

hvilken sidste indeholder retsbogen. Navnetavlen blev lavet færdig i et laboratorium og af Moses og Kalip, to tjenere i forgaarden, og afleveret til ham. Salæren er selve videnskaben; den er et høiere væsen, som alene betroes de høiere mænd, og er meget større end oplysningen. Den indbefatter navnetavlen og hele igangsætningen — det hører jo med til videnskaben alt sammen; den er liv og magt, den »funskjerer« og redegjør for de forskjellige fag, som for tiden fordres og skal redegjøres for. Spirallen er noget levende og eier legioner af begreber. Fisken skaffer tanker og alt det, man trænger til i ethvert fag, hvad enten det er noget materielt eller høiere videnskab. Man maa jo tænke for at faa helhed i sin færdiggjørelse.

De dobbelte symboler er et kostbart metal, forarbejdet efter forskjellige mønstre og modeller; de indeholder magt og liv.

Kontakten er lederen til talen, det som dirigerer talen.

Patienten er ogsaa i besiddelse af flere instrumenter til at rense hjernen og befri den for overflødige ting. Et af disse instrumenter kaldes kise, som er et slags »lurerør«; men hvorfor dette instrument bærer dette navn, kan han ikke oplyse.

Uagtet patienten er i besiddelse af alle disse herligheder, er han dog for tiden en mangelfuld mand. Han har nemlig længe maattet undvære og savner fremdeles drivkraften, og denne er ligesaa nødvendig som navnetavlen og salæren; men nu faar han snart denne kraft tilbage, og da skal han holde regnskab.

Som man ser, er denne patients mentalitet prælogisk med tilbøielighed til inaffektiv glossolali, uden at dog denne er naaet udover begyndelsesstadiet. Det meste af hans særegne ordforraad er hentet fra hans modersmaal eller andre kjendte sprog, dog saaledes at ordene er givet en ganske ny betydning; men han laver ogsaa helt nye ord som »kaasjetten« og »kisen«. De nydannede ord tilhører en bestemt ordklasse (substantiver); og enkelte af dem f. ex. »navnetavlen« og »kaasjetten« er synonymer. Artikulationerne er hverken særlig lette eller meget vanskelige. Bevidstheden har under glossolalien ikke været omtaaget.

No. 2 er en af asyllets tidligere patienter, der ved indkomsten i 1898 var ca. 48 aar gammel. Han led af paranoid dements og var religionsstifter og profet.

Han var inaffektiv glossolal og hentede den væsentligste del af sit særegne ordforraad fra eksisterende sprog, hvis ord han dog omdannede i saadan grad, at de neppe var gjenkjendelige. Han kaldte sin glossolali: »hebraisk«.

Patienten har meddelt oplysninger om nogle af sine glossolali-ord, og det synes efter disse utvilsomt, at lydassociationer har spillet en væsentlig rolle ved deres dannelse.

F. ex. »Asken risken sparhala« betyder: Er det noget du vil, saa spørg ifra. »Nu psitnig va«: Hvad siger De nu? »Su son poil«: saadan som de pleier. »Jehova lava«: den som har lavet sig selv.

Patienten havde en teori om, at ordene har mange forskellige »vendinger« eller »overgange«, saaledes at det samme ord efterhaanden kan antage en meget forskjellig lydelse og form, uden at dets betydning forandres.

Da han engang brugte ordet »spero« og spurgtes om dettes betydning, svarede han: spir eller opretstaaende pind. Han oplyste derhos, at dette ords vendinger er følgende: »spero, sperso, sperizzo, sperozzovan, sperizzivarava, sperizzivagivensiva«. — Sperizzi opsi ve betyder: Opreist ved, træ, pind; og sperizzi pautse: opret er, sperizzi beso er: en pind som opret er.

»Det kan tages ad mange linjer«, bemærker patienten.

Spurgt: Hvad heder bog paa hebraisk? svarer han: Der er lidet bøger paa hebraisk, bare Talmud, men den er ikke hebraisk, men et slags græsk; det hebraiske er som udglemt. I Syd-Frankrig og Glasgow har jeg fundet lighed med hebraiske udtryk i sproget. Bog heder batabaru i en sprog vending. Efter min mening varierer sproget og gaar i en bestemt retning en tid. Bog heder i en anden vending batabeiravaro. Der eksisterer mange flere vendinger, i det hele 2021. Det ligger i en vis linje.

Spurgt om overgangen fra bog til batabaru svarer han: Da maa vi gaa oversættelsens vei. Bog: bottrumkerum {(strax over i hebraisken), botruvikonikebo, botrivaruke, batabaru, bog, baklakalavala. Overgangen er i 5 led, men patienten vil nu ikke lære lægen det.

»For at prøve patienten« lavede asyllægen ordet »atabaska«, hvilket skulde betyde »God morgen«, og hilste patienten med dette ord. Denne blev meget fornærmet og lod sig forlyde med, at ordet »atabaska« paa hebraisk betyder: »Din fordømte djævel«.

Her foreligger en inaffektiv glossolali paa et mere fremskredet stadium end den foregaaende patients; og benyttelsen af det nationale sprogstof synes at være mindre. Ordene tilhører ordklasser og er grammatisk sammenføjede. Tilbøieligheden til at danne synonymer, varianter og udvidelser er meget fremtrædende, og artikulationerne er tildels vanskelige.

No. 3 er en 56 aar gammel mand, der behandles under diagnosen »Insania hysterica«, og hvis glossolali jeg ligesom asylts læger opfatter som affektiv¹.

Pat., der er født 1861, indkom den 11te April 1910 i asylet, hvor han fremdeles behandles. Han har siden guttedagene masturberet og siden 14-aarsalderen været nevrasthenisk. Fra omkring 1887 har han lidt af astasi-abasi² og fra 1900 af tvangsbevægelser. Han skal allerede i barndommen have lidt af agorafobi, og ved indkomsten oplyses det, at patienten lider af hypochondri med angst og tilbøielighed til skrig. Han har desuden ved klar bevidsthed rykninger saavel i ansigtet som lemmernes muskulatur (tvangsbevægelser). Han forklarer selv, at han i vaagen tilstand med lukkede øine ser forskellige »drømebilleder«, som han dog skjønner er »Unsinn«; derimod benægter han at lide af tvangstanker og mener, at hans sygdom er en ny og ukjendt hjernesygdom. Han siger, at han er fuldstændig ødelagt, og at der ikke findes noget lægemiddel, som kan bedre eller lindre ham.

Pat. maa efter min opfatning ansees som en debil hysteriker, der er bleven staaende paa et infantilt udviklingstrin. Saadanne patienters mentalitet pleier at udmærke sig ved prælogiske træk³, og saa er ogsaa efter min mening tilfælde med nærværende patient, skjønt den langt fra er saa udpræget som hos de netop omtalte syge.

Den 5te August 1911 er der for første gang noteret glossolali hos patienten. Han gjentog flere gange: Massika, massika, massika; rassika, rassika, rassika; senere »Manja, manja, manja«; »Jaggi, jaggi, jaggi« og »Dia, dia, dia«. Han forklarede, at han ikke kunde lade være at udtale disse ord, »de er den rene tungetale«.

Den 30te December 1913 klagede han over, at der uforvarende kom stygge ord i hans mund, og nævnte som eksempel: »Allaballa maiosis«, som han ustanselig havde maattet gjentage. Foranlediget ved lægens bemærkning om, at disse ord ikke var »stygge« (obscone), raabte han: »Pikkimaia, pikkimaia«⁴.

Den 11te Febr. 1914 bemærkede patienten, at hans tungetale lignede madagaskisk.

¹ Skjønt den neppe altid fremkaldes ved akut affekt.

² En patologisk forandring af evnen til at staa og gaa, hvilken forekommer under hysteri.

³ Som ovenfor bemærket er infantilitet (primordialt betinget puerilisme) og prælogisk mentalitet samhørende fænomener.

⁴ Skal maaske være: »Pik (penis) i Maia«. Pat. opgiver som skolegut at have næret erotisk tilbøielighed for en Maja.

I 1916 er noteret følgende glossolalier:

I. Pinga pissiosis, pissavoia, pissis. Maski askimiliosis, amagajusis, pinga amagaia. Begannu begimu amazjoba omaga iskimilioli. Viskivasji begumaia uskimoba pissis.

II. Maski asimiliosis agamajusis pinga Malagaia pissiosis pissis Askamajoba beggi mo viskivasji beggemaia pissis pinga.

Ordfordelingen er dels foretaget af ham selv¹, dels af en af lægerne, og ifølge denne indeholder stykke I 19 og stykke II 14 ord; men da de samme ord forekommer i begge stykker og er brugt flere gange, og da flere af dem vistnok bør opfattes som varianter (udvidelser) af det samme ord, f. ex. »pissavoia« og »pissiosis« af »pissis« og atter andre kan være samme ord, som blot er feilhort eller misopfattet, kan man neppe sætte det samlede antal ord høiere end til 20; rimeligvis bør det ansættes lavere.

Efterat jeg havde lært stykke I udenad, tiltalte jeg patienten med dette. Han gjenkjendte strax sine ord og bemærkede, at intet af disse havde nogensomhelst betydning, de var alle blotte krampelyd, som kom paa samme maade som hans andre kræmper, særlig som kjævekrampen, og som han lige-saalidt som de øvrige kræmper kunde tilbageholde. Det var for øvrigt ikke blot de meningsløse ord, der kom som kræmper; ofte kom ogsaa paa samme maade virkelige ord fra vort modersmaal. Naar han er fri for andre kræmper, kommer heller ikke de meningsløse ord. Disse er det rene »Unsinn« og »galskab«. Pat. besidder altsaa evnen „*γέννη γλωσσῶν*“, men ikke „*ἐρμηνεία γλωσσῶν*“.

Gjort opmærksom paa, at stavelserne maia forekommer i hans ord, og spurgt, om disse hentyder til hans veninde Maia, paastod han bestemt, at der ingen sammenhæng i saa henseende foreligger.

Bevidstheden har under de iagttagne glossolalier ikke været omtaaget; og patienten har i asylet ikke haft leilighed til at erholde nogen fortolker.

Som man vil bemærke, forekommer der mange s-lyd, men artikulationerne er ikke særlig vanskelige.

Spørgsmaalet om, hvorvidt der her foreligger særskilte ord, og om disse tilhører forskellige ordklasser og er grammatikalsk forbundne, lader sig ikke afgjøre paa grundlag af de foreliggende oplysninger, men maaske løse ved en psykanalytisk undersøgelse².

¹ Asylet oplyser, at patienten selv ved flere leiligheder paa opfordring har nedskrevet sin glossolali.

² Jeg finder det i ethvert fald sandsynligt, at pinlige komplekser har væsentlig betydning for hans glossolali.

I tilslutning til foranstaaende tilfælde skal jeg kortelig omtale et forsøg paa en psykanalytisk undersøgelse af den religiøse glossolali.

En prest i Zürich, dr. Oskar Pfister, har i en afhandling: »Die psychologische Enträtselung der religiösen Glossolie und automatischen Kryptographie«¹ redegjort for en psykanalytisk undersøgelse af 4 individer tilhørende samme familjekreds, nemlig en moder med søn og datter samt en veninde, alle religiøse glossolaler. Sønnen, der var 24 aar gammel, blev gjentagne gange undersøgt og synes herunder at have givet aabenhjertige forklaringer; de andre blev kun undersøgt en enkelt gang. Vi skal her gengive den ene af denne patients glossolalier.

Esin gut efflorien meinosgat schinohaz daheit wenesgut när wossalaitsch enogaz to lorden hat wuschenehat menofeite lor; si wophantes menelör gut menofeit hi so met dä lör.

Paa grundlag af det ved undersøgelsen vundne resultat hævder PFISTER den opfatning, at pinlige komplekser spiller en afgjørende rolle for den affektive glossolalis² genese, og at denne er at opfatte som en automatisk aflastning af det pinlige kompleks. Paa grundlag af denne hypotese mener han efter den psykanalytiske undersøgelse at kunne udlede følgende mening af ovenstaaende glossolali:

»Du besitzest die nötigen religiösen, sittlichen und intellektuellen Eigenschaften um mit Gottes Hilfe trotz Verfolgung und Missgeschick Prediger werden zu können.«

Denne tydning er vistnok temmelig problematisk, og jeg har heller ikke indtaget optegnelsen som et eksempel paa en dechiffreret glossolali, men kun som en prøve paa den glossolale artikulation.

Patienten forstod ikke selve glossolaliens mening, før efterat psykanalysen var tilendebragt.

Angaaende undersøgelsen henvises til PFISTERS afhandling.

Glossolalien, og særlig dens affektive form, har efter vor mening en stor og mangesidig interesse; men den har ikke været ofret en opmærksomhed, som staar i forhold til dens betydenhed. Baade psykiatrien, religionsvidenskaben, folkepsykologien og sprogvidenskaben vil kunne vente berigelse ved et nærmere studium af dette sprogfænomen; men et saadant studium vil kræve samarbejde mellem forskellige videnskabsgrene.

PFISTERS hypotese om den religiøse glossolalis genese fortjener efter min mening opmærksomhed; men jeg vil ikke have udtalt nogen mening

¹ Jahrbuch für psychoanalytische und psychopathologische Forschungen III Band (1912).

² PFISTER bruger ordet glossolali udelukkende som betegnelse for den affektive form.

om, hvor langt den vil føre frem, ligesaa lidt som om de anvendte undersøgelsesmethoders berettigelse.

Det har selvfølgelig ikke været hensigten med dette lille arbejde at give en oversigt over vort nuværende kjendskab til de psykopathiske sprogfænomener eller særlig til den religiøse glossolali; og for et saadant øiemed vilde ogsaa de meddelte prøver have været mindre tilfredsstillende. Ingen af dem er optagne med lydskrift, og ved deres optegnelse er der — maaske med undtagelse af Pfisters tilfælde¹ — ikke øvet synderlig kritik under arbeidet med glossolaliens opdeling i ord.

Naar vi ikke desto mindre har indtaget disse prøver, er det ene og alene skeet i den hensigt at henlede opmærksomheden paa spørgsmaalet om glossolaliens interesse for studiet af sprogets oprindelse, og for dette specielle øiemed forekommer de meddelte prøver os at have interesse.

V.

Vi skal til slutning give en kort oversigt over den ovenfor udviklede opfattelse. Menneskearterne var allerede paa den tid, da deres første samfundsmæssige organisation kom istand, i besiddelse af et meddelelsesmiddel af en fuldkommnere beskaffenhed end noget andet dyrs. Dette meddelelsesmiddel bestod af efterligninger af affektbevægelser, det er primære gebærder, dels (og vel hovedsagelig) lydløse — mimik og gestus — altsaa paavirkninger paa synet —, dels lydende — forskellige modulationer af skriget — altsaa paavirkninger paa hørselen.

Erhvervelsen af den opreiste gang frigjør hænderne for deltagelse i gangen og muliggjør derved deres anvendelse til frembringelsen af sekundære gebærder; og eftersom disse udvikledes, dannedes der efterhaanden et gebærdesprog. Hermed var man allerede naaet langt udover det kulturtrin, der er bestemt af det oprindelige meddelelsesmiddel.

Saasnart artikulationen forelaa, indtraadte der under affektskrigene spontant artikulerede lyd, og disse blev efterhaanden efterlignede paa samme maade som affektskrigene.

I skridt med udviklingen af de sekundære gebærder gik ogsaa artikulationens fuldkommengjørelse, og de artikulerede lyd fik herunder en stadig stigende betydenhed som understøttelsesmiddel for gebærdesproget.

Paa et meget tidligt udviklingstrin af den menneskelige samfundsorganisation er navnegivning nødvendig, og for denne er artikulerede lyd en forudsætning. Naar nu disse lyd først har faaet anvendelse for navne-

¹ Pfister var opmærksom paa denne vanskelighed.

givningen, vil deres overlegenhed over gebærderne snart gøre sig gjældende ogsaa paa andre omraader.

Til at begynde med raader man vistnok kun over de artikulerede lyd, som dannes i mundhulhedens forreste partier, men disse er tilstrækkelige til at tilveiebringe et for primitive forhold brugbart lydsprog, ialfald som støtte for gebærdesproget; og eftersom de vanskeligere artikulationer kommer til, bliver det selvfølgelig mere fuldkomment og selvstændigt.

Det udviklingstrin, da artikulerede lyd begynder at faa sproglig værdi, maa af de forskellige stammer være naaet i meget forskellige udviklings-epoker, som vel maa antages at falde indenfor den animistiske periode, men som alligevel kan være adskilte ved mange aarhundreder. Det er ikke antageligt, at mere end et meget ringe antal af de heromhandlede primitive stammer er komne i indbyrdes berørelse med hverandre, og det er derfor — naar bortsees fra interjektioner og onomatopoietiske ord — høist usandsynligt, at de i nogen større udstrækning har benyttet de samme artikulerede lyd som betegnelse for de samme ting. Noget oprindeligt sprogfællesskab kan saaledes ikke antages at have eksisteret.

Erhvervelsen af det artikulerede lydsprog er, som alle andre store fremskridt, betalt meget dyrt, nemlig med opgivelsen af kravet paa umiddelbar forstaaelighed; og ombyttet af et selvforstaaeligt meddelelsesmiddel som det primitive gebærdesprog med et andet, som maa læres, før det kan bruges, har ikke kunnet finde sted uden efter aartusinders kampe og kompromisser.

Først lidt efter lidt har det artikulerede lydsprog vundet det udelte herredømme; og dette resultat er utvilsomt ikke naaet, før lang tid efter, at det protoglossiske stadium allerede tilhørte en svunden tid, om hvilken traditionen intet minde har overleveret.

Det artikulerede sprogs afgjørende seir over gebærdesproget er formentlig vunden i og med, at tegnegebærderne fæstes paa et varigt underlag, med andre ord i og med at vedkommende mennesker har begyndt at tegne — det første skridt til dannelsen af skrift. Det tør saaledes antages, at skriftsproget og det artikulerede lydsprog allerede fra første tid har udviklet sig i skridt med hinanden.

Hele den heromhandlede proces spiller af under en udviklingsfase, da mentaliteten endnu staar paa et tidligt prælogisk standpunkt, og der kan følgelig paa denne tid endnu ikke foreligge betingelser for dannelsen af begreber og saaledes heller ikke for ord med begrebsmæssig betydning.

Vi har stillet os spørgsmaalet om, hvorvidt den maade, paa hvilken nogle sindslidende i vor tid tilfredsstiller sine særegne sproglige behov, har interesse for studiet af de ældste menneskearters oprindelige sprog-

dannelse; og vi har besvaret dette spørgsmaal bekræftende. Vi har til begrundelse af vor opfatning henvist til den omstændighed, at mentaliteten hos de sindssyge, om hvilke her er tale, gaar mere eller mindre langt tilbage i det prælogiske stadium, og vi har tillagt dette forhold stor betydning. Naar nemlig paa den ene side de anatomiske samt fysiologiske betingelser for sprogdannelsen og paa den anden mentaliteten er væsentlig de samme, maa man kunne hævde berettigelsen af visse analogislutninger — selvfølgelig under iagttagelse af skarp kritik; og det vi fortiden kjender til den psykopathiske sprogdannelse, giver haab om, at et fortsat studium vil bringe udbytte. Vi mener, at den affektive glossolali er af særlig stor interesse for vort emne, navnlig fordi der under denne som en spontan virkning af affektkramper forekommer artikulerede lyd, uden at den, som frembringer dem, selv tillægger dem en bestemt sproglig betydning. Denne faar de først ved indgriben af en anden person, tolken, og det er samarbeidet mellem disse to (i hvilket efterhaanden en større eller mindre kreds drages ind), som gjør de betræffende artikulerede lyd til et sprogligt meddelelsesmiddel.

Dette samarbeide forudsætter selvfølgelig tilværelsen af et sprogligt meddelelsesmiddel, som kredsens medlemmer iforveien behersker, og er altsaa betinget af en situation, som endnu ikke kunde foreligge, dengang det ældste sproglige meddelelsesmiddel blev skabt. Dette forhold gjør ganske vist en meget stor forskjel mellem overgangstiden fra dyreliv til menneskeliv og tiden, efterat samfundet allerede var begyndt at organisere sig; men den umuliggjør efter vor mening ikke en sammenligning mellem den forhistoriske tids sprogdannelse og den historiske tids glossolali. Allerede i den ældste animistiske tid maa man have haft shamaner, som beherskede et forholdsvis langt udviklet gebærdesprog; og muligheden af en ikke blot helt elementær meddelelse mellem shamanen og stammens øvrige medlemmer maa antages at have foreligget allerede paa en tid, da artikulerede lyd endnu ikke spillede nogen afgjørende rolle som meddelelsesmiddel. Eftersom behovene for artikulerede lyd indstillede sig, blev de utvilsomt under shamanernes ledelse lidt efter lidt tilfredsstillede. Da nu ikke alle stammers medlemmer var ligeværdige, maatte rapporten mellem shamanen og nogle faa — maaske kun en enkelt — af stammens medlemmer blive af en langt intimere art end mellem ham og de øvrige. Der maatte da komme istand et forhold af væsentlig samme art som det, der i historisk tid har hersket mellem den affektive glossolali og hans tolk.

Vi anser os derfor berettigede til at studere nutidens affektive glossolali i hensigt at søge oplysning om de forhold, som bragte vore ældste forfædre til at tillægge artikulerede lyd sproglig betydning eller — ander-

ledes udtrykt — for at søge vejledning til løsning af den store gaade om sprogets oprindelse. Den inaffektive glossolali har efter vor mening ikke saa stor værdi for studiet af sprogets oprindelse som den affektive; men det er dog ingenlunde uden betydenhed for dette studium. Denne form af glossolali forudsætter jo tilstedeværelsen af et til en vis grad udviklet artikuleret sprog, om end maaske ikke et saavidt fuldkomment som det, der repræsenteres af nutidens mest primitive sprog; og naar først dette udviklingstrin er naaet, foreligger der, saavidt skjønnes, betingelser for processer, som navnlig i semasiologisk henseende har betydelig interesse, og som tillige fortjener at paaagtes under studet af betingelserne for ordenes lydliges sammenglidning.

Den psykopathiske orddannelse har ingenlunde alene interesse for studiet af problemet om sprogets oprindelse. Glossolalien og de primitive sprog belyser hinanden gjensidigt, og studiet af dem begge bør derfor drives i sammenhæng; men ogsaa børnesproget og de døvstummes sprog bør inddrages i denne sammenhæng.

Lægger man dette studium tilstrækkelig bredt an, vil det kunne give et udbytte, som peger udover problemet om sprogets oprindelse og giver vigtige oplysninger angaaende grammatiske, specielt syntaktiske spørgsmaal.

Hele det heromhandlede studium er efter vor opfatning et nødvendigt led i den fundamentale integration, som skal grundmure fremtidens samfund.

BERECHNUNG ALLER LÖSUNGEN
GEWISSER GLEICHUNGEN VON DER FORM

$$ax^r - by^r = f$$

VON
AXEL THUE

Rettelse:

S. 19 L. 10 f. o.: Resultaterne skal være: Resultanten.

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1919

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 21de sept. 1917.

In zwei früheren Arbeiten¹ habe ich folgendes Theorem bewiesen:

Bedeutet c eine beliebig gegebene positive GröÙe, und $F(x)$ eine beliebig gegebene ganze Funktion von x vom Grade r , und zwar mit solchen ganzen Koeffizienten, daÙ die Funktion irreduktibel wird, dann kann man immer, wenn $r > 2$, eine so groÙe GröÙe N konstruieren, daÙ die Relation

$$\left| q^r F\left(\frac{p}{q}\right) \right| < c \quad \dots (1)$$

nicht zwei verschiedene Lösungen in ganzen Zahlen p und q , deren absoluten Beträge größer als N sind, besitzen kann.

Die Relation (1) hat dann entweder keine oder höchstens nur eine einzige Lösung, bei welcher die absoluten Beträge der Zahlen p und q größer als N sind.

Spezialfälle des erwähnten Theorems habe ich in drei anderen Arbeiten behandelt².

In den zitierten Abhandlungen habe ich nicht in dem Beweise des genannten Theorems, was indessen leicht wäre, einen expliziten Ausdruck für die Grenze N aufgestellt.

Nach dem gezeigten Beweise kann man das Theorem auch folgendermaßen redigieren:

Ist es gelungen, eine Lösung der Relation (1), in welcher die absoluten Beträge der ganzen Zahlen p und q größer sind als eine gewisse bestimmbare Grenze M , zu finden, dann kann man dadurch alle Lösungen

¹ I. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 135.)

II. Om en generel i store hele tal ulosbar ligning. (Kristiania Vid.-Selsk. Skr. 1908. No. 7.)

² III. Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzer Funktionen. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 138.)

IV. Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. (Kristiania Vid. Selsk. Skr. 1908. No. 3.)

V. Über rationale Annäherungswerte der reellen Wurzeln der ganzen Funktion dritten Grades $x^3 - ax + b$. (Kristiania Vid.-Selsk. Skr. 1908. No. 6.)

der Relation (1) berechnen. Aus der genannten Lösung kann man nämlich eine solche GröÙe N bestimmen, daÙ die absoluten Beträge von p und q in jeder Lösung von (1) kleiner als N sein müssen.

Wir werden dies durch ein Beispiel, was ja hinreichend ist, zeigen.

Wir betrachten die Relation

$$|ap^r - bq^r| \leq c \quad \dots (2)$$

wo a, b, p, q, r positive ganze Zahlen, und c eine positive GröÙe bedeuten.

Schreibt man für jedes z , und für jede ganze positive Zahl n :

$$U_n(z) =$$

$$z^n + \binom{n}{1} \frac{rn+1}{r-1} z^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} \frac{(rn+1)(r[n-1]+1) \dots (r[n-k+1]+1)}{(r-1)(2r-1) \dots (kr-1)} z^{n-k} + \dots$$

$$W_n(z) =$$

$$1 + \binom{n}{1} \frac{rn+1}{r-1} z + \dots + \binom{n}{k} \frac{(rn+1)(r[n-1]+1) \dots (r[n-k+1]+1)}{(r-1)(2r-1) \dots (kr-1)} z^k + \dots$$

so existiert eine solche ganze Funktion $R_n(x)$ vom Grade $(r-2)n$ in x , und mit positiven Koeffizienten, daÙ

$$xU_n(x^r) - W_n(x^r) = (x-1)^{2n+1} R_n(x) \quad \dots (3)$$

Ferner wird

$$W_{n+1}(z) U_n(z) - W_n(z) U_{n+1}(z) = 2 \frac{(r+1)(2r+1) \dots (nr+1)}{(r-1)(2r-1) \dots ((n+1)r-1)} (z-1)^{2n+1} \dots (4)$$

$$U_n(1) = W_n(1) \leq 4^n \quad \dots (5)$$

$$R_n(1) \leq \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}, \quad r \geq 2 \quad \dots (6)$$

Ist r eine Primzahl, so existiert endlich eine solche ganze Zahl

$$T_n < r^{\frac{r}{r-1}n} \quad \dots (7)$$

daÙ sämtliche Koeffizienten in $T_n \cdot U_n(z)$ und $T_n \cdot W_n(z)$ ganze Zahlen werden¹.

Wir setzen nun in (3)

$$z = x^r - \frac{A}{B}$$

¹ Siehe die erwähnte Abhandlung IV, Pag. 11, 15, 18, 20, 21, 24, 25. Viele Druckfehler haben sich leider hier eingeschlichen, z. B. in Formel (27): $rn+1$ in dem Nenner statt $2n+1$, ferner Pag. 22: $r(a+cq^y)+1$, $(ra+1)+cq^y$, $r[a+m-1]+1$, $a-b$ statt beziehungsweise $r(a+cq^y)+b$, $(ra+b)+cq^y$, $r[a+m-1]+b$, $a-1$ usw.

wo A und B solche beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, daß z. B.

$$A > B$$

Wir erhalten dann die Gleichung

$$\begin{aligned} & \sqrt[r]{A} \left[A^n + \binom{n}{1} \frac{rn+1}{r-1} B A^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} \frac{(rn+1)(r[n-1]+1)\dots(r[n-k+1]+1)}{(r-1)(2r-1)\dots(kr-1)} B^k A^{n-k} + \dots \right] \\ & \sqrt[r]{B} \left[B^n + \binom{n}{1} \frac{rn+1}{r-1} A B^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} \frac{(rn+1)(r[n-1]+1)\dots(r[n-k+1]+1)}{(r-1)(2r-1)\dots(kr-1)} A^k B^{n-k} + \dots \right] \\ & = \left[\sqrt[r]{A} - \sqrt[r]{B} \right]^{2n+1} \cdot \left(\sqrt[r]{B} \right)^{(r-2)n} \cdot R_n \left(\sqrt[r]{\frac{A}{B}} \right) \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit T_n , so entsteht eine neue Gleichung

$$\sqrt[r]{A} A_n - \sqrt[r]{B} B_n = \left[\sqrt[r]{A} - \sqrt[r]{B} \right]^{2n+1} \cdot C_n \quad \dots (8)$$

wo A_n und B_n ganze positive Zahlen werden, während

$$T_n \cdot U_n(1) B^n < A_n < T_n \cdot U_n(1) A^n < \left[4 r^{\frac{r-1}{r}} A \right]^n \quad \dots (9)$$

$$T_n \cdot W_n(1) B^n < B_n < T_n \cdot W_n(1) A^n < \left[4 r^{\frac{r-1}{r}} A \right]^n \quad \dots (10)$$

$$T_n \cdot R_1(1) B^{\frac{r-2}{r}n} < C_n < T_n \cdot R_n(1) A^{\frac{r-2}{r}n} < \left[\frac{r^2}{4} r^{\frac{r}{r-1}} A^{\frac{r-2}{r}} \right]^n \quad \dots (11)$$

Ferner wird

$$\left| \sqrt[r]{A} - \sqrt[r]{B} \right| = \varepsilon \frac{A-B}{rB^{\frac{r-1}{r}}} \quad \dots (12)$$

wo

$$0 < \varepsilon < 1$$

oder

$$\sqrt[r]{A} A_n - \sqrt[r]{B} B_n = \varepsilon_n \frac{A-B}{rB^{\frac{r-1}{r}}} \left[\frac{\left(\frac{A-B}{2} \right)^2 r^{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{r-2}{r}}}{B} \right]^n \quad \dots (13)$$

oder

$$\sqrt[r]{A} A_n - \sqrt[r]{B} B_n = \varepsilon_n \frac{A-B}{rB^{\frac{r-1}{r}}} \left[\frac{\left(\frac{A-B}{2} \right)^2 r^{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{2r-2}{r}}}{A} \right]^n \quad \dots (14)$$

wo

$$0 < \varepsilon_n < 1$$

Vorausgesetzt, daß r z. B. eine ungerade Primzahl bedeutet, werden wir nun zeigen, wie man aus einer gewissen Lösung der Gleichung

$$a\alpha^r - b\beta^r = \gamma \quad \dots (15)$$

in ganzen positiven Zahlen α , β und γ alle Lösungen der Gleichung (2) in ganzen Zahlen p und q finden kann.

Setzt man in (14)

$$A = a\alpha^r, \quad B = b\beta^r, \quad A - B = \gamma, \quad \delta = rB^{r-1}$$

$$S = \left(\frac{A-B}{2} \right)^2 r^{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{2r-2}{r}}$$

so erhält man die Gleichung

$$\sqrt[r]{a} \alpha A_m - \sqrt[r]{b} \beta B_m = \varepsilon_m \frac{\gamma}{\delta} \left(\frac{S}{A} \right)^m \quad \dots (16)$$

Aus (2) erhält man ferner

$$\sqrt[r]{a} p - \sqrt[r]{b} q = \frac{1}{xp} = \varepsilon \frac{c}{(a\beta^r)^{\frac{r-1}{r}}} \quad \dots (17)$$

wo

$$0 < |\varepsilon| < 1$$

Aus (16) und (17) ergibt sich

$$\alpha q A_m - \beta p B_m = \varepsilon_m \frac{\gamma}{r b \beta^{\frac{r}{r-1}}} \left[\frac{S}{A} \right]^m p - \frac{\alpha A_m}{x p \sqrt[r]{b}} \quad \dots (18)$$

Wir setzen nun voraus, daß

$$p > \frac{r b \beta^{r-1}}{2\gamma} \quad \dots (19)$$

und

$$S < A$$

oder

$$A > \left(\frac{A-B}{2} \right)^2 r^{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{2r-2}{r}}$$

oder

$$a\alpha^r > \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 r^{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{a\alpha^r}{b\beta^r} \right)^{\frac{2r-2}{r}} \quad \dots (20)$$

In diesem Falle kann man eine solche ganze, nicht negative Zahl n finden, für welche

$$\frac{rb\beta^{r-1}}{2\gamma} \left(\frac{A}{S}\right)^n < p \leq \frac{rb\beta^{r-1}}{2\gamma} \left(\frac{A}{S}\right)^{n+1} \quad \dots (21)$$

Infolge der Gleichung (4) wird

$$\alpha q A_m - \beta p B_m \geq 0$$

oder

$$|\alpha q A_m - \beta p B_m| \leq 1 \quad \dots (22)$$

wenn m gleich einer der Zahlen $n+1$ oder $n+2$ gesetzt wird.

Für dieses m wird ferner nach (20)

$$\varepsilon_m \frac{\gamma}{rb\beta^{r-1}} \left[\frac{S}{A}\right]^m p < \frac{1}{2}$$

oder nach (18) und (19)

$$\left| \frac{\alpha A_m}{x p \sqrt[r]{b}} \right| > \frac{1}{2}$$

oder

$$x < \frac{2\alpha A_m}{p \sqrt[r]{b}} \leq \frac{2\alpha}{\sqrt[r]{b}} \frac{A_{n+2}}{p} \quad \dots (23)$$

oder nach (17)

$$c > \frac{a^{\frac{r-1}{r}} p^{r-2}}{|x|} > \frac{a^{\frac{r-1}{r}} b^{\frac{1}{r}} p^{r-1}}{2\alpha \cdot A_{n+2}}$$

oder nach (9) und (21)

$$c > \frac{a^{\frac{r-1}{r}} b^{\frac{1}{r}} \left[\frac{rb\beta^{r-1}}{2\gamma} \right]^{r-1}}{2\alpha \left[\frac{r}{4r^{r-1}A} \right]^2} \left[\frac{A^{r-2}}{4r^{\frac{r}{r-1}} S^{r-1}} \right]^n \quad \dots (24)$$

oder

$$c > K [L]^n \quad \dots (25)$$

wo

$$K = \frac{r^{\frac{r^2-4r+1}{r-1}} \cdot b^{\frac{r^2-r+1}{r-1}} \cdot \beta^{(r-1)^2}}{2^{r-4} \cdot \gamma^{r-1} \cdot \alpha^{2r} \cdot a^{\frac{r+1}{r}}} \quad \dots (26)$$

$$L = \frac{(4a\alpha^r)^{r-2}}{\gamma^{2r-2} \cdot r^{\frac{r}{r-1}} \cdot \left(\frac{a\alpha^r}{b\beta^r}\right)^{\frac{2(r-1)^2}{r}}} \quad \dots (27)$$

während n durch die Relationen (21) definiert ist.

Ist folglich in (25)

$$L > 1$$

oder

$$A^{r-2} > 4r^{\frac{r}{r-1}} S^{r-1} \quad \dots (28)$$

oder

$$(4a\alpha^r)^{r-2} > \gamma^{2r-2} \cdot r^{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{a\alpha^r}{b\beta^r}\right)^{\frac{2(r-1)^2}{r}} \quad \dots (29)$$

so wird hierdurch, wie sofort zu sehen ist, unser Problem gelöst.

Wir haben also folgendes Theorem gewonnen:

Bestehen in ganzen positiven Zahlen $a, b, \alpha, \beta, \gamma, p, q, n$ die Relationen

$$a\alpha^r - b\beta^r = \gamma \quad \dots (30)$$

$$(4a\alpha^r)^{r-2} > \gamma^{2r-2} \cdot r^{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{a\alpha^r}{b\beta^r}\right)^{\frac{2(r-1)^2}{r}} \quad \dots (31)$$

$$|ap^r - bq^r| \geq c \quad \dots (32)$$

$$n \geq \frac{\log c - \log K}{\log L} \quad \dots (33)$$

$$n \geq 0$$

wo c eine positive GröÙe und r eine ungerade Primzahl bedeuten, während K und L durch (26) und (27) definiert sind, dann muß

$$p \leq \frac{rb\beta^{r-1}}{2\gamma} \left(\frac{A}{S}\right)^n = \frac{rb\beta^{r-1}}{2\gamma} \left[\frac{4a\alpha^r}{\gamma^2 r^{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{a\alpha^r}{b\beta^r}\right)^{\frac{2r-2}{r}}} \right]^n \quad \dots (34)$$

Beispiel 1.

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1$$

$$a = k + 1, \quad b = k, \quad r = 3$$

Hier wird nach (28)

$$4(k+1) > 3^{\frac{9}{2}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3$$

so:

$$k \geq 37$$

Beispiel 2.

$$a = 1, \quad b = 17, \quad r = 7$$

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 11$$

$$3^7 - 17 \cdot 2^7 = 11$$

(31) ist hier erfüllt, denn

$$4 \cdot 2187 > 11^{12} \cdot 7^{49} \cdot \left(\frac{2187}{2176} \right)^{72}$$

$$K = \frac{7^3 \cdot 17^7 \cdot 2^{36}}{2^{11} \cdot 11^6 \cdot 3^{11}}$$

$$\log K = 5,2548601$$

$$L = \frac{8748^5}{11^{12} \cdot 7^6 \cdot \left(\frac{2187}{2176} \right)^7}$$

$$\log L = 0,2886780$$

Ist also in ganzen Zahlen p und q z. B.

$$|p^7 - 17q^7| < 1000000$$

so können wir schreiben

$$n = 3 > \frac{\log 1000000 - \log K}{\log L} = 2,58 \dots$$

und folglich wird

$$p < \frac{7 \cdot 17 \cdot 2^6}{2 \cdot 11} \left[\frac{8748}{11^{12} \cdot 7^6 \cdot \left(\frac{2187}{2176} \right)^7} \right]^3 < 14293$$

Gedruckt 14. Oktober 1919.

SKRIFTER

UTGIT AV

VIDENSKAPSSELSKAPET
I KRISTIANIA

1919

I. MATEMATISK-NATURVIDENSKABELIG KLASSE



KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1920



SKRIFTER

UFGIT AV

VIDENSKAPSSELSKAPET

I KRISTIANIA

1919

I. MATEMATISK-NATURVIDENSKABELIG KLASSE



KRISTIANIA

I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1920

Indhold.

		Side
Nr. 1.	S. Holth. Greco-Roman and Arabic bronze instruments and their medico-surgical use. (With 4 plates, and 5 figures in the text).	1—20
» 2.	A. Fonahn. A Palmyrene man's name in Arabic transcription on a surgical bronze instrument. (With 2 figures in the text)	1— 9
» 3.	Th. Skolem. Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen.	1—37
» 4.	E. Berner. A crystallographic investigation of some organic acids. (With 1 plate, and 6 figures in the text).	1—15
» 5.	R. Tambs Lyche. Aufstellung einer Basis des Kummerschen Zahlkörpers sechsten Grades	1—21
» 6.	Viggo Brun. En generalisation av kjedebroken. I. (Avec un résumé en français et 11 figures dans le texte)	1—29

GRECO-ROMAN AND ARABIC BRONZE INSTRUMENTS AND THEIR MEDICO- SURGICAL USE

BY
S. HOLTH

(WITH 4 PLATES, AND 5 FIGURES IN THE TEXT)

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE 1919. No. 1)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

1919

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 7de mars 1919.

Since November last year a great many Greco-Roman and Palmyrene antiquities, collected in Syria and Palestine from 1872 to 1890 by the Russian baron Ustinov, who never published anything about his finds, have been sold in this city for English account. The first day I bought a bronze steelyard and a collection of surgical bronze instruments which seemed interesting from an historical point of view, many of them bearing an obvious likeness to some instruments from »Casa del Chirurgo« in Pompeji which I have seen in the »Museo Nazionale« in Naples.

I obtained no other information about the instruments then that, according to the sale catalogue, they were said to have come from Ascalon, an old port in Palestine 40 km. North of Gazah. From its history I would remind you that after Alexander the Great, under the Ptolemei and the Seleucidæ the town became a centre for Hellenistic culture in Palestine; it reached the height of its glory under the Roman Emperors, was conquered by the Arabs under the Kaliph Omar in 638 A. D. and was for a while in the hands of the Crusaders. In the thirteenth Century the fortifications were rased to the ground; since then it has been a town of ruins.

Besides in Ascalon Ustinov made collections in Gazah and Cæsarea as well to a great extent in Palmyra; several of our instruments are probably from this town. You remember that Palmyra under the Roman Emperors was a great city, a stapletown for the import of the Romans from China, India and Southern Arabia; after Aurelian's victory over Queen Zenobia in 272 A. D. it was reduced to a garrison town for the defense of the frontier and under the Kaliphs it did not play its ancient great part as a commercial centre. Even while it belonged to the Roman Empire the majority of the population and the ruling classes are said to have been Arab. Many of the names of the inscriptions on the tombs are Arab, in spite of their Aramaic and Greek letters. Since the 12th century, according to other sources the 14th century, also Palmyra has been a town of ruins.

The steelyard is of bronze, like all the medical instruments except one, which shall be mentioned below. The patina of some of the instruments is greenish, but on most of them of an even deep brownish black, with green dots in tiny hollows in the surface (some of these hollows can only be discovered under a magnifying glass).

In both cases the patina is not altered by washing in water or alcohol, and it is of a kind which can only be produced by the work of centuries and which no falsifiers have succeeded in imitating however great their efforts. If a tiny chip is cut out of some instruments through the patina layer, the shining surface of the cut is somewhat yellowish red. A fresh surface of fracture which I saw by an involuntary break of a sound (Pl. II, 3) was greyish and granular crystalline. Some instruments (Pl. I, 25—29, III, 13, 19, 20 and 23) must have been broken in antiquity as the granular surface of the fractures are covered with the same kind of patina like the rest of the instruments. I have until now not been willing to sacrifice any of the instruments on a chemical analysis; according to Milne the bronze of Greco-Roman surgical instruments in cases analysed appeared a binary alloy of copper and tin with the alloy of tin nearly always about 7.5 %¹.

I will first speak about a Roman bronze steelyard which is drawn on Pl. I in size $\times \frac{2}{3}$.

The *steelyard* consists of a quadrangular lever 34 cm. long, forming a balance with two unequal arms, provided with three crooked handles and with three different engraven scales of weight, probably one scale for each handle. The goods were probably placed in a dish hanging by cords attached near the end knob of the short arm. (See however foot note p. 7). The sliding weight was not found; in a Pompeian steelyard, which I have seen, the bronze sliding weight had the shape of a woman's head attached by a short chain, sliding on the long arm of the steelyard; this

¹ In connection with my lecture Professor J. Sebelien (Aas, Norway) gave some interesting information about the different composition of old bronzes. — The thought struck me that our bronzes might have another alloy than the alloy mentioned by Milne. Professor Sebelien has been kind enough to submit to a quantitative analysis as many samples of my instruments as I could procure. I have taken samples with pinchers or file; the colour of the fresh surfaces is different, copper red, yellowish red, reddish yellow, and yellow; but in Pl. III, 19 it is grey and in 20 the broken surface resembles cast iron. The bronzes in these two latter instruments and in No. 21 contain much lead (13.44 %, 30.02 % and 6.85 %). No. 20 contains 10—12 % of Zinc, Iron and Cobalt — mainly Cobalt. No. 4 is pure copper, No. 6 contains 92.94 % copper and 5.30 % tin. The others contain copper from 74 % to 85 %, tin in most of them from 0.5 to 3.4 %, while the zinc alloy is great (between 11 % and 22 %). The detailed analyses by professor Sebelien will be found on the table p. 5. He will later publish a paper on the bronze question in the »Forhandlinger» or »Skrifter» of our Society.

Quantitative analyses of bronzes in Dr. S. Holth's collection by Professor J. Schöden (Aas, Norway).

	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	No. 6	No. 7	No. 8	No. 11	No. 13	No. 14	No. 18	No. 19	No. 20	No. 21	No. 24	Steel-yard
Tin	1.04	0.14	3.37	0	5.30	1.53	2.34	0.48	0.65	1.98	0.03	4.83	0.93	2.32	2.95	1.77
Lead	0.61	?	0.01	0	0.23	2.18	0.92	0.76	0.73	—	0.02	13.44	30.02	6.85	1.31	1.30
Copper	77.89	74.11	81.12	99.60	92.94	86.44	80.30	87.77	83.79	84.95	85.49	71.60	58.13	85.13	81.08	87.70
Zinc	17.38	21.79	13.00	0	0.89	13.31	13.48	11.72	15.53	11.49	13.84	5.66	11.00	1.54	16.06	5.42
Iron	2.94	3.65	(including some Nickel)	0	—	1.77	2.57	—	—	traces	traces	1.50	incl. mainly Cobalt)	?	?	—
	99.86	99.69	97.50	99.60	99.36	99.23	99.61	100.73	100.68	98.42	99.38	95.93	100.08	95.93	101.40	—

steelyard had only two handles. The engraven lines, points, and letters of our three scales were nearly everywhere quite distinct but partly filled with produce of oxydation and of sand particles; on that account they were badly reproduced in the photos. In order to have all the marks distinctly on the negatives, and by this also on the lantern slides and on Pl. I. I have under a good light carefully marked everything on the instrument itself by a fine hair brush dipped in an emulsion of zincwhite in gum water (Pl. I, A, B and C). In the middle of the scale »A« are seen two oblique lines which join in the middle of the right side of a vertical division line by which is produced the shape of a »K«, probably the Greek letter »Kappa«, which here may signify »twenty«. Besides the seventh division line to the left of this »K« is seen a sign which most resembles the Greek letter ξ and may in this case signify »sixty«. Close to the left of this sign a curved and an oblique line join in the right side of a vertical division line by which is produced an incomplete »R« which I dare not try to interpret; I must say the same about the oblique line, farthest to the right on the scale »A«. The scale »B« divided in twelve (Roman?), show an »X« and beside it an oblique line; every sixth line between two long lines is marked with three dots (halving sign). On the scale »C« there is no letter; but near some lines are seen two or three dots and in one place six dots.

Mr. D. Isaachsen, the head of our institute for weights and measures, has kindly inspected the steelyard and made some trials with it. If the scale »B« divided into twelve is attached to the handle »B« and the smallest subdivisions are to represent ounces, he finds that the sliding weight must have weighed 466 grammes, and that on this scale there have been weighed up to 3.5 kg.; on the »C« scale up to 12.8 kg. »These limits of weight are evidently too high, for it could not have been possible to weigh such a great weight on the slender little steelyard«. Mr. Isaachsen finds, however, that the scale divided into twelve is attached far more naturally to the innermost handle »A«, which the weigher has then held in his right hand, having the long arm of the steelyard with the scale to his left. If the smallest division of the scale is to mark an ounce, the sliding weight will, by this arrangement, weigh 776 grammes and the limits of the weight will be 0.94 kg. to 2.57 kg. He finds also these figures too high¹. Mr. Isaachsen therefore thinks it best to put off the calculation of the three scales till

¹ By adding the hanging apparatus Pl. I, d — and perhaps attached to it a counter-weight — on to the short arm, the sliding weight in the long arm will be diminished; see next note p. 7.

our University Library by his request has obtained some more detailed works about the weighing systems of Antiquity.

According to the above statements, the steelyard *may* have been suitable for a physician in the purchase of the drugs he needed for the preparation of remedies¹. One of the Pompeian steelyards was found in »Casa del Chirurgo« together with surgical instruments. The physician of antiquity was his own apothecary. The *φαρμακοπῶλαι*, remedy dealers, and *ῥιζοτόμοι*, »root cutters« ρ: herb gatherers, were railed at by Aristophanes as simple quacks.

The first real dispensary was established in 750 A. D. in Bagdad by the caliph El Mansur.

I will now give a survey of the 21 surgical instruments of Pl. II, III and IV (drawn in size $\times \frac{1}{1}$) with short characteristics of their appearance and kind, mention the probable place and time of the finds, and give a sketch of the use of the instruments, as well as examine somewhat more carefully a few of them which are of special interest. Finally, I believe it may be of interest from an historical point of view to show that some instruments cannot have been used with certain treatments, where their use would have been natural to a surgeon of our day.

The eight first instruments given on Pl. II are certainly Greco-Roman,

¹ This surmise is highly strengthened by seeing the hanging apparatus Pl. I, D for the goods belonging to the steelyard which after my lecture I was fortunate enough to find among some unsold bronzes from the Ustinov collection; it has exactly the same kind of patina as the steelyard. As is seen in Pl. I, D a hook is placed in the groove nearest the final knob of the short weight arm; this hook carries by a ring and by clasps three flat sticks, each of which is provided with a clasp and hook by the lower end. A flat bowl with three holes or rings could, of course, be easily fastened to these hooks. Against this hypothesis, however, there is the fact that a quite similar hanging apparatus in the steelyard, which belonged to Cajus Firmius Severus, a Gallo-Roman oculist in Rheims, had also a top hook but only two hanging sticks each with its hook; no weighing bowl could adequately be fastened to only two such hooks (unless it was boat-shaped). The most likely hypothesis is consequently that these hooks were fastened direct to the goods which probably consisted of bundles of plant drugs, which the physician in Rheims as well as Ascalon bought from herb gatherers.

Since my lecture I have also acquired from the Ustinov collection thirty two different weights; the study of these weights will perhaps contribute to the explanation of the three weight scales in the steelyard. Some of them are signed with Greek letters — here evidently belonging to the Ionic or the Milesian cipher-alphabets; other weights have different polyedric forms. One larger weight is of lead, weighs 186 gram and is marked with a Phœnician cipher *N N* = 40; it has the shape of a four sided pyramid, it is pierced near the top and *may* have served for a sliding weight on a steelyard — or it *may* have been attached to the middle one of the three lower hooks in Pl. I D, by which the sliding weight can be made lighter and the weighing limits are lowered. This principle was used in the above mentioned small steelyard from Rheims (by a bullet just under the top hook).

9 is a modern model in steel of 7 and 8; 10 is a needle which certainly dates from Antiquity and is probably Greco-Roman.

It is characteristic of most of the medical instruments of Antiquity that they are made »double« that is both ends of the instrument are made for use. The advantage of this arrangement is a quick change of instrument; the principle has come down to our day, but from aseptic reasons it has been abandoned by the surgeon of the present day.

Pl. II, 1—4 and I, 25—29 are the Greek *σκαθούλη*, spatula sound; the spatula is either flat (4 and 25—28), spoonshaped (2), gougeshaped (3 — not broken), willow leaf shaped, folded in an obtuse angle in its length and curved backwards (1); the sound ends have also different forms. In 5 the shaft has a broad and deep sharp spoon in one end and a conic pointed sound in the other end; on one side the instrument has a »millimeter« measure scale which I will mention below. Nr. 6 is a double sound whose lower end is stiletto shaped while the upper end has an »olive« knob; it ought to be noticed that the thicker ornamented part which indicates that there are two instruments joined in one, has an *excentric* position. I will discuss below Pl. II, 7 and 8. Pl. II 10, is a suture needle, biconvex in section with 2 *lateral edges*.

I believe it very probable that the statement of the sale catalogue is true, giving Ascalon as the finding place of these instruments; but it cannot be ascertained whether they are from the Hellenistic period of Ascalon or from the era of the Roman Empire in which — according to Th. Mommsen — the zinc bronzes came up; the shape of the instruments being of the same type for more than a thousand years — from Hippocrates down to the Byzantine era. Medical men of the Romans were as a rule Greeks or Egyptians with a Greek education.

As for the Pompeian instruments the age is given. Roman surgeons in Gaul in the second and third centuries A. D. had their instruments with them in their tombs as well as contemporary Roman Emperor coins. In the Ustinov collection of coins there are samples even from the Ptolemei down to Justinian, but they are in a special collection and there is no information that any of them have been found together with the surgical instruments.

Out of the fourteen instruments on Pl. III, number 15 is a modern spatula sound of glass which is used — sterilized — to put ointments into the palpebral fissure. Both Celsus and the Greek and the Arabic medical writers many times mention this use of their spatula sounds (Pl I, 25 and 26, Pl. II, I to 4, Pl. III, 11 to 14). Pl. III, 22 is a modern double glass rod equally used for application of eye ointments and corresponds com-

pletely to the double sounds Pl. III, 16—21, of which 19 and 20 were found broken near the central quadrangular handle. Also in instrument 23 the active end is broken; I have, however, good reasons for ascertaining the probable use of this instrument, about which I will speak below.

Pl. III, 24 is a spatula sound which stands isolated, being yellow and *lacking patina*. Though metallic zinc was unknown to the people of Antiquity round the Mediterrean, they understood how to make brass (*ὀρείχαλκος*, aurichalcum »gold copper«), by melting copper ores with the zinc ore »calamine stone«; among the hundreds of medical instruments from Pompeji 2 scalpel handles are of brass (25 % zinc, 75 % copper). So far Pl. III, 24 might certainly be an instrument from Antiquity, but the workmanship speaks against this supposition. Whereas the other instruments prove to be forged out of bronze in bars by a more or a less careful round hammering — No. 24 is hammered together by a stripe of brass plate; it is a rough piece of work and probably dates from a relatively modern time.

The bronze instruments in Pl. III differ in many things from the Greco-Roman ones in Pl. II. The *handle* in Pl. III, 23 is *four-sided*, the same is the case with the »middle handle«, placed *exactly in the centre*, of the double sounds 16—21; the *ornaments* are here short *straight grooves* made with a file. The corresponding *handles* of Greco-Roman instruments are *round*, the ornaments are transversal *ring grooves*, sometimes elaborately turned; there are also spiral ornaments. The *middle handle* is *excentrical* in all the Greco-Roman double instruments which I have seen in reality or in pictures (see Pl. II, 6).

It was, however, the spoon spatulas Pl. III, 11—14 which first attracted my attention; the spoon is only a round hollow stamped in the end of the spatula; the *twined ornaments* in 12—14 have a decidedly *oriental character* and are never seen on Greco-Roman instruments. And above all, in the spoon spatula 11 are seen some letters in basso-relievo which as far as I could see were Arabic; I thought they were most likely the name of the instrument maker. Such a one to my knowledge has been found only once before on a medical instrument from Antiquity, a toothed forceps from Pompeji. There is stamped an inscription which Védrenes read AGATGELVSF and interpreted as »Agathangelus fecit«; Milne reads the name somewhat differently.

I addressed myself to Mr. A. Fonahn, Ph. D., lecturer at the University in Kristiania, and asked him to inspect the inscription, which he very kindly did. He finds it is a Palmyrene man's name in Arabic transcription.

The name is also found in epitaphs in Palmyrene and in Greek letters; Mr. Fonahn's argumentation requires transcriptions in hebraic letters; his essay is printed in the same volume as my lecture. I will here only show the Arabic inscription magnified (Fig. 1) together with a few words inspired by Mr. Fonahn.



Fig. 1.

The Arabic inscription of the spoon spatula Pl. II, 11 enlarged $\times \frac{3}{1}$.

We have here six Arabic consonants; there are no sign for vocalising and consequently no »hemza«; as well known the writing must be read from the right to the left. The consonants are as follows:

1. »Alif«; for several reasons, among others from the Greek transcription Ἀθῆναβος, it must be inferred that the vocalisation is a short ä.
2. »tâ« = t; vowel: i or e, hardly a, not u.
3. »‘ain« is a diamond resting on a horizontal line; it reminds of one of the different Cufic shapes of this consonant. The vowel must be a short ä,
4. »kâf« = k; the following »alif« proves, that the vocalisation must be a long ā.
5. »alif«.
6. »bâ« = b.

In Roman transcription the name must be read »Atī‘akāb.«

It might be supposed that a Palmyrene instrument maker had his business in Ascalon or that the instrument had come to this town in some other manner. The most natural surmise is, however, that the instrument was made and was found in Palmyra, from whence probably the greater part of the Ustinov collections came. The spoon spatulas Pl. III, 12–14 are evidently from the same workshop as No. 11. According to newer Arabists, in spite of their modern appearance the letters may be older than the Cufic letters. It is however most likely that the inscription dates from the epoch *after* the Mohammedan conquest; probably between the 7th and the 12th century A. D.

Mr. Fonahn says also that he has found in Melchior de Vogüé: »Syrie centrale. Inscriptions Sémitiques«, a Palmyrene inscription with the name

»Aʿthai«. Concerning this name it is said by Lidzbarski in his »Handbuch der Nord-Semitischen Epigraphik« that it is a hypokoristikón (pet name, diminutive) of Atīʿaqāb. It is very interesting that the name Aʿthai in the same epitaph, according to de Vogüé, is applied to »un médecin«. — It might be supposed that also our Atīʿakāb was been a physician and the owner of the instrument and that the name might be his — and not the maker's.

It cannot be decided whether the instruments Pl. III, 16—21 and 23—24 came from Palmyra or Ascalon.

Among the unsold bronzes in the Ustinov collection, I also found after my lecture the following instruments which are drawn on Pl. I, 25—32 in natural size: Four spatula sounds 25—28; in 25 and 26 is a bit of the spatula broken off, in 27 and 28 the sound parts. One very elegant sound knob (29). A broken sharp spoon (30). A small sewing needle, round in section (31). — Besides was a bundle (32) of the following articles in bronze: In an open elastic »key-ring« are put eight closed rings one of which carries two tools — a) tweezers, probably for epilation and b) stiletto, which has probably served to several purposes such as undoing seams, loosening knots etc.

I have further acquired the following pieces represented on Pl. IV, 33—35 in natural size:

A *bronze tube* (33) of 2 millimeter diameter, in which I found inserted a sound with an small oval oblique spatula in the upper end; the lower end was broken. If the latter end has been sharply pointed the instrument may have been a trocar e. g. for puncturing hydrocele. Still it must be remarked, that the supposed stiletto was not fixed by oxydation in the tube, and may have been placed there afterwards. The tube is possibly a fragment of a catheter for the infantile urethra.

A *bronze balance lever* with two *equal arms* and index (34 a); the crook of suspension and the two scales are missing. Each arm has a joint by which more then $\frac{2}{3}$ of its length may be placed parallel to the index (34 b). In this way the balance might easily be reduced in size for being put into a case for travelling purposes. The balance was only fitted for light weights e. g. for very effective drugs; a similar one — without joints — was found besides a steelyard among the instruments of the above named Roman oculist from Rheims. But as our balance surely has been an instrument for travelling purposes it may more probably have served as a *money balance*, as the ancient gold coins very often were debased.

A *knife handle of silver*¹ is very interesting both in the ornaments and in the inscriptions (Pl. IV, 35 a, b and c in natural size, a² and b² in double size). The knife blade, which has been inserted in the split 35 c, was certainly made of steel and long ago destroyed by rust. The handle was cast: a small congealed projecting metal drop on one side (35 b and b²) has corresponded with the funnel of the mould; the indistinctness of the ornaments in the upper third of the same side seems due to an unsuccessful cast work. The ornaments and letters are depressed.

On one side the border drawings are continual single spirals (a and a²), on the other side a serrated pattern (b and b²). These border decorations are by a line separated from two central fields, of which the upper one shows hunting scenery with barking dogs; on a and a² is seen an animal (wild boar?), who faces his pursuers; on b and b² only two animals are distinct, and the rest seems to have been unsuccessfully cast.

The fields near the blade have Greek inscriptions, which Professor S. EITREM of Kristiania has been kind enough to interpret.

On one side of the handle is written:

$$\begin{aligned} & \Theta \epsilon \Sigma \text{Μ} \epsilon \text{Κ} \lambda \epsilon \text{Π} \tau \alpha \\ & = \text{Θέσ με, λήπτα} \end{aligned}$$

»Put me down again, you thief!«; in other words: »I am not for you«.

On the other side of the handle (35 b and b²) we read:

$$\begin{aligned} & \text{ΚΥΡΙΝΕΧΩ} \\ & = \kappa \acute{\upsilon} \rho \iota (o) \nu \epsilon \chi \omega \end{aligned}$$

»I have (already) a master«; and do not need a new one.

The inscription has probably been a well known formula applied on such objects. The artist — who perhaps was not a Greek — has copied the formula but has omitted the O in *KYPION*. Omega is engraved as a minuscule, the other letters are all majuscules.

Judging from the form of the letters, especially the short cross stripe at the end of each character the handle originates from the 3rd century of the Christian era — or later.

Regarding the use of the knife the animal pictures might indicate a hunting knife; but for that use the handle is too slender. It might be fit for a table knife or a surgical scalpel. The upper end of the ancient scalpel

¹ I have submitted a chip of the knob of the upper end for quantitative analysis to professor J. Sebelien, who has kindly given me the result: Silver 89.22 0/0, Lead 0.90 0/0, Copper 7.80 0/0, Iron 1.01 0/0, Gold 0.52 0/0, Tin (traces).

handles have often — but not always — the form of a myrtle-leaf intended for stump dissection. Silver was not the common material for a surgical instrument handle but was often used as damaskeened ornaments in the bronze. But that silver also was used alone we know from the mocking speech of Lukianos on surgeons »who tried to overawe the public by their instruments of gold and silver, which they did not understand the use of«.

I will now consider some instruments with more detail as to their probable use.

The instruments Pl. II 7 and 8 were not originally made for surgical use: a bronze handle has on either end a two pronged fork with blunt nearly joined points. At first I did not see what could have been the use of these two instruments; but Dr. Med. Fredrik Grön told me that in 1913 he saw a similar instrument in the greatest archæological museum of France at Saint-Germain-en-Laye, in the celebrated collection of surgical instruments after the above (p. 7 foot note) mentioned Roman oculist Cajus Firmius Severus, who lived in Rheims at the time of Marc Aurel. This bifurcated instrument, which had not attracted my attention when I saw the collection 19 years ago, was labelled »une navette à filocher«¹ = a net shuttle. In a very interesting and beautifully illustrated book by the English collector Dr. J. S. Milne of Hartlepool »Surgical Instruments in Greek and Roman Times« (Oxford 1907) there is an illustration of a similar instrument which the author, because it resembles the Roman netting needle, believes has come by a fallacy among his surgical bifurcated probes. »In its typical shape the *Roman netting needle* has the forks in two plans at right angles to each other«. This is even the case with Pl. II, 8 and nearly with 7 where the angles are 70° and 110°. The instrument may have been called by the Romans »*furca retiaria*«, because by the Greeks it was certainly called *χήλη* or *χηλῶτιον* — but it had probably been used also by other people round the Mediterrean since times immemorial; fishing nets are mentioned by Homer both in the *Odyssey* and in the *Iliad*. — I showed the instruments to an expert in netbinding; he found them very practical and on my question about the reason of the position of the plans of the forks, and the crossing of the points (see Pl. II, 8, beneath) he answered

¹ It is however possible that this netting needle has only come into the same case as the surgical instruments from Rheims by chance; neither by Deneffe nor by Milne is any such tool mentioned in their description. — That both the two Ustinov netting needles and those of Milne may have been admitted by chance or by misunderstanding cannot of course be denied; but as will be seen from the following statement it is far more likely that the surgeons themselves have deliberately chosen these useful tools for their work.

that both facilitated the winding of the yarn. The netting needles used by our fishermen when making or mending their nets themselves are of the same principle: a double wooden fork, only the prongs join only in the end, which is to go first through the meshes. Besides Dr. Med. F. G. Gade told me after my demonstration of old and modern fishing net needles, that the old instrument exists this very day in the form of the »filet needle« for the French net-work embroidery; in figure 2 this instrument is seen working.

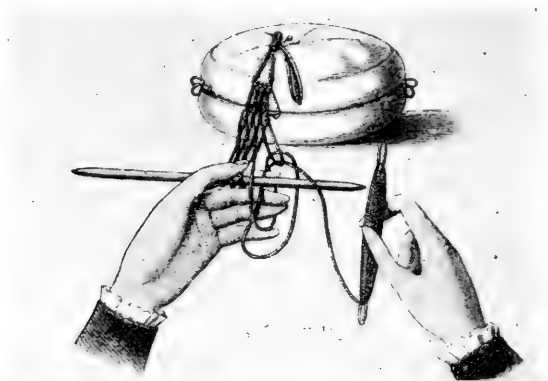


Fig. 2.

Net-work embroidery with the »filet needle«, on which the thread is wound.

In fig. 3 the two Roman fishing net needles are seen with the yarn wound.

I am sure that the surgeon in Ascalon found the netting needles very convenient for *keeping neatly arranged surgical suture thread*.

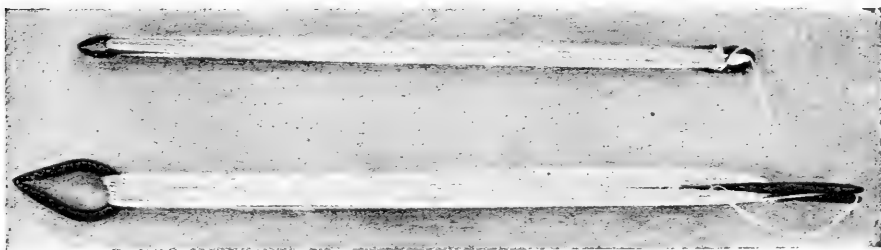


Fig. 3.

The netting needles Pl II, 7 and 8 on a reduced scale with the thread wound.

The instrument of the Mediterranean countries followed the Romans to Gaul and Britain where the surgeons were of the same opinion as their colleague in Palestine.

I will now direct your attention closer to the instrument Pl. II, 5 the upper end of which is a sharp spoon 12 mm wide 6 mm deep; it has probably been used among other things to remove slap wound granulations. Above all, however, along the length of the sound from the base of the spoon downwards to the conic point of the sound there runs a very fine measure scale of transversal filed lines, which are partly more or less veiled by the layer of patina, and which in order to get it distinctly on the cliché, I have made distinct with zinc white. In the middle part, which is best preserved, are 24 division lines on a length of 24 mm; the division is not, however, absolutely regular, for within the same part are 18 division lines on a length of 18.5 mm. In the latter case it might be thought that a division of the attic *δᾶκτυλος* was meant, which, however, ought to be exactly 19 mm. The division of twelve lends more probability to the supposition that it is the Roman *uncia* = $\frac{1}{12}$ *pes* = 24 mm which has been the point of departure. Whether the former or the latter point of view is chosen, the surgeon in Ascalon has *practically used a millimeter scale* at least one millennium and a half before the invention of the metrical system during the great French Revolution.

This instrument like the other sounds has among other things been used to localize foreign bodies in fistulæ and deep wounds; to-day we have the X-ray photography.

As for sounds and spatula sounds it must be remembered that they were not always medical instruments. They were also used by painters in *preparing colours* and by ladies in *cosmetic manipulations*. Instrument Pl. II, 1 was in my opinion very well adapted to the blackening of grey or defective eyebrows; a thing which to this day is much used in the East, also by men as it is considered a remedy to prevent eye diseases. The physicians often used the spatula sound as a *pharmaceutical* instrument at the preparation of innumerable mixtures of remedies among which *collyria* for treating eye diseases played a great part. Many of these collyria contained copper compounds and were certainly fit for the treatment of *trachoma* the *»Egyptian eye disease«* which then as now made severe ravages also in Syria and Palestine. The end of the sound was used then as now (see Pl. III, 15 and 22) to put ointments into the palpebral fissure and the Syrian surgeons have certainly often used the sound Pl. I, 25, 26, Pl. II, 1, 2, 3 and most of the sounds in Pl. III in this way.

Looking at the sounds with a conic point (Pl. I, 29, II, 5 and Pl. III, 19—20) a surgeon of the present day must think of the possibility that they have been used in the treatment of gonorrhoeic strictures of the urethra.

Dr. Johan Bergman supposes in his interesting book on Pompeji (Stockholm 1915, p. 156) that the surgeons of the town must have had plenty to do on the domain of genital diseases; gonorrhoea was sure to thrive in the great number of brothels (Dr. Mygind). In the establishment of this kind close to the barracks of the gladiators is written on a wall: »Victorum victrix«. I will not assert that the meaning of the inscription has been the one I here put in it: that the victors, at any rate, might meet a worse treatment in this place than in the arena. *Heliodoros* who was surgeon in Rome at the time of Trajan and is mentioned in Juvenal's sixth satire (VI, 369 to 372) is said to have removed fleshlike growths from the urethra and then introduced bronze *tubes* (enveloped in a paper cover soaked and shaped and then dried) in order to prevent the growing together; on the fourth day he changed with tubes of tin or lead. But he does not seem to have known the cause: gonorrhoea, nor the real character of the obstacle: stricture formed by scars; bougies as we have them, *solide sounds* for the dilatation of strictures were *out of the question* (Milne). Strictures by scars in the urethra were not discovered till the introduction into science of the pathologic anatomy (Morgagni's: »De sedibus et causis morborum per anatomiam indagati« 1761). A few years later clinic diagnosis and treatment began with John Hunter.

The observations of *Heliodoros* soon seem to have been forgotten. *Paullos Aiginetes* (7th century) and *Abulqāsim* (11th century) mention no other causes of urinal retention than calculi in the neck of the bladder or urethra.

Many of the sounds may have been used at the membrane puncture in the operation which forensic medicine of to-day calls criminal abortion. The operation was used to a great extent by the Greeks as well as the Romans from the very same motives which twenty years ago *Emile Zola* complained in his novel »Fécondité«. This was not then considered as a crime — partly out of the theory that the life of the fetus only began with the birth. *TERTULLIAN* spoke violently against this in his sermon »De anima« and asserts referring to the operations performed in such cases that the life of the fetus begins in utero; he mentions in his sermon no less than four instruments used by the surgeons for the mutilation of the fetus.

I will now enter more fully upon the consideration of one of the instruments which is of more than usual interest: Pl. III, 23. Though the active part of it was broken and was not found I believe that it is an *Arabic eye instrument for depression of cataract*, an operation which was practically the only one known till in 1752 *Daviel* discovered the

principle of the best operation: the removal of the cataracted lens. The depression of cataract was performed by puncturing the membranes outside the cornea with the triangular sharp point of a *strong* bronze needle fitted with a handle; the point of the needle was brought up to the upper edge of the lens, which was then forced down to the bottom of the eye; the first step the puncture of the membranes outside the cornea was often made with the point of a lancet.

How can I make it likely that the broken instrument 23 has been a depression needle? It cannot be proved, as the sharp part of the instrument is wanting; but I have the following facts to support my opinion:

1) The diameter of the square handle 4 mm is about the same as in the opthalmic instruments of the present day; I do not however lay great stress upon this point.

2) The proportion between handle and shaft (Fig. 5) corresponds with some Arabian diagram pictures (Fig. 4) of depression needles in Abulqāsim's textbook of surgery (11th century); in spite of the prohibition of the Koran against images, the work is illustrated in the oldest manuscripts perhaps by Christian copyists who have seen the Arabian instruments.

In the Latin translations of Abulqāsim (younger manuscripts and incunabel prints) the illustrations become more and more fantastic, while they are arbitrarily simplified in Leclerc's French translation, whose drawings were lent by Gurlt.

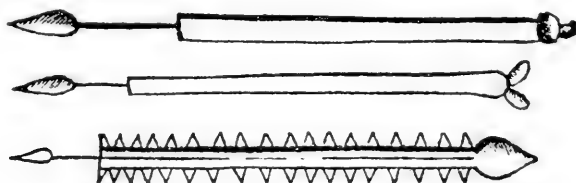


Fig. 4.

The picture of the Channing Abulqāsim edition (1778) of three Arabic couching needles for cataract from MS. Huntingdoniensis, number 156, Bodleian Library in Oxford (after Karl Sudhoff).



Fig. 5.

The instrument Pl. II, 23 photographed in such a position that one of the four edges is seen along the middle axis while the sawtoothed outlines of the upper and lower edge are seen in profile.

From fig. 5 will be seen the great resemblance between our number 23 and the lowest picture in fig. 4 from the Arabian MS. in Oxford. This fact makes me agree with Mr. Hirschberg that the sawtoothed outlines of the latter are only an unsuccessful drawing of the decoration of the handle. The same is the case with the reproduction of the stem of the instruments in the two lower pictures in fig. 4 as a thin line; even made of steel they would have been too slender. Made of bronze the stem ought like ours, be 2 mm. The ancient authors say expressly that the cataract couching needle (always bronze) must be *strong*; for this reason the puncture with the cataract needle itself through the membranes of the eye was often difficult, and therefore performed by the Arabs with a scalpel point as the Mohammedan cataract couchers still do in India today (R. H. Elliot).

3) One end of the handle is provided with a knob of 2 mm diameter, and seems likely to be made for a preparatory act in the depression such as it is described by Antyllos, by Paullos Aiginetes and by many Arabian surgeons. Local anæsthetics were not known, the operation was painful, the eye made an escaping movement upwards by which the surgeon might risk making a wrong puncture. In order to prevent this accident, both Greek and Arabian authors advised the operator first *to make with the knob of the handle a dent* in the surface of the eye where the puncture was to be made; then turn the instrument and make the puncture exactly in the dent. According to Hirschberg, Salah Ad-Din advised first to dip the knob into an antimonial paint by which the dent became a black spot.

According to Mr. Sudhoff similar end knobs as those seen in fig. 4 and fig. 5 may be found as decorations on pictures of Arabic tooth instruments in the Latin incunabel editions; but none of those drawn in his work, have «sawtoothed» outlines and in the only one which could be considered (Sudhoff fig. 32) only the handle is of bronze in which a steel instrument is placed. Our instrument, like all ancient cataract couching needles, is wholly of bronze.

Arabic surgical instruments do not seem to exist in European museums. At any rate no special journal of the history of medicine contains anything about this; and illustrated accounts of medical history contain only diagrams from the above mentioned Mediæval manuscripts. It is possible that the very durable old bronze instruments are handed down to the next generations and are used to this very day. At any rate medical textbooks from the middle ages (in printed copies) are still in use by such Arabian physicians as have not acquired modern medical education from the French in Algiers and Beirut and from the English in Cairo. Of the Arabian instruments in Pl. III, I believe 11 and 23 to be the rarest.

The Greco-Roman instruments which I have shown on the contrary can no longer be called great curiosities. Besides at Herculaneum and Pompeji there have later been found many similar ones in Switzerland, France and England, as well as in the Rhine and Danube countries. The «millimeter scale» must however be very rare. I have not found a single measure scale, still less so any with so fine divisions, on the hundreds of illustrations of Greco-Roman surgical instruments in Deneflé, Gurlt, Milne and Védrenes, which I have examined. It is true, such a one on account of the patina-layer might easily escape attention.

My explanation of the repeated appearance of the Roman netting needle among the Greco-Roman surgical instruments may, I believe, be accepted as a slight increase in our knowledge of medical archæology.

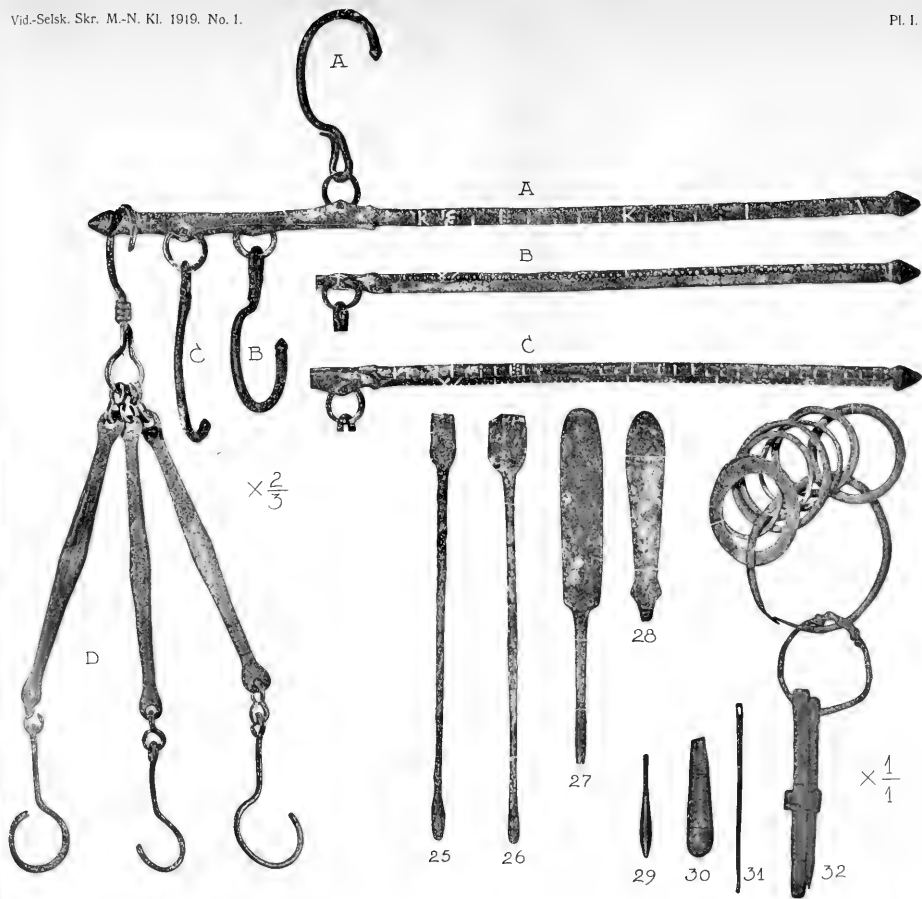
LITERATURE.

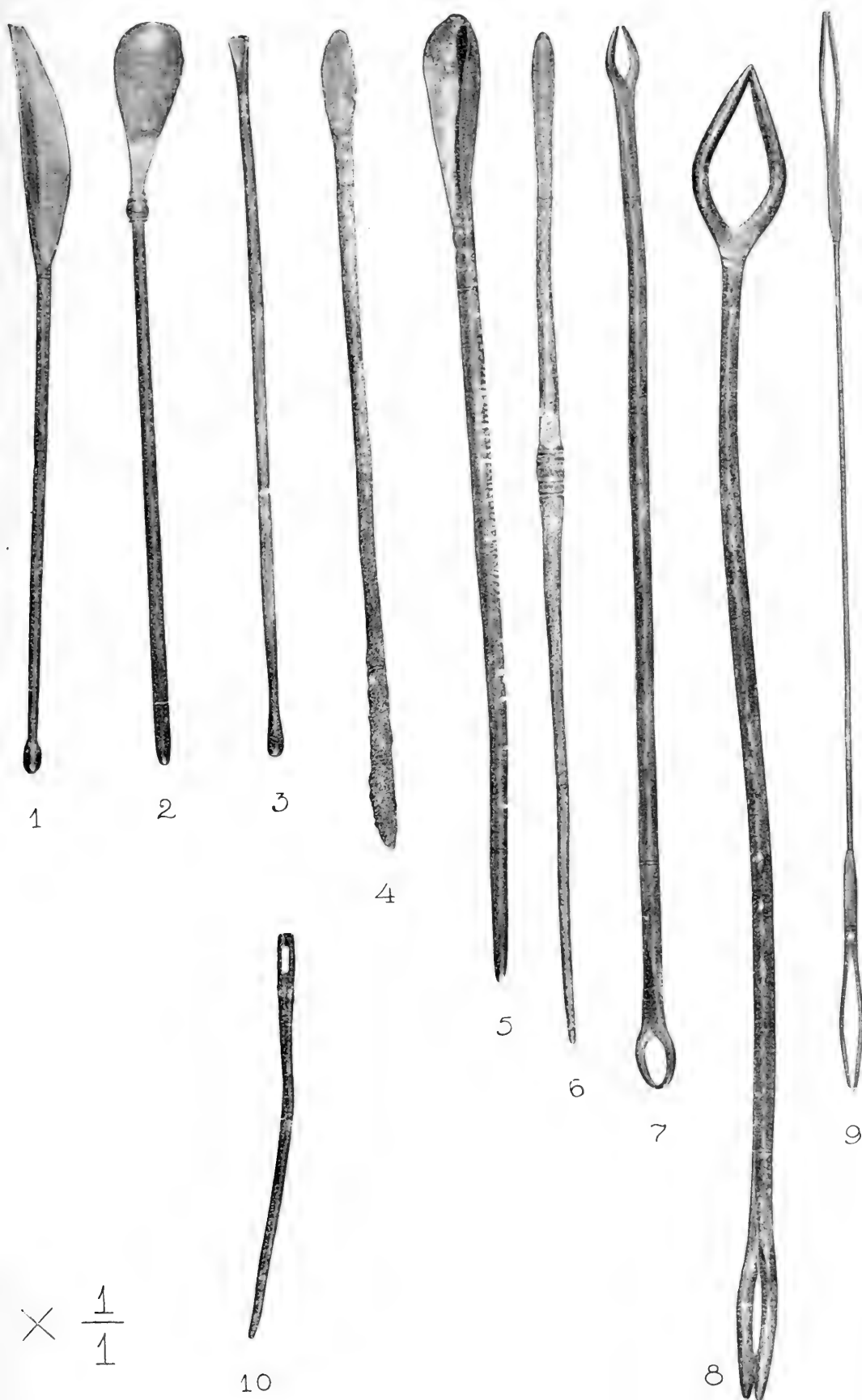
1. Abulqāsim. La chirurgie d'Abulcasis. Traduite par le Docteur Lucien Leclerc. Paris 1861.
2. Johan Bergman. Pompeji, 2 Uppl. Stockholm 1915.
3. Karl Bædeker. Palestine et Syrie. 4e Ed. Leipzig 1912.
4. Hugo Blümner. Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste bei Griechen und Römern. Leipzig 1912.
5. Celsus. Traité de Médecine de A. C. Celse. Traduite par le dr. A. Védrières. Paris 1876.
6. Ch. Daremberg, Edm. Saglio et Edm. Pottier. Dictionnaire des Antiquités Grecques et Romaines. T. I, III et IV, Paris 1877—1911.
7. Deneffe. Étude sur la trousse d'un chirurgien Gallo-Romain du IIIe siècle. 1893. H. Caals, Éditeur, Anvers
8. Deneffe. Les oculistes Gallo-Romains au IIIe siècle. 1896. H. Caals, Éditeur, Anvers.
9. R. H. Elliot. The Indian Operation of Couching for Caract. 1917. H. K. Lewis & Co. London.
10. E. Gurlt. Geschichte der Chirurgie, B. I., Berlin 1898.
11. Jul. Hirschberg. Geschichte der Augenheilkunde in Graefe-Saemisch: Handbuch der gesammten Augenheilkunde. 2te Aufl. B. XII, 2, 1899. B. XIII, 1908, Leipzig.
12. E. Löffler. Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. 1918. B. G. Teubner, Leipzig.
13. J. S. Milne. Surgical instruments in Greek and Roman Times. Oxford. 1907.
14. Holger Mygind. Hygiejniske Forhold i Oldtidens Pompeji. København 1918.
15. Karl Sudhoff. Beiträge zur Geschichte der Chirurgie im Mittelalter. Zweiter Teil 1918. Johan Amrosius Barth, Leipzig.

4

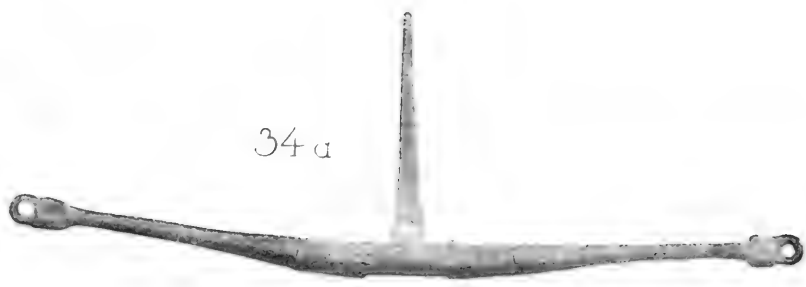
D











$\times \frac{1}{4}$



$\times \frac{2}{1}$

A PALMYRENE MAN'S NAME IN ARABIC TRANSCRIPTION ON A SURGICAL BRONZE INSTRUMENT

BY
A. FONAHN

(WITH 2 FIGURES IN THE TEXT)

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE 1919. No. 2)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

CHRISTIANIA
IN COMMISSION BY JACOB DYBWAD

1920

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 7de mars 1919 ved dr. S. Holth.

Among some surgical bronze instruments, formerly belonging to the Palestinean and Syriac collection of the Russian Baron v. USTINOW, and now in the possession of the Norwegian ophthalmologist Dr. med. S. HOLTH (Kristiania) is found a σπαθομήλη provided with a stamped mark showing Arabic characters.

In connexion with Dr. Holth's demonstration of the other bronze instruments in the Scientific Society of Kristiania the above mentioned Arabic inscription will in the following be separately dealt with.

As an introductory remark should be mentioned that these bronze instruments including the spathomele, according to information in the sale catalogue, »were found in and near Askalon«. Of course, this may not exclude that the instruments have originally been manufactured in other places; and indeed, a closer examination of the inscription on the spathomele might turn the attention in the direction of another place for the origin of this instrument, at least, viz. Palmyra.

I am unable to fix the date of the manufacture of the spathomele. The inscription gives no date; from the form of the characters in the inscription hardly anything absolutely sure regarding a precise date can be concluded, nor does the configuration of the instrument itself give any accurate information concerning that point. Yet, I will not deny that an experienced scholar of Arabic epigraphy or paleography may be able to fix a comparatively narrow space of time for the make of the said bronze instrument. The fact that the spathomele is inscribed with a personal name (may be that of the manufacturer) which only has been found in Palmyrene inscriptions might lead to the supposition that the instrument has been made within the space of time, in which the Palmyrene inscrip-



Fig. 1. A Palmyrene spatula sound with a stamped mark showing Arabic characters in alto riliavo. Size 1/1.

tions were written. This space of time reaches from the year 9 B.C. (= 304 of the Seleucid era) till A.D. 272; the splendid period of Palmyra belongs to the second and third century, from which time most of the Palmyrene inscriptions date.

Though Palmyra was very likely originally founded by Arabs, and the bulk of its population continued to be Arabic, the written language was the Aramaic, and the alphabet used was the Palmyrene, sometimes followed by Greek translation and transcription of Palmyrene names.

That the spathomele should have been made before the above mentioned year 272 A.D. is impossible, because the oldest known (North) Arabic inscription, that of Nemāra, from 328 A.D., is still written in Nabataean characters — the real (North) Arabic characters being at that time not yet developed. The oldest inscriptions in true Arabic writing date from 512 A.D. (Zebed) and 568 A.D. (Ḥarrān). Though the characters in these old inscriptions are very like the later developed Cufic, generally the oldest writing resembles more the naskhī, the Arabic writing of our days. The Cufic was chiefly in use the IX, X, XI and XIIth centuries.

In the VIth cent. the Arabic writing was known in Syria. One of the oldest Arabic inscriptions is found at Qasr al-Akhwīn, N.E. of Palmyra (dating from 728—729 A.D.); another at Qasr al-Ḥeir, S.W. of Palmyra (dating from about the same time).

The diacritical points found in the inscription of the spathomele were in use very early in Arabic writing; the two points marking the »t« (ﺕ) is seen e. g. in writing from 708 A.D., placed in a horizontal line above the »t«, or more or less obliquely.

As the spathomele-inscription has a somewhat Cufic appearance, the main impression however being that of naskhī, we might be inclined to fix the writing to the beginning of the »Cufic period« (IX cent. A.D.). Yet, it may date from a later time. There may also be diversions of opinion about the »intersected« alif, and the time of its appearance.

Another point is to be noted and discussed: is it probable that there existed in Palmyra, after its destruction, a manufactory for surgical instruments, as is possibly indicated by our instrument having a trademark? As long as Palmyra was a very important trade-centre and the meeting-place of the trade-routes from the countries on the Roman Empire, the Phoenician ports, from North- and South Arabia, and from the countries on the Persian Gulf — at that time it would be very natural to suggest the existence of manufactories of surgical instruments in the great trade-centre. After 272 Palmyra lost its importance as a centre of trade; yet, it continued existing as a town, until it was again destroyed by the Arabs in

744 A.D. Of course, nobody can deny the possibility of surgical instruments being manufactured in the town during this time.

According to E. Br. Cooke (see the article »Palmyra« in the *Encycl. Britan.*): »It (Palmyra) was still a wealthy place as late as the 14th century«.

A further point is that the instrument may have been made by a manufacturer having a Palmyrene name, but living outside Palmyra in a place where the Arabic alphabet was used — but where and when? Here again we have to ask an Arabic paleographer.



Fig. 2.

The Arabic inscription of the *σπαθομήλη*. — In photographic reproduction and enlarged size ($\frac{3}{1}$).

Now, returning to the inscription itself, this consists of only six characters:

أعكاب

all Arabic, and with the exception of the third one, the ع, of a type like the modern characters. The ʿain is more like the Cufic ʿain with a quadrangular body; the ا is straight, the ب is written above the base-line of the other characters and intersecting the alif in front of it, or rather placed on the top of it; the ك looks perhaps a little antiquated.

One might be inclined, at the first sight, to regard the instrument as a modern forgery, just because of this rather modern look of the inscribed characters; yet, if that were so, the forger would certainly have tried to imitate old Cufic characters throughout, or another kind of old Semitic alphabets e. g. the Palmyrene, since the name is Palmyrene. Also the patina of the bronze is of the real old kind which cannot be imitated.

The Arabic characters on our instrument are provided with the necessary diacritical points, but they have no vowel-signs. Therefore we have to ask: how shall the inscription be vocalized?

As far as I can see, there is no possibility of translating it assuming that it represents an Arabic word or sentence; nor can it be interpreted as an Arabic nomen proprium.

I have therefore been led to the supposition that the inscription represents a non-Arabic word or sentence, transcribed with Arabic characters.

Searching about, I came across an Aramaic nomen proprium masc. among the Palmyrene inscriptions, a noun strikingly like our Arabic inscription.

Transcribing the Palmyrene characters into Hebrew, the word reads as follows:

עתעקב, also עתיעקב and אתעקב, with Greek transcription: Ἀθῑακᾶβος (found only in the genitiv case: αθῑακᾶβου).

We do not know how to vocalize correctly these different forms of the same word.

They are found in some Palmyrene inscriptions, one of which is dated A.D. 56, another A.D. 181, a third one A.D. 218.

The inscription of A.D. 56 (vide de Vogüé: Syrie Centrale. Inscriptions Sémitiques, page 38 — copied by Waddington) runs as follows:

קברא דנה בת עלמא
די עת עקב בר גדיא
בר עת עקב דימן פחד
בני מיתא דיבנא
בחיוהי ליקרה וליקר[ה]
בנורו עלגדיא אבנ[ה]
בירה ניסן שנת 367

Translation by de Vogüé:

»Ce tombeau, demeure éternelle, est celui de A'thiaqab, fils de Gadia, fils de A'thiaqab, d'une fraction de la tribu des Beni-Maitha, qu'il a bâti de son vivant, en son bonheur et en l'honneur de ses enfants, pour Gadia, son père. Dans le mois de Nisan de l'année 367 (avril 56 apr. J.-C.)«.

De Vogüé adds the remark: עתעקב = *Athi sustinuit*.

The inscription from A.D. 181 (vide Lidzbarski: Hdb. der nordsemitischen Epigraphik) is published for the first time by Dav. Heinr. Müller in »Palmyrenische Inschriften nach Abklatschen des Herrn. Dr. Alois Musil (Denkschr. d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien, Phil.-hist. Cl. XLVI, III) 1898; it runs:

בירה אדרשנת 492
אחבר לשמש
בר לשמש בר תימא מן
מערתא דה לברי בר זברעתה
בר עת עקב אבסדרא דנה
וגרמ חיא די בתרהשתא
עד כפתא מקבלחא

On the fifth line we meet the name: bar 'Ati'aqāb = son of 'A., as a part of a name beginning on the fourth line.

I third one, undated, has been published by J. Enting in »Epigraphische Miscellen«, Sitz. Berichte d. Preuss. Akad. 1885:

חבל רפביל בר עת עקב
בר זכר זבדעתה אראש
חבל

The form **אתעקב** is found e. g. in D. H. Müller: »Palmyrenica aus dem British Museum II W. Z. K. M. VIII p. 11—16.

A fourth inscription has been published for the first time by Waddington, in his: Inscr. Syr., as Nr. 2620. De Vogüé has added a French translation. This inscription is especially interesting, because it is followed by a Greek text giving the Greek transcription of the Palmyrene name **עתעקב**.

[קב רא דנ]ה בנא מן [כיסה]
[ילים]אור[לים רפ]אבול [ב]ר עת עקב [בר רפא]בול
בר עת עקב [קב] דימתקרא נב[ובל]
[בירה ט]בת שכת 529

»Ce tombeau a été construit, de ses deniers, par Julius Aurélius Rephabol, fils d'Athiaqab, fils de Rephabol, fils d'Athiaqab, surnommé Neb[obal]. Dans le mois de Thebet de l'année 529 (janvier 218).«

— — — *Ἀὐτοῦ ἑλίου ῥεφάβωλος Ἀθηακάβου ῥεφάβωλου τοῦ Ἀθηακάβου τοῦ ἐπιταλουμένου Ν[εβοβάβου]* — — — *Ἀδυναίη τοῦ ἑλίου*

Remark (by de Vogüé): **עתעקב** = *Ἀθηάκαβος, Athi sustinuit.*

There exists also an hypokoristikon of the name in the form of **עתעי** ('At'ai or 'Ati'ai?), found in a Palmyrene inscription copied by Waddington; we shall reproduce it according to the Hebrew transcription and French translation by de Vogüé (l. c. page 67):

עלת ד[ה] לברין שמה
לעלמא עבדת ומודיא
עלא בר[ת] ז[כר] בידא בר עתעי
רפ על[ה]ן[ה]י ו[על] היא ידי
בר תימרצו[ת]ימא[ב]עלה
ועל ח[י]א ב[ניה]ן לעלמא
יום[ת]שנע לירה . . . בש[נת] . . .

Cet autel a été fait et consacré à celui dont le nom est béni dans l'éternité par A'la, fille de Zebeida, fils de A'thai, médecin, pour son salut et le salut de Jaddai, fils de Thaimartso, fils de Thaimé, son mari, et pour le salut de leurs enfants à toujours. La neuvième jour du mois de . . . année . . .

The diminutivum 'At(i)?ai is here the name of a physician, if **רפא** is = **רופא**.

When placing the above mentioned Palmyrene personal name in its variants and Greek transcription:

עתעקב
 עתיעקב
 אתעקב
 Ἀθηάαβος

beside the Arabic اتعكاب

a striking parallelism is shown. Though we may regard the ע, as imital, as the more correct writing, we meet also א instead of the ע; in the Arabic word we have א corresponding to the Aramaic initial א. The second and the third character are alike in Palmyrene and Arabic; the fourth is different, because Arabic ك corresponds to Aramaic כ, not to ק. Yet, we are able to point to instances showing כ interchanging with ק in Aramaic; thus כ stands for ק in the words יכטלון, כיצא, ברצי. Often the Hebrew ק is parallelized by grammarians with Arabic ق; therefore somebody may object to the identification of اتعكاب with אתעקב on that score. Yet, it must be remembered that the Hebrew ק is reckoned among the palatals, like כ, while the Arabic ق is a strongly articulated guttural.

In our Arabic inscription the א written after the ك shows that the vowel following ك is a long ā. The last character ب corresponds with the Palmyrene-Aramaic ב of the אתעקב.

Consequently, there should be no real objection to parallelizing the اتعكاب with the Palmyrene nomen proprium אתעקב or עתעקב.

Now, how should this personal name be pronounced?

The Palmyrene is evidently composed of two components; the first is עתי or אתי or עת, the second עקב.

The first one is met with in other compound Aramaic and Canaanite names (עתנשא, עתנתן, עתנורי) — also in the form of עתא (as final component, e. g. in זבדערתא and עתרתא), Hauraninscript., Waddington).

De Vogüé thinks that this עת »Athi« or »Atha« (he seems to prefer the first reading) is derived from עת = *tempus opportunum*, and designates »un genie bienfaisant, sorte de *Bonus-Eventus*«. Under the name עתנתן [‘Ati-nātān] he remarks: »Nous retrouvons ici la déesse »Athi«.

He tells, how in Phrygia they worshipped a male moon-god, a »*Lumus*«, under the name of *Athys*. He is disposed to identify this *Athys* with the deity עתי [‘Ati] discovered in the inscriptions of Palmyra, but adds guardedly: »je n’oserais l’affirmer«.

Further he says of the »Athi« that it is »une divinité du genre de *Tvχι*, une divinité présidant à la succession des temps et des destinées humaines, rôle qui, d'après les croyances de l'antiquité, rentre dans les attributions lunaires«.

He reminds of the divinities Ἄθας (mentioned by Philon of Byblos), Ἐθας (found by Waddington in the Hauran-inscriptions), and Ἄθη, compares them with אֶתִּי and אֶתִּי, and thinks that they are all variants of the same word.

This moon-god has, he says, been worshipped in Syria, Mesopotamia and partly Asia minor during a very long space of time. — In this connexion one might be tempted to call attention to the old Sumerian word for »moon«, the *iti* or *itu*, a word which the sumerologist Dr. C. J. Ball (Oxford) thinks may be compared with the *Aithō* in Suidas, who says: »Αἰθῶ . . . ἡ σελήνη παρὰ Νεβδαίου«, and the *Aithē* in Hesychius.

The word »Athi«¹) has also, according to de Vogüé, been found in a Syriac phragment published by Cureton, designating »un personnage mythique de l'Adiabène«, a mythical being worshipped by the Syrians.

From the Greek transcription Ἀθῆαζαβος we should be able to find out the vocalisation of the א in אֶתִּי (אֶתִּי) by means of the Greek η; however, again we have to ask the Greek philologist: how was the ι pronounced? as an *e*- or an *i*-sound?

Now, regarding the second component of the Palmyrene name, the אֶתִּי, we must be allowed to conclude from the Greek -άζαβος that the א should be furnished with an *a*-vowel (certainly a pathakh — there is no alif after the Arabic ع), and from the Arabic transcription that the א had a qāmeṣ.

As a result of all these considerations we may be allowed to regard the inscription on the spathomele as an Arabic transcription of the Palmyrene-Aramaic personal name אֶתִּי אֶתִּי (or אֶתִּי אֶתִּי) and romanize it:

Ati'akāb,

yet remembering that the vowel *i* is uncertain.

¹ De Vogüé transcribes the word differently in different places in his work »Syrie Centrale. Inscript. Sémit.«

Printed 24th Marx 1920

UNTERSUCHUNGEN ÜBER
DIE AXIOME DES KLASSENKALKULS
UND ÜBER:PRODUKTATIONS-UND SUMMATIONS-
PROBLEME, WELCHE GEWISSE KLASSEN
VON AUSSAGEN BETREFFEN

VON

TH. SKOLEM

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NAT. KLASSE. 1919. No. 3)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD
1919

Fremlagt i den mat.-naturvid. klasses møte 25. jan. 1918 av prof. Sylow.

In der letzten Zeit hat man sich sehr viel dafür interessiert die logischen Abhängigkeiten von Aussagen zu untersuchen. Besonders hat man die Axiome der Geometrie studiert; man hat versucht die zwischen diesen Axiomen bestehenden oder nicht bestehenden Abhängigkeiten zu finden. Zum Teil hat man auch angefangen andere Axiomsysteme zu untersuchen.

Im ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit will ich zeigen, wie man in sehr einfacher Weise den logischen Zusammenhang der wichtigsten Axiome des Klassenkalküls (Gebietekalküls) finden kann, obwohl ich allerdings diese Untersuchung hier nicht vollständig durchführe. Es soll übrigens eine Arbeit über dieses Problem von E. V. HUNTINGTON existieren. Die Arbeit Huntingtons kenne ich nicht; L. LÖWENHEIM erklärt sie aber in Mat. Annalen, B. 76, p. 458 für verfehlt.

Der größte Teil dieser Abhandlung handelt von Produktations- und Summationsproblemen, welche Aussagen der logischen Algebra angehen. Das sind übrigens natürlich eben Probleme derselben Natur wie die zuerst genannten; nämlich Fragen, welche die logische Abhängigkeit von Aussagen betreffen.

Die im folgenden benutzten Bezeichnungen sind größtenteils die SCHRÖDER'schen.¹ Aus typographischen Rücksichten benutze ich aber nicht das Schröder'sche Zeichen der Subsumtion, sondern gebrauche statt dessen das gewöhnliche mathematische Zeichen für kleiner oder gleich. Ich schreibe also

$$a \leq b \quad \text{oder auch} \quad b \geq a$$

um auszudrücken, daß die Klasse a in der Klasse b enthalten ist. Es soll $a = b$ wie üblich die Identität der Klassen a und b bedeuten, während $a < b$ bedeuten soll, daß a echter Teil von b ist, d. h. a in b enthalten, aber nicht umgekehrt. Ich schreibe

$$a \not\leq b$$

um auszudrücken, daß a nicht in b enthalten ist. Von den genannten Abweichungen abgesehen sind die Bezeichnungen immer die Schröderschen.

¹ E. SCHRÖDER, Algebra der Logik.

§ 1.

Die wesentlichen Axiome, welche dem Klassen- oder Gebietekalkül zu Grunde liegen, sind bekanntlich die folgenden:

I. $a \leq a$.

II. Aus $a \leq b$ und $b \leq a$ gleichzeitig folgt $a = b$ und umgekehrt.

III. Aus $a \leq b$ und zugleich $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

IV_×. Es gibt eine Klasse, die Nullklasse, die in jeder Klasse enthalten ist.

IV₊. Es gibt eine Klasse, die Allklasse, die jede Klasse enthält. Man beweist mit Hülfe von II leicht, daß bloß eine Null- und bloß eine Allklasse existieren kann. Sie werden beziehungsweise mit 0 und 1 bezeichnet.

V_×. Für zwei beliebige Klassen a und b gibt es immer eine Klasse, die sowohl in a wie in b enthalten ist und andererseits jede Klasse x enthält, welche sowohl in a als in b enthalten ist.

Man beweist mit Hülfe von II, daß auch nur höchstens eine solche Klasse existieren kann; sie wird das Produkt von a und b genannt und durch ab bezeichnet.

V₊. Für zwei beliebige Klassen a und b gibt es⁶ mindestens eine Klasse, die sowohl a als b enthält und andererseits in jeder Klasse x enthalten ist, welche sowohl a als b enthält.

Es kann dann infolge II nur eine solche Klasse existieren; sie wird die Summe von a und b genannt und durch $a + b$ bezeichnet.

VI. Zu jeder Klasse a gehört mindestens eine Klasse b , sodaß nur die Nullklasse sowohl in a als in b enthalten ist, und gleichzeitig nur die Allklasse sowohl a wie b enthält.

VII_×. $(a + b)(a + c) \leq a + bc$ für beliebige Werte von a , b und c .¹

VII₊. $(a + b)c \leq ab + ac$ für beliebige Werte von a , b und c .¹

Man stellt bisweilen auch das folgende Axiom auf: Es ist $0 < 1$, also die Nullklasse echter Teil der Allklasse. Es hat doch wenig Bedeutung dieses Axiom hier in Betracht zu ziehen. In der angegebenen Form hat es nur dann einen Sinn, wenn sowohl eine Null- wie eine Allklasse existieren. Man könnte es deshalb besser so ausdrücken: Wenn sowohl eine Null- wie eine Allklasse vorhanden sind, so sind sie verschieden (d. h. entweder gibt es keine Allklasse, oder es gibt keine Nullklasse, oder sie existieren beide und sind verschieden). Dieses Axiom ist mit dem folgenden gleichbedeutend: Es gibt wenigstens zwei verschiedene Klassen. Dieses Axiom muß aber immer erfüllt sein, wenn auch nur eines der übrigen Axiome des identischen Kalküls nicht erfüllt ist; denn hat man mit nur einer einzigen Klasse zu tun, so gelten ja alle die übrigen Axiome. Sind die übrigen Axiome gültig, kann das Klassensystem sowohl aus einer als auch aus mehreren Klassen bestehen. Hierdurch ist alles erledigt, was das zuletzt erwähnte Axiom betrifft.

¹ Da auch die umgekehrte Subsumtion gültig ist, was aus V_×, V₊ in Verbindung mit III leicht gezeigt wird, so kann man statt des Subsumtionszeichens gern das Gleichheitszeichen schreiben.

Man beweist bekanntlich mit Hülfe von den beiden letzten Axiomen, daß zu jeder Klasse a nur eine einzige Klasse b gehören kann, welche die in VI geforderte Eigenschaft hat. Diese wird dann mit \bar{a} bezeichnet und das Negat von a genannt.

Die folgenden Untersuchungen sollen nur die Axiome IV bis VII betreffen.

Theorem 1. Unter Voraussetzung der Gültigkeit von I, II, III sind die Axiome IV_{\times} , IV_{+} , V_{\times} , V_{+} von einander vollständig unabhängig.

Daß eine gewisse Zahl von Sätzen von einander *vollständig unabhängig* sind soll bedeuten, daß jede formal mögliche Kombination von Gültigkeit und Ungültigkeit der Sätze auch wirklich möglich sind. Jede solche Kombination kann passend durch eine Reihe von Zeichen $+$ und $-$ bezeichnet werden, indem jede Stelle der Reihe einen der Sätze markiert.¹ Im vorliegenden Falle können wir also alle formal möglichen Kombinationen durch Reihen von 4 Zeichen $+$ oder $-$ bezeichnen, sodaß z. B. die Reihe $(+, +, +, +)$ die Gültigkeit aller 4 Sätze bedeutet, $(+, -, +, +)$ dagegen, daß IV_{\times} , V_{\times} und V_{+} gültig sind, IV_{+} aber ungültig, usw. Um dann die Richtigkeit des Theorems zu beweisen haben wir nur ein Beispiel jeder der $2^4 = 16$ möglichen Kombinationen von $+$ und $-$ zu zeigen.

Jedes System von Klassen läßt sich durch eine Figur, aus Punkten und Strichen bestehend, darstellen, indem die Punkte die Klassen und die Striche die Subsumtionsrelationen darstellen.² Die Striche müssen dann eine Richtung haben oder mit einem Pfeil versehen sein. Um aber die Hinzufügung von Pfeilen zu vermeiden kann man verabreden, daß die gezeichneten Striche immer von links nach rechts gerichtet sein sollen. Ich gebe für jede der 16 Beispiele, das erste triviale ausgenommen, eine solche illustrierende Figur, die hoffentlich ohne nähere Erläuterung verständlich sein wird.

Die Beispiele sind:

1) $(+, +, +, +)$. Eine einzige Klasse. Übrigens paßt hier jede «Gruppe» von Klassen in Bezug auf die drei Operationen des identischen Kalkuls.

¹ Siehe z. B. die Abhandlung von RALPH D. BEETLE: On the Complete Independence of Schimmack's Postulats for the Arithmetic Mean. Mat. Ann., B. 76, p. 444.

² Ich habe dies in einem Vortrag, gehalten am dritten skandinavischen Mathematikerkongreß zu Kristiania 1913, erwähnt. Siehe den Bericht des Kongresses, p. 163.

2) $(+, -, +, +)$.

Eine unendliche Reihe von Klassen, jede echter Teil der folgenden, also $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$. Diese Reihe wird durch folgende Figur abgebildet:

$$\dot{a}_0 \text{---} \dot{a}_1 \text{---} \dot{a}_2 \text{---} \dot{a}_3 \text{---} (\infty).$$

3) $(-, +, +, +)$.

Eine unendliche Reihe von Klassen, jede echter Teil der vorhergehenden, also $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$. Diese Reihe wird durch die Figur

$$(\infty) \text{---} \dot{a}_3 \text{---} \dot{a}_2 \text{---} \dot{a}_1 \text{---} \dot{a}_0$$

abgebildet.

4) $(-, -, +, +)$.

Eine nach zwei Seiten unendliche Reihe von Klassen, wo jede Klasse echter Teil der folgenden ist, also $\dots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \dots$. Die zugehörige Figur wird:

$$(\infty) \text{---} \dot{a}_{-2} \text{---} \dot{a}_{-1} \text{---} \dot{a}_0 \text{---} \dot{a}_1 \text{---} \dot{a}_2 \text{---} (\infty).$$

5) $(+, +, -, +)$.

Eine unendliche Reihe von Klassen $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ nebst 3 anderen Klassen b_1, b_2, c , die so beschaffen sind, daß jede der Klassen a_n sowohl in b_1 wie in b_2 enthalten ist, während ausserdem $b_1 \leq b_2, b_2 \leq b_1, b_1 < c$ und $b_2 < c$ ist. Die zugehörige Figur wird:

$$\dot{a}_0 \text{---} \dot{a}_1 \text{---} \dot{a}_2 \quad (\infty) \begin{array}{c} \swarrow \dot{b}_1 \\ \searrow \dot{b}_2 \end{array} \dot{c}$$

6) $(-, +, -, +)$

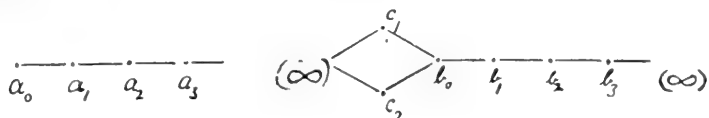
Drei Klassen a_1, a_2, b so beschaffen, daß $a_1 < b, a_2 < b$, während $a_1 \leq a_2$ und $a_2 \leq a_1$ ist. Also:

$$\begin{array}{c} \dot{a}_1 \\ \searrow \\ \dot{a}_2 \end{array} \dot{b}$$

7) $(+, -, -, +)$.

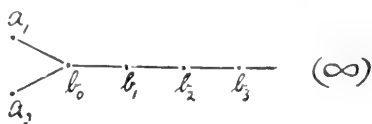
Zwei unendliche Reihen von Klassen $a_0 < a_1 < a_2 < \dots, b_0 < b_1 < b_2 < \dots$ nebst zwei Klassen c_1 und c_2 , die einerseits jedes a_n enthalten, anderer-

seits in jedem b_n enthalten sind, während $c_1 \leq c_2$ und $c_2 \leq c_1$ ist. Die Figur wird:



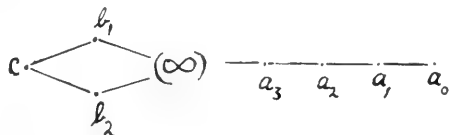
8) $(-, -, -, +)$.

Zwei Klassen a_1 und a_2 , für welche $a_1 \leq a_2$ und $a_2 \leq a_1$ stattfindet, in Verbindung mit einer unendlichen Reihe von Klassen $b_0 < b_1 < b_2 < \dots$, indem sowohl a_1 als a_2 in b_0 enthalten sind.



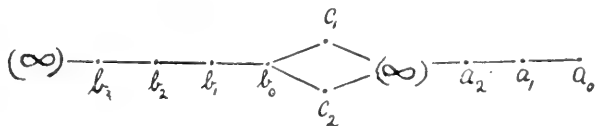
9) $(+, +, +, -)$.

Ein hier passendes Beispiel wird aus dem für Fall 5) angegebenen Beispiel dadurch erhalten, daß die Relation $>$ überall durch $<$ ersetzt wird. Die Figur wird dann:



10) $(-, +, +, -)$.

Ein hier passendes Beispiel wird aus dem unter 7) angegebenen Beispiel durch Ersetzung von $>$ durch $<$ erhalten. Die Figur wird:



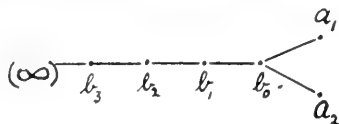
11) $(+, -, +, -)$.

Man braucht nur in dem für Fall 6) angegebenen Beispiel überall $>$ durch $<$ zu ersetzen, um ein hier passendes Beispiel zu haben.



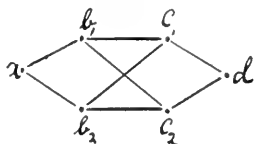
12) $(-, -, +, -)$.

Man ersetze in dem für 8) angegebenen Beispiel überall $>$ durch $<$.



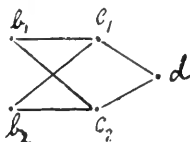
13) $(+, +, -, -)$.

Sechs Klassen a , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 und d . a ist in jeder dieser Klassen enthalten, während d jede der Klassen enthält. Weiter ist $b_1 < c_1$, $b_1 < c_2$, $b_2 < c_1$, $b_2 < c_2$, $b_1 \leq | b_2$, $b_2 \leq | b_1$, $c_1 \leq | c_2$ und $c_2 \leq | c_1$.



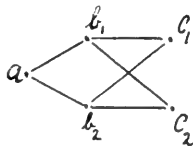
14) $(-, +, -, -)$.

Hier paßt das Klassensystem, das bloß aus den 5 Klassen b_1 , b_2 , c_1 , c_2 und d in dem vorigen Beispiele besteht. Die zugehörige Figur ist also :



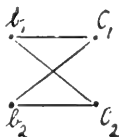
15) $(+, -, -, -)$.

Hier paßt das Klassensystem, das aus dem unter 13) angegebenen System entsteht, wenn d entfernt wird.



16) $(-, -, -, -)$.

Die 4 Klassen b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , welche in dem für Fall 13) angegebenen Klassensystem vorkommen, geben ein hier passendes Beispiel.



Die Beispiele sind so einfach als möglich gewählt. Sooft deshalb ein unendliches System von Klassen als Beispiel angegeben wird, ist ein Beispiel im Endlichen überhaupt nicht möglich. Für endliche Systeme von Klassen sind also die Fälle 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12 nicht möglich. Es gelten in der Tat für endliche Klassensysteme die Sätze:

1 \times). Aus der Gültigkeit des Axioms V_{\times} folgt die Gültigkeit des Axioms IV_{\times} .

1 $+$). Aus der Gültigkeit des Axioms V_{+} folgt die Gültigkeit des Axioms IV_{+} .

Wenn nämlich irgend zwei Klassen ein Produkt besitzen, so existiert auch für eine beliebige endliche Zahl von Klassen ein zugehöriges Produkt; wenn das Klassensystem endlich ist, gibt es deshalb ein Produkt von allen, welches dann die Nullklasse werden muß. Besitzen irgend zwei Klassen eine Summe, muß entsprechend eine Summe aller Klassen existieren, wenn das Klassensystem endlich ist, und diese Summe wird natürlich die Allklasse.

Weiter gelten aber für endliche Klassensysteme auch die Sätze:

2 \times). Wenn V_{+} und IV_{\times} gültig sind, so folgt die Richtigkeit von V_{\times} .

2 $+$). Wenn V_{\times} und IV_{+} gültig sind, so folgt die Richtigkeit von V_{+} .

Denn wenn IV_{\times} gültig ist, so gibt es Klassen, z. B. die Nullklasse, die sowohl in a wie in b enthalten sind, wenn a und b zwei beliebige Klassen sind. Diese sowohl in a als in b enthaltenen Klassen sind aber bloß in endlicher Zahl vorhanden, wenn das ganze Klassensystem endlich ist. Ist nun auch V_{+} gültig, gibt es eine Summe aller dieser Klassen, und diese Summe wird dann natürlich das Produkt von a und b , d. h. das Axiom V_{\times} wird gültig. — Entsprechend kann der Satz 2 $+$ bewiesen werden.

Wünscht man die 6 Aussagen IV_{\times} , IV_{+} , V_{\times} , V_{+} , VII_{\times} und VII_{+} zu untersuchen, so muß bemerkt werden, daß VII_{\times} und VII_{+} keinen allgemeinen Sinn mehr haben, falls die Axiome V_{\times} und V_{+} nicht erfüllt sind. Ich beschränke deshalb hier die Untersuchung auf den Fall, daß V_{\times} und V_{+} erfüllt sind — und außerdem wie früher die ersten Axiome I, II, III. Es gelten dann die folgenden Sätze:

Theorem 2. Wenn I, II, III, V_{\times} und V_{+} gültig sind, so folgt VII_{\times} aus VII_{+} und umgekehrt.

Beweis: Wenn $(a + b)c = ac + bc$ für beliebige Werte von a , b und c gültig ist, so folgt

$$(a + b)(a + c) = a(a + c) + b(a + c) = a + ab + bc = a + bc,$$

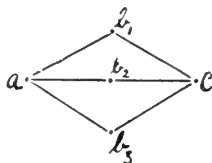
d. h. aus VII₊ folgt VII_×. Das umgekehrte wird genau dual entsprechend bewiesen.

Theorem 3. Die Axiome IV_×, IV₊ und VII sind unter Voraussetzung der Gültigkeit von I, II, III, V_× und V₊ von einander vollständig unabhängig.

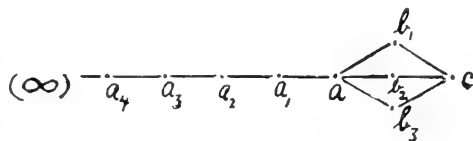
Beweis durch Exemplifikationen :

- 1) (+, +, +). Der identische Kalkül.
- 2) (—, +, +). Eine Folge von Klassen $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$ in inf.
- 3) (+, —, +). Eine Folge $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ in inf.
- 4) (—, —, +). Eine nach zwei Seiten unendliche Reihe von Klassen, wo jede Klasse in der folgenden als echter Teil enthalten ist: $\dots a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 \dots$

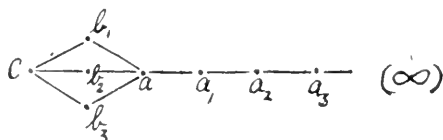
5) (+, +, —). Fünf Klassen a_1, b_1, b_2, b_3, c so beschaffen, daß b_1, b_2, b_3 einander gegenseitig nicht enthalten, während a in jeder dieser Klassen enthalten ist, und c jede der Klassen enthält.



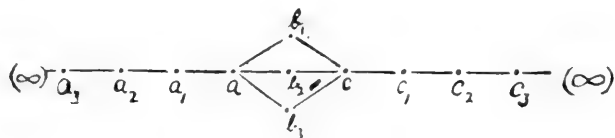
6) (—, +, —). Ein hier passendes Beispiel wird erhalten durch Hinzufügung einer unendlichen Reihe von Klassen $a_1 > a_2 > a_3 \dots$ zu den im vorigen Beispiele erwähnten 5 Klassen, wenn außerdem a_1 echter Teil von a ist.



7) (+, —, —). Wird in dem Beispiel für 6) überall $>$ durch $<$ ersetzt, erhält man ein hier passendes Beispiel:



8) $(-, -, -)$. Ein Beispiel wird erhalten durch Hinzufügung zweier unendlichen Reihen von Klassen $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ und $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$ zu den unter 5) erwähnten 5 Klassen, indem weiter a_1 Teil von a und c Teil von c_1 sein muß.



Will man das Axiom VI in Betracht ziehen, so setzt das die Existenz einer All- und einer Nullklasse voraus, indem es überhaupt keinen Sinn mehr hat, wenn IV_{\times} und IV_{+} nicht gültig sind. Es ist deshalb berechtigt die Untersuchung darauf zu beschränken, wie es mit den Axiomen V_{\times} , V_{+} und VI geht, wenn I, II, III, IV_{\times} und IV_{+} erfüllt sind, und weiter wie es geht mit den Axiomen VI und VII, wenn I, II, III, IV_{\times} , IV_{+} , V_{\times} und V_{+} erfüllt sind.

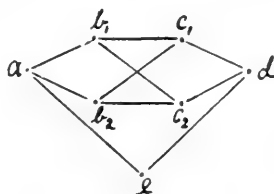
Theorem 4. Wenn I, II, III, IV_{\times} und IV_{+} erfüllt sind, sind die Axiome V_{\times} , V_{+} und VI von einander vollständig unabhängig.

Beweis:

1) $(+, +, +)$. Identischer Kalkül.

2) $(+, +, -)$. Drei Klassen a, b, c , für welche $a < b < c$ ist.

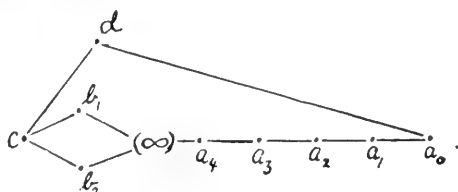
3) $(-, -, +)$. Ein hier passendes Beispiel wird aus dem Beispiel für Fall 13) des Theorems 1 dadurch erhalten, daß man eine Klasse e hinzufügt, welche a als echten Teil enthält, in d als echter Teil enthalten ist, keine der Klassen b_1, b_2, c_1, c_2 enthält und endlich auch in keiner dieser Klassen enthalten ist.



4) $(-, -, -)$. Hier paßt das Beispiel für 13) Theorem 1.

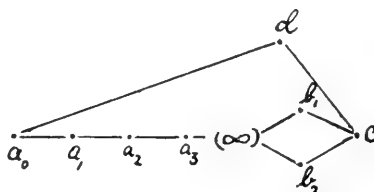
5) $(+, -, +)$. Ein Beispiel hierfür erhält man aus dem für Fall 9) des Theorems 1 angegebenen Beispiel durch Hinzufügung einer Klasse d , von welcher c echter Teil ist, während d echter Teil von a_0 ist, keine

der Klassen b_1, b_2, a_1, a_2, a_3 in inf. in d enthalten sind, und endlich d keine dieser Klassen enthält.



6) $(+, -, -)$. Dasselbe Beispiel wie für 9) Theorem 1.

7) $(-, +, +)$. Man brauche bloß in dem für 5) angegebenen Beispiel überall $>$ durch $<$ zu ersetzen.

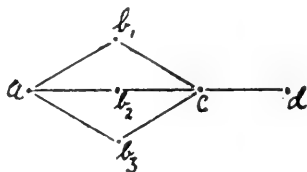


8) $(-, +, -)$. Dasselbe Beispiel wie für Fall 5) Theorem 1.

Theorem 5. Wenn I, II, III, IV \times , IV $+$, V \times , V $+$ gültig sind, so sind die Axiome VI und VII von einander vollständig unabhängig.

Beweis:

- 1) $(+, +)$. Identischer Kalkül.
- 2) $(-, +)$. Drei Klassen a, b, c , für welche $a < b < c$ ist.
- 3) $(+, -)$. Dasselbe Beispiel wie für Fall 5) Theorem 3.
- 4) $(-, -)$. Ein Beispiel wird aus dem für Fall 5) Theorem 3 angegebenen Klassensystem durch Hinzufügung einer Klasse d erhalten, wenn d die dort umfassendste Klasse c als echten Teil enthält.



Man könnte versuchen die Axiome VII so aufzufassen, daß sie nicht ihren Sinn verlieren würden, wenn die Axiome V nicht erfüllt sind. Man müßte dann das Gesetz $(a + b)c = ac + bc$ etwa so verstehen: Wenn für drei Klassen a, b, c sowohl eine Summe $a + b$ wie die Produkte ac

und bc und endlich auch die Summe $ac + bc$ existieren, so ist diese letzte Summe auch das Produkt von $a + b$ und c . So aufgefaßt könnten vielleicht die Axiome VII auch gültig sein, selbst wenn die Axiome V nicht erfüllt sind. Ich gehe aber hier nicht näher auf diese Fragen ein.

§ 2.

Es gibt, wie ich jetzt zu zeigen gedenke, einen interessanten Klassenkalkül, der den identischen Kalkül als Spezialfall enthält und in vielen Hinsichten bemerkenswert erscheint.

Unter einem «Ring» von Klassen können wir ein System von Klassen verstehen, für welches die Axiome V_{\times} und V_{+} ebenso wie natürlich die Axiome I, II, III gültig sind.¹ Ein Ring soll also eine Gruppe sein in Bezug auf Summen- und Produktbildung. Es muß aber bemerkt werden, daß die Summe $a + b$ zweier Klassen a und b eines Ringes R hier die kleinste sowohl a als b umfassende Klasse *innerhalb des Ringes R* bedeuten soll, und daß ebenso das Produkt ab die größte *innerhalb R* vorkommende Klasse bedeuten soll, welche sowohl in a als in b enthalten ist.

Es besteht dann der durch das folgende Theorem ausgedrückte bemerkenswerte Zusammenhang zwischen den distributiven Gesetzen VII_{\times} und VII_{+} einerseits und den Lösungen der Subsumtion $ax \leq b$ andererseits.

Theorem 6_{\times} . Hat innerhalb eines Klassenringes die Subsumtion $ax \leq b$ für beliebige Werte von a und b eine Lösung x_0 , welche jede Lösung dieser Subsumtion als Unterklasse enthält, so gilt die Gleichung $a(b+c) = ab+ac$ (und nach Th. 2 dann auch die Gleichung $(a+b)(a+c) = a+bc$) für beliebige Werte von a , b und c .

Ist der Klassenring außerdem endlich, d. h. besteht er bloß aus endlich vielen Klassen, so gilt auch das umgekehrte. Wenn also $a(b+c) = ab+ac$ ist für beliebige Werte von a , b und c innerhalb des Ringes, so hat die Subsumtion $ax \leq b$ für beliebige Werte von a und b eine Lösung x_0 , die jede Lösung enthält.

Beweis: Hat die Subsumtion $ax \leq ab+ac$ eine Lösung x_0 , welche jede Lösung derselben enthält, so ist $b \leq x_0$ und $c \leq x_0$, da ja $x=b$ und $x=c$ Lösungen dieser Subsumtion sind. Hieraus folgt aber dann $b+c \leq x_0$, woraus $a(b+c) \leq ax_0 \leq ab+ac$. Da selbstverständlich $ab+ac \leq a(b+c)$ ist, haben wir in der Tat $a(b+c) = ab+ac$.

Gehen wir jetzt umgekehrt von der Gültigkeit des Gesetzes $a(b+c) = ab+ac$ aus, und verstehen wir unter einer Maximallösung der Sub-

¹ F. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, p. 14.

sumtion $ax \leq b$ jede Lösung x , die in keiner umfassenderen Lösung enthalten ist. Es ist dann leicht zu sehen, daß wenn die Subsumtion eine Maximal-lösung besitzt, jede Lösung in dieser enthalten sein muß. Es sei x_1 eine Maximal-lösung und x_2 eine in x_1 nicht enthaltene Lösung. Dann müßte auch $a(x_1 + x_2) \leq b$ sein, weil $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2$, $ax_1 \leq b$ und $ax_2 \leq b$ sein sollte. Dies ist aber ein Widerspruch; denn $x_1 + x_2$ würde dann eine umfassendere Lösung der Subsumtion werden als x_1 , während x_1 a's maximale Lösung vorausgesetzt war.

Ist der Klassenring endlich, muß andererseits mindestens eine maximale Lösung existieren. Es gibt also in dem Falle eine Lösung, die jede Lösung enthält. Eine solche Lösung kann man wohl passend eine All-lösung nennen. Entsprechend werde ich im folgenden eine Lösung, die in jeder Lösung enthalten ist, eine Null-lösung nennen.

Hierdurch ist das Theorem bewiesen.

Dual entsprechend gilt natürlich auch der folgende Satz :

Theorem 6₊. Wenn innerhalb eines Klassenringes die Subsumtion $a \leq b + x$ für beliebige Werte von a und b eine Null-lösung x_0 besitzt, so ist $(a + b)(a + c) = a + bc$ (und infolge Th. 2 also auch $a(b + c) = ab + ac$) für beliebige Werthe von a , b und c .

Ist der Klassenring endlich, gilt auch die Umkehrung.

Diejenigen Klassenringe, innerhalb welcher die Subsumtion $ax \leq b$ immer eine Lösung x_0 besitzt, die jede Lösung derselben enthält, und zugleich die Subsumtion $a \leq b + x$ immer eine Lösung x_0 hat, welche in jeder Lösung derselben enthalten ist, sind dadurch von besonderem Interesse, daß sie eine natürliche Fortsetzung und Verallgemeinerung der Gruppen des identischen Kalküls bilden. Es wird sehr passend sein die All-lösung von $ax \leq b$ als $\frac{b}{a}$ und die Null-lösung von $a \leq b + x$ als $a - b$ zu schreiben. Man erhält dann einen Kalkül mit 4 Spezies: Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division. Ich gebe hier die wichtigsten Gesetze dieses Kalküls; doch erwähne ich hauptsächlich Gesetze, die nicht schon im identischen Kalkül vorkommen.

Theorem 7. Innerhalb eines Klassenringes, in welchem für beliebige Werte von a und b Klassen $\frac{b}{a}$ und $a - b$ der Beschaffenheit existieren, daß

$(ax \leq b) = (x \leq \frac{b}{a})$ und $(a \leq b + x) = (a - b \leq x)$ ist, gelten folgende Gesetze :

1 \times . Es gibt eine Allklasse, 1.	1 $+$. Es gibt eine Nullklasse, 0.
2 \times . $a \leq \frac{a}{b}$.	2 $+$. $a - b \leq a$.
3 \times . Wenn $a \leq a'$, so $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b}$.	3 $+$. Wenn $a \leq a'$, so $a - b \leq a' - b$.
4 \times . Wenn $b \leq b'$, so $\frac{a}{b} \geq \frac{a}{b'}$.	4 $+$. Wenn $b \leq b'$, so $a - b \geq a - b'$.
5 \times . $\frac{c}{ab} = \frac{\left(\frac{c}{a}\right)}{b}$.	5 $+$. $c - (a+b) = (c-a) - b$.
6 \times . $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \leq \frac{c}{ab}$.	6 $+$. $c - (a+b) \leq (c-a)(c-b)$.
7 \times . $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \frac{c}{b}$.	7 $+$. $c - ab = (c-a) + (c-b)$.
8 \times . $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \frac{b}{c}$.	8 $+$. $(a+b) - c = (a-c) + (b-c)$.
9 \times . $\frac{a+b}{c} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.	9 $+$. $ab - c \leq (a-c)(b-c)$.

Aus 2 \times in Verbindung mit 3 \times folgt übrigens

$$10_{\times} \quad a + \frac{0}{b} \leq \frac{a}{b}, \text{ und entsprechend erhält man: } 10_{+}, \quad a - b \leq a(1-b)$$

Beweis: Die Richtigkeit von 1 \times folgt sofort daraus, daß für jede Klasse x die Subsumtion $ax \leq a$ erfüllt ist; es muß also $\frac{a}{a}$ eine Klasse sein, die jede Klasse enthält, d. h. $\frac{a}{a}$ ist die Allklasse, 1.

Da immer $ab \leq a$ ist, so ist $a \leq \frac{a}{b}$. 2 \times ist also richtig.

Wenn $a \leq a'$ ist, so folgt aus $bx \leq a$, daß $bx \leq a'$ ist, d. h. wenn $x \leq \frac{a}{b}$ ist, so ist auch $x \leq \frac{a'}{b}$. Hieraus $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b}$, wodurch 3 \times bewiesen ist.

— Wenn $b \leq b'$, so folgt $bx \leq a$ aus $b'x \leq a$, d. h. wenn $x \leq \frac{a}{b'}$, so folgt $x \leq \frac{a}{b}$. Hieraus $\frac{a}{b'} \leq \frac{a}{b}$, wodurch 4 \times bewiesen ist.

Es ist $\left(x \leq \frac{c}{ab}\right) = (abx \leq c) = \left(bx \leq \frac{c}{a}\right) = \left(x \leq \frac{\left(\frac{c}{a}\right)}{b}\right)$. Folglich $\frac{c}{ab} = \frac{\left(\frac{c}{a}\right)}{b}$; 5 \times also richtig. Aus 4 \times folgt, daß sowohl $\frac{c}{a} \leq \frac{c}{ab}$ wie $\frac{c}{b} \leq \frac{c}{ab}$, woraus $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \leq \frac{c}{ab}$, d.h. 6 \times ist richtig. Weiter ist $\left(x \leq \frac{c}{a+b}\right) = (ax+bx \leq c) = (ax \leq c)(bx \leq c) = \left(x \leq \frac{c}{a}\right) \left(x \leq \frac{c}{b}\right) = \left(x \leq \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b}\right)$. Folglich $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b}$, (7 \times). Ebenso $\left(x \leq \frac{ab}{c}\right) = (cx \leq ab) = (cx \leq a)(cx \leq b) = \left(x \leq \frac{a}{c}\right) \left(x \leq \frac{b}{c}\right) = \left(x \leq \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}\right)$. Es ist also $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$, (8 \times). Aus 3 \times folgt, daß $\frac{a}{c} \leq \frac{a+b}{c}$ und $\frac{b}{c} \leq \frac{a+b}{c}$ ist, woraus $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \leq \frac{a+b}{c}$, 9 \times also richtig.

Die Sätze 1 $_+$ bis 9 $_+$ werden genau dual entsprechend bewiesen.

Innerhalb des identischen Kalküls ist immer $\frac{0}{a} = 1 - a$, nämlich gleich \bar{a} , der Negation von a . Umgekehrt, wenn für jede Klasse a des gegebenen Ringes $\frac{0}{a} = 1 - a$ ist, so wird der Kalkül bloß der gewöhnliche identische; denn dann erfüllt $\frac{0}{a} = 1 - a$ die Definition des Negats von a , sodaß der Klassenring eine Gruppe in Bezug auf die drei Spezies des Gebietekalküls wird. Es wird in diesem Falle $a - b = a \cdot \frac{0}{b} = a(1 - b)$ und $\frac{b}{a} = b + \frac{0}{a} = b + (1 - a)$. — Setzen wir jetzt umgekehrt voraus, daß für jedes a und jedes b die Gleichung $\frac{b}{a} = b + \frac{0}{a}$ gilt. Dann wird $a + \frac{0}{a} = \frac{a}{a} = 1$, woraus

$$\alpha) \quad 1 - a \leq \frac{0}{a}.$$

Multipliziert man aber $a + \frac{0}{a} \leq a + (1 - a)$, was ja richtig sein muß, da $1 \leq a + (1 - a)$ und $1 = a + \frac{0}{a}$ ist, mit $\frac{0}{a}$, erhält man $\frac{0}{a} \leq \frac{0}{a} a + \frac{0}{a} (1 - a) \leq 0 + \frac{0}{a} (1 - a) = \frac{0}{a} (1 - a)$, woraus

$$\beta) \quad \frac{0}{a} \leq 1 - a.$$

Aus $\alpha)$ und $\beta)$ folgt $\frac{0}{a} = 1 - a$, d. h. wir kommen zum identischen Kalkül zurück. Wenn also der betrachtete Klassenring keine Gruppe in Bezug auf alle drei Operationen des Gebietekalküls sein soll, so kann in den Formeln 10_{\times} und 10_{+} , Th. 7, nicht immer das Gleichheitszeichen gültig sein.

Man kann weiter fragen, ob für gewisse Klassenringe in den Formeln 6_{\times} , 6_{+} , 9_{\times} , 9_{+} das Gleichheitszeichen immer gültig sein kann. Natürlich ist dies der Fall für Gruppen in Bezug auf die drei Spezies des identischen Kalküls. Es gibt aber viele andere davon gänzlich verschiedene Beispiele. (Vergl. den Schluß dieses Paragraphen).

Es besteht ein sehr bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Gültigkeit der Formel $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ einerseits und der Existenz einer All-lösung der Subsumtion $\frac{x}{a} \leq \beta$ andererseits genau so, wie die Gültigkeit der Formel $a(b+c) = ab+ac$ mit der Existenz einer alle anderen enthaltenden Lösung der Subsumtion $\alpha x \leq \beta$ verknüpft war (Th. 6_{\times}). Wir haben in der Tat den folgenden Satz:

Theorem 8_{\times} . *Wenn innerhalb eines Klassenringes¹ jede Subsumtion $\frac{x}{a} \leq \beta$, die überhaupt lösbar ist, eine All-lösung besitzt, so gilt die Gleichung $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ für beliebige Werte von a , b und c .*

Ist der Ring endlich, gilt auch das umgekehrte.

Beweis: Wenn jede lösbare Subsumtion $\frac{x}{a} \leq \beta$ eine All-lösung besitzt, so hat die Subsumtion $\frac{x}{c} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ eine All-lösung x_0 ; denn sie ist ja lösbar, da $x = a$ und $x = b$ Lösungen sind. Es ist deshalb $a \leq x_0$ und $b \leq x_0$, d. h. $a + b \leq x_0$, woraus nach 3_{\times} Th. 7 $\frac{a+b}{c} \leq \frac{x_0}{c}$. Da $\frac{x_0}{c} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, folgt $\frac{a+b}{c} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Nun besagt aber 9_{\times} Th. 7, daß $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \leq \frac{a+b}{c}$ ist; folglich ist $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

¹ Es wird hier natürlich vorausgesetzt, daß die Division innerhalb des Ringes stets ausführbar ist.

Gehen wir jetzt umgekehrt von der Gültigkeit des Gesetzes $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ aus. Dann muß eine Maximallösung der Subsumtion $\frac{x}{a} \leq \beta$ eine All-lösung sein. Es sei nämlich x_1 eine maximale Lösung und x_2 eine darin nicht enthaltene andere Lösung. Dann folgt aus $\frac{x_1}{a} \leq \beta$ in Verbindung mit $\frac{x_2}{a} \leq \beta$, daß $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} = \frac{x_1 + x_2}{a} \leq \beta$ sein muß. Es müßte also auch $x_1 + x_2$ eine Lösung der Subsumtion sein, und sie wäre umfassender als x_1 , während x_1 doch als maximal vorausgesetzt war, was ein Widerspruch ist.

Ist das gegebene System von Klassen endlich, müssen aber notwendig maximale Lösungen existieren. Es gibt also in diesem Falle immer eine All-lösung.

Dual entsprechend gilt der folgende Satz:

Theorem 8₊. *Wenn innerhalb eines Klassenringes¹ jede Subsumtion $a \leq x - \beta$, die überhaupt lösbar ist, eine Null-lösung besitzt, so gilt die Gleichung $ab - c = (a - c)(b - c)$ für beliebige Werte von a , b und c . — Ist der Ring endlich, gilt auch die Umkehrung.*

Der Beweis geschieht genau dual entsprechend dem Beweise für Th. 8_×. Es gelten aber auch die folgenden analogen Sätze:

Theorem 9_×. *Wenn jede lösbare Subsumtion $\frac{a}{x} \leq \beta$ eine Null-lösung besitzt, so ist für beliebige Werte von a , b und c , $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{c}{ab}$. Wenn die Zahl der Klassen endlich ist, gilt auch das umgekehrte.*

Theorem 9₊. *Wenn jede lösbare Subsumtion $a \leq \beta - x$ eine All-lösung besitzt, so gilt die Gleichung $(c - a)(c - b) = c - ab$ für beliebige Werte von a , b und c . Ist der Klassenring endlich, gilt auch die Umkehrung.*

Da der Beweis dieser Sätze dem Beweise von Th. 8 genau analog verläuft, brauche ich ihn wohl nicht aufzustellen.

In derselben Weise wie die All-lösung der Subsumtion $ax \leq b$ und die Null-lösung der Subsumtion $a \leq b + x$ bzw. zu den neuen Knüpfungen Division und Subtraktion führten, geben die

¹ Hier wird natürlich vorausgesetzt, daß die Subtraktion stets ausführbar ist.

All- und Null-lösungen der Subsumtionen $\frac{x}{a} \leq b$, $a \leq b - x$, $\frac{a}{x} \leq b$, $a \leq x - b$ zu neuen Knüpfungen Anlaß. Man könnte z. B. die All-lösung der Subsumtion $\frac{x}{a} \leq b$ durch das Symbol $a \cdot b$ bezeichnen, die Null-lösung von $\frac{a}{x} \leq b$ durch $\frac{a}{b}$ usw. Ich will doch hier diese Sachen nicht näher verfolgen.

Zuletzt möchte ich aber einige Beispiele von Systemen von Klassen erwähnen, innerhalb welcher die 4 Operationen: Multiplikation, Addition, Division, Subtraktion, immer ausführbar sind, und außerdem die Subsumtionen $\frac{x}{a} \leq b$, $a \leq b - x$, falls sie überhaupt lösbar sind, eine All-lösung haben, und endlich die Subsumtionen $\frac{a}{x} \leq b$, $a \geq x - b$ immer eine Null-lösung haben, wenn sie überhaupt Lösungen besitzen. Das einfachste Beispiel ist ein System von Klassen, die ihrem Umfange nach eine linear geordnete Reihe darstellen, wo jede Klasse eine unmittelbar vorhergehende und eine unmittelbar nachfolgende besitzt, während ein erstes Glied der Reihe, die Nullklasse, und ein letztes Glied, die Allklasse, vorkommen.

Es gilt also dann die Aussage $(a \leq b) + (b \leq a)$ für zwei beliebige Klassen des Systems. Weiter gibt es für jede Klasse a eine Klasse a' , sodaß $a' < a$, und gleichzeitig für jede Klasse a'' die Aussage $(a' \leq a') + (a \leq a'')$ gültig ist; endlich gibt es für jedes a eine Klasse a_1 , sodaß erstens $a < a_1$ ist, und zweitens für jedes a_2 die Aussage $(a_2 \leq a) + (a_1 \leq a_2)$ wahr ist.

Daß innerhalb eines solchen Klassensystems die genannten 4 Operationen immer ausführbar sind, ist sehr leicht zu sehen. Es folgt ja dies sofort daraus, daß für $a \leq b$, $\frac{b}{a} = 1$ und $a - b = 0$ ist, für $a > b$ dagegen $\frac{b}{a} = b$, $a - b = a$. Daß die Subsumtion $\frac{x}{a} \leq b$ innerhalb eines solchen Klassensystems eine All-lösung besitzt, kann in folgender Weise gezeigt werden. Ist $b = 1$, ist $x = 1$ selbstverständlich die All-lösung. Ist $b < 1$, so muß $x < a$ sein; denn aus $x \geq a$ folgt ja $\frac{x}{a} = 1$. Wenn aber $x < a$ ist, so wird $\frac{x}{a} = x$; also wird die Subsumtion zu $x \leq b$ reduziert. Ist dann $b < a$, wird $x = b$ die All-lösung. Ist $a \leq b$, besteht die hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz einer All-lösung darin, daß a einen unmittelbaren Vorgänger besitzt, was wir eben vorausgesetzt haben.

Für die Subsumtion $\frac{a}{x} \leq b$ sieht man, daß $x = 0$ die Nulllösung ist, wenn $b = 1$. Ist dagegen $b < 1$, so muß $a < x$ sein. Dann wird $\frac{a}{x} = a$, sodaß die Subsumtion sich zu $a \leq b$ reduziert, was die Bedingung der Lösbarkeit darstellt. Ist diese erfüllt, besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Nulllösung darin, daß unter allen x , für welche $a < x$ ist, ein x gibt, das als Unterklasse in jedem dieser x enthalten ist, d. h. daß a einen unmittelbaren Nachfolger besitzt, was wir auch vorausgesetzt haben.

Dual entsprechend können die Subsumtionen $a \leq b - x$, $a \leq x - b$ behandelt werden.

Von dieser einfachsten Gattung von Klassensystemen, innerhalb welcher die 4 Operationen unbeschränkt ausführbar sind, und die genannten Subsumtionen All- und Nulllösungen besitzen, lassen sich durch ein gewisses Kompositionsverfahren, das ich angeben will, kompliziertere Systeme derselben Eigenschaften ableiten.

Theorem 10. Sind G und H zwei Klassenringe, die Allklassen und eine gemeinsame Nullklasse besitzen, während das Produkt von jeder Klasse g in G und h in H immer dieser Nullklasse gleich ist, dann bilden die Summen $g + h$ wieder einen Klassenring GH . Sind Division und Subtraktion sowohl innerhalb G wie innerhalb H unbeschränkt ausführbar, so sind sie auch innerhalb GH unbeschränkt ausführbar. Existieren sowohl innerhalb G als innerhalb H sowohl All- als Nulllösungen der Subsumtionen $\frac{x}{a} \leq b$, $a \leq b - x$, $\frac{a}{x} \leq b$, $a \leq x - b$, so kommen solche auch innerhalb GH immer vor.

Ein dual entsprechendes Theorem gilt natürlich auch.

Daß die Summen $g + h$ einen Ring bilden, sieht man fast unmittelbar. Die Richtigkeit der übrigen Behauptungen des Theorems folgt leicht aus den Formeln:

$$\frac{g_1 + h_1}{g_2 + h_2} = \frac{g_1}{g_2} + \frac{h_1}{h_2}, \quad (g_1 + h_1) - (g_2 + h_2) = (g_1 - g_2) + (h_1 - h_2),$$

wo g_1 und g_2 zwei beliebige Elemente von G , h_1 und h_2 zwei beliebige Elemente von H bedeuten. Ich begnüge mich deshalb hier der Kürze halber mit einem Beweis dieser Formeln.

Es sei $g + h$ eine beliebige Klasse, die Element von GH ist, indem g zu G und h zu H gehört. Dann haben wir

$$\left(g + h \leq \frac{g_1 + h_1}{g_2 + h_2}\right) \rightarrow ((g + h)(g_2 + h_2) \leq g_1 + h_1) = (gg_2 + hh_2 \leq g_1 + h_1).$$

Durch Multiplikation auf beiden Seiten mit gg_2 erhält man aus $gg_2 + hh_2 \leq g_1 + h_1$ die Subsumtion $gg_2 \leq g_1$. Entsprechend erhält man $hh_2 \leq h_1$ durch Multiplikation mit hh_2 . Aus $(gg_2 \leq g_1)(hh_2 \leq h_1)$ folgt aber umgekehrt $gg_2 + hh_2 \leq g_1 + h_1$. Folglich ist

$$(gg_2 + hh_2 \leq g_1 + h_1) \rightarrow (gg_2 \leq g_1) \leq (hh_2 \leq h_1) = \left(g \leq \frac{g_1}{g_2}\right) \left(h \leq \frac{h_1}{h_2}\right).$$

Dies findet man aber in ähnlicher Weise wieder gleich $g + h \leq \frac{g_1}{g_2} + \frac{h_1}{h_2}$. Hieraus:

$$\frac{g_1 + h_1}{g_2 + h_2} = \frac{g_1}{g_2} + \frac{h_1}{h_2}.$$

Die andere Formel beweist man in genau derselben Art.

Man kann auch auf viele andere Weisen, die ich aber hier nicht erwähnen will, Klassensysteme konstruieren, innerhalb welcher die 4 genannten Operationen stets ausführbar sind, während die 4 genannten Subsumtionen All- und Null-lösungen haben.

§ 3.

Im folgenden sei ein Klassenring R gegeben, innerhalb welches die distributiven Gesetze der Multiplikation und der Addition erfüllt sind.¹ Das Problem, das hier behandelt werden soll, ist die Frage: Wann ist eine Aussage über gewisse Klassen $a, b, c \dots$ allgemeingültig, d. h. für beliebige Werte von a, b, c, \dots gültig, und wann nicht? Unter «Aussagen» verstehe ich natürlich Aussagen, die durch die drei Operationen des Aussagenkalküls aus Subsumtionen aufgebaut sind.²

Durch Ausführung aller Aussagennegationen und Anwendung der distributiven Gesetze der Aussagenmultiplikation und -addition läßt sich jede solche Aussage als ein Produkt von Summen von Subsumtionen und Unsubsumtionen darstellen. Ein Aussagenprodukt ist aber immer dann und nur dann allgemeingültig, wenn jeder Faktor allgemeingültig ist. Wir

¹ Ich setze auch voraus, daß der Ring nicht bloß aus einer einzigen Klasse besteht. Es gibt dann, wie man leicht erkennt, sicher zwei Klassen a und b , sodaß $a < b$ ist.

² Da hier die Existenz von Negationen nicht vorausgesetzt wird, und die Begriffe „Produkt“ und „Summe“ relativ zu R zu verstehen sind (vergl. Anfang § 2), so ist dieses Problem gar kein Spezialfall des entsprechenden Problems des identischen Kalküls.

brauchen deshalb bloß zu untersuchen, wann eine Summe von Subsumtionen und Unsubsumtionen allgemeingültig ist.

Ich will hier drei Spezialfälle behandeln:

- 1) Eine Summe von lauter Unsubsumtionen.
- 2) Eine einzelne Subsumtion.
- 3) Eine Summe von einer Subsumtion mit einer oder mehreren Unsubsumtionen.

Der Fall 1) ist ziemlich trivial. Es ist nämlich leicht zu sehen, daß eine Summe von Unsubsumtionen nie gültig sein kann für beliebige Werte der auftretenden Klassensymbole; denn gibt man z. B. allen vorkommenden Klassen denselben Wert, so werden alle Unsubsumtionen ungültig und folglich auch die ganze Summe ungültig.

Im Falle 2) sei $S \leq P$ die gegebene Subsumtion. Dann können mit Hilfe der distributiven Gesetze S und P bezw. zu einer Summe von Produkten der gegebenen Klassensymbole und zu einem Produkt von Summen dieser Symbole umgeformt werden. Die Subsumtion erhält hierdurch das Aussehen $p_1 + p_2 + \dots \leq s_1 + s_2 + \dots$, wo jedes p ein Produkt und jedes s eine Summe ursprünglicher Klassensymbole ist. Diese Subsumtion ist aber gleich dem Produkt aller Subsumtionen $p_i \leq s_k$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Allgemeingültigkeit von $S \leq P$ ist dann, daß jede der Subsumtionen $p_i \leq s_k$ allgemeingültig ist. Hierdurch ist unser Problem dazu reduziert zu finden, wann eine Subsumtion der Form $a_1 a_2 \dots \leq b_1 + b_2 + \dots$ allgemeingültig ist.

Theorem 11. Eine Subsumtion, deren Subjekt ein Produkt gewisser Klassensymbole a_1, a_2, \dots , und deren Prädikat eine Summe gewisser Klassensymbole b_1, b_2, \dots ist, ist immer und nur dann gültig für beliebige Werte dieser Symbole, wenn mindestens eines der Symbole a auch unter den Symbolen b vorkommt.

So ist z. B. $ab \leq a + c$ allgemeingültig, während $ab \leq c + d$ nicht allgemeingültig ist.

Beweis: Daß die Subsumtion $a_1 a_2 \dots \leq b_1 + b_2 + \dots$ allgemeingültig ist, wenn eine der Klassen a auch unter den Klassen b vorkommt, ist ohne weiteres ersichtlich. Wenn aber keines der Symbole a unter den Symbolen b vorkommt, können wir jedes $a = B$, jedes $b = A$ setzen, wo A und B zwei solche Klassen sind, daß $A < B$ ist¹; dann reduziert sich die Subsumtion zu $B \leq A$, was falsch ist. Die Subsumtion ist also nicht allgemeingültig.

¹ Siehe die Bemerkung unten S. 21.

Im Falle 3) können wir jede der als Summanden vorkommenden Unsubsumtionen in eine Summe von Unsubsumtionen der Form $a_1 a_2 \dots \leq b_1 + b_2 + \dots$ zerlegen und zugleich die auftretende Subsumtion als ein Produkt von Subsumtionen der Form $a_1 a_2 \dots \leq b_1 + b_2 + \dots$ schreiben. Die gegebene Aussage nimmt hierdurch die Gestalt $U_1 + U_2 + \dots + U_m + S_1 S_2 \dots S_n$ an, wo jedes U eine Unsubsumtion der Form $a_1 a_2 \dots \leq b_1 + b_2 + \dots$ und jedes S eine Subsumtion der Form $a_1 a_2 \dots \leq b_1 + b_2 + \dots$ ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + \dots + U_m + S_1 S_2 \dots S_n = \\ (U_1 + U_2 + \dots + U_m + S_1) (U_1 + U_2 + \dots + U_m + S_2) \dots \dots \dots \\ (U_1 + U_2 + \dots + U_m + S_n), \end{aligned}$$

und infolgedessen brauchen wir bloß zu untersuchen, wann jeder der Aussagenfaktoren rechts allgemeingültig ist. Das Problem ist also dazu reduziert zu finden, wann eine Aussagensumme $U_1 + U_2 + \dots + U_m + S$ allgemeingültig ist, wo S eine Subsumtion ist, deren Subjekt ein Produkt gewisser Klassensymbole und deren Prädikat eine Summe gewisser Klassensymbole ist, während jedes U eine entsprechende Unsubsumtion ist. Dieses Problem kann aber auch so ausgedrückt werden: Es gilt zu finden, wann eine Subsumtion der Form $a_1 a_2 \dots \leq b_1 + b_2 + \dots$ aus einer oder dem gleichzeitigen Bestehen mehrerer anderer Subsumtionen derselben Form folgt.

Diese Frage wird im einfachsten Falle, nämlich wenn nur eine Subsumtion als Prämisse gegeben ist, durch das folgende Theorem erledigt:

Theorem 12. *Eine Subsumtion $a_1 \dots a_m \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ist immer und nur dann eine Folgerung der Subsumtion $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_r$, wenn entweder ein a zugleich unter den Symbolen b vorkommt, oder wenn sowohl jedes Symbol a unter den Symbolen α wie jedes Symbol β unter den Symbolen b vorkommt.*

Beweis: Wenn eines der Symbole a unter den Symbolen b vorkommt, so ist nach Th. 11 die Subsumtion $a_1 a_2 \dots \leq b_1 + b_2 + \dots$ von selbst immer erfüllt, und sie ist dann à fortiori eine Folge der anderen Subsumtion. Wenn jedes Symbol α unter den Symbolen a und jedes β unter den Symbolen b auftritt, so wird augenscheinlich

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 \dots a_m \leq \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu \\ \text{und} \\ & \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_r \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n. \end{aligned}$$

Dann muß aber die Subsumtion $a_1 \dots a_m \leq b_1 + \dots + b_n$ aus $\alpha_1 \dots \alpha_\mu \leq \beta_1 + \dots + \beta_\nu$ folgen.

Gehen wir jetzt dagegen davon aus, daß kein a unter den Symbolen b vorkommt, und daß mindestens ein α nicht unter den a oder mindestens ein β nicht unter den b auftritt. Wir können um die Betrachtung zu fixieren voraussetzen, daß α_1 eines der α ist, die nicht unter den Symbolen a vorkommen. Es seien nun A und B zwei solche Klassen, daß $A < B$. Wählt man dann jedes $a = B$, jedes $b = A$ und $\alpha_1 = A$, was auch möglich ist, da α_1 nicht unter den Symbolen a auftritt, während die eventuell übrigen Symbole nach Belieben $= A$ oder $= B$ gewählt werden, so wird die Subsumtion $\alpha_1 \dots \alpha_\mu \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$ gültig, die Subsumtion $a_1 \dots a_m \leq b_1 + \dots + b_n$ dagegen ungültig; die letztere ist also keine Folge der ersteren. — Genau analog geht es, wenn mindestens ein β unter den Symbolen b nicht vorkommt.

Sind zwei Subsumtionen als Prämissen gegeben, hat man folgenden Satz:

Theorem 13. *Die Subsumtion $a_1 a_2 \dots a_m \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ist eine Folge des gleichzeitigen Bestehens der beiden Subsumtionen $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$ und $\alpha'_1 \dots \alpha'_\mu \leq \beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_\nu$, in folgenden beiden Fällen und in keinem anderen Falle:*

1) *Wenn die erste Subsumtion schon eine Folgerung von einer der letzten Subsumtionen für sich ist. Die Bedingung dafür ergibt sich aus Th. 12.*

2) *Die letzten Subsumtionen haben das Aussehen:*

$$\alpha a_{r_1} \dots a_{r_k} \leq b_{s_1} + \dots + b_{s_l}, \quad \alpha_{\varrho_1} \dots \alpha_{\varrho_n} \leq b_{\sigma_1} + \dots + b_{\sigma_k} + \alpha$$

wo $r_1 \dots r_k$ und auch $\varrho_1 \dots \varrho_n$ einige der Zahlen $1, 2, \dots, m$ (möglicherweise alle) und ebenso $s_1 \dots s_l$ und $\sigma_1 \dots \sigma_k$ einige der Zahlen $1, 2, \dots, n$ (möglicherweise alle) sind.

Beweis: Im Falle 1 ist natürlich die erste Subsumtion à fortiori eine Folge des gleichzeitigen Bestehens der beiden letzten. Im Falle 2 bekommen wir

$$\begin{aligned} \alpha_{r_1} \dots \alpha_{r_k} \alpha_{\varrho_1} \dots \alpha_{\varrho_n} &\leq \alpha_{r_1} \dots \alpha_{r_k} (b_{\sigma_1} + \dots + b_{\sigma_k}) + \\ &+ \alpha a_{r_1} \dots a_{r_k} \leq b_{\sigma_1} + \dots + b_{\sigma_k} + b_{s_1} + \dots + b_{s_l} \end{aligned}$$

und hieraus à fortiori $a_1 \dots a_m \leq b_1 + \dots + b_n$.

Wenn Fall 1 nicht eintreten soll, so muß kein a unter den b vorkommen; weiter muß mindestens ein α existieren, das nicht unter den a vorkommt, oder mindestens ein β , das nicht unter den b vorkommt, und endlich muß mindestens ein α' existieren, das nicht unter den a auftritt, oder mindestens ein β' , das nicht unter den Symbolen b auftritt.

Setzen wir erstens voraus, daß ein α , z. B. α_1 , nicht unter den Symbolen a und zugleich ein α' , z. B. α'_1 , auch nicht unter den a vorkommt. Bedeuten wie früher A und B zwei Klassen, für welche die Relation $A < B$ stattfindet, so können wir jedes a gleich B , jedes b und außerdem auch α_1 und α'_1 gleich A setzen, während alle übrigen Symbole nach Belieben $= A$ oder $= B$ gesetzt werden können. Dann sind sowohl $\alpha_1 \dots \alpha_n \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p$ wie $\alpha'_1 \dots \alpha'_m < \beta'_1 + \dots + \beta'_r$ erfüllt, dagegen $a_1 a_2 \dots a_m \leq b_1 + \dots + b_n$ nicht erfüllt. — Genau ebenso geht es, wenn auf einmal mindestens ein β und mindestens ein β' existieren, die nicht unter den Symbolen b vorkommen.

Dann haben wir noch den folgenden Fall zu betrachten: Es gibt ein α , z. B. α_1 , das nicht unter den a vorkommt, während jedes α' unter den Symbolen a auftritt; weiter gibt es ein β' , z. B. β'_1 , das nicht unter den Symbolen b vorkommt, während jedes β unter den b vorkommt. Dieser Fall spaltet sich wieder in zwei Unterfälle: Entweder ist es möglich β'_1 verschieden von α_1 zu wählen, oder das ist nicht möglich. Im ersten Fall können wir jedes $a = B$, jedes $b = A$, $\alpha_1 = A$ und $\beta'_1 = B$ wählen (alle anderen Symbole $= A$ oder $= B$ nach Belieben), wodurch $\alpha_1 \dots \alpha_n \leq \beta_1 + \dots + \beta_p$ und $\alpha'_1 \dots \alpha'_m \leq \beta'_1 + \dots + \beta'_r$ gültig werden, während $\alpha_1 \dots a_m \leq b_1 + \dots + b_n$ ungültig wird. Im zweiten Fall kann bloß ein α , also nur α_1 , existieren, das nicht unter den Symbolen a vorkommt; ebenso kommt jedes von $\beta'_1 = \alpha_1$ verschiedenes Symbol β' unter den Symbolen b vor. Die Subsumtionen haben dann das Aussehen:

$$\alpha_1 \dots \alpha_n \leq b_1 + \dots + b_n, \quad \alpha_1 a_{r_1} \dots a_{r_k} \leq b_{s_1} + \dots + b_{s_l},$$

$$\alpha_{q_1} \dots \alpha_{q_k} \leq b_{o_1} + \dots + b_{o_l} + \alpha_1,$$

d. h. wir haben den im Theorem erwähnten Fall 2, und wir haben gesehen, daß die erste Subsumtion dann aus der gleichzeitigen Gültigkeit der beiden anderen folgt.

Endlich müssen wir den Fall betrachten, da jedes α unter den Symbolen a , jedes β' unter den b vorkommt, während mindestens ein α' nicht unter den a und zugleich mindestens ein β nicht unter den b auftreten.

Dieser Fall geht aber aus dem zuletzt behandelten durch Vertauschung von den α mit den α' und den β mit den β' hervor. Das Resultat wird deshalb dasselbe: Die Subsumtion $a_1 \dots a_m \leq b_1 + \dots + b_n$ folgt dann und nur dann aus den beiden anderen, wenn diese die im Fall 2 des Theorems angegebene Form haben.

Hiermit ist das Theorem bewiesen.

Man kann nun natürlich weiter fragen, wann eine Subsumtion aus drei, vier usw. anderen folgt. Da aber die Behandlung dieser Fragen sich kaum kurz fassen läßt, gehe ich hier nicht darauf ein.

Statt zu untersuchen, wann eine gegebene Aussage gültig ist für beliebige Werte von *allen* vorkommenden Klassensymbolen, kann man auch untersuchen, wann sie gültig ist für beliebige Werte von *einigen* dieser Symbole, indem die Werte der übrigen Symbole festgehalten werden sollen. Wir müssen also dann zwischen Variabeln und Konstanten (oder Koeffizienten) unterscheiden, und die Frage wird, welche Bedingung die Konstanten erfüllen müssen, damit die Aussage für beliebige Werte der Variabeln gelte.

Ich will hier voraussetzen, daß im gegebenen Aussagenausdruck bloß eine Variable vorkommt. Es soll also das Produkt $\prod_u U(u)$ untersucht werden, wo $U(u)$ eine Aussage ist, die durch die drei Operationen des Aussagenkalküls aus Subsumtionen aufgebaut ist, wobei die Subjekte und die Prädikate dieser Subsumtionen durch Multiplikation und Addition von Klassensymbolen (unter welchen u vorkommt) aufgebaut sind. Die von u verschiedenen Klassensymbole sind die Konstanten (Koeffizienten). Jeder Ausdruck, der durch Multiplikation und Addition aus u und Konstanten aufgebaut ist, läßt sich nun in der Form $au + b$ oder auch in der Form $\alpha(u + \beta)$ darstellen, wo a, b, α, β von u unabhängig oder konstant sind. Wir haben ja $au + b = (a + \beta)(u + b)$, und daraus sieht man sehr leicht, daß die Summe und das Produkt zweier solcher Ausdrücke wieder einem solchen gleich ist, wodurch bewiesen ist, daß jede Funktion von u sich in den genannten beiden Formen schreiben läßt. Jede in $U(u)$ vorkommende Subsumtion ist deshalb von der Form $au + b \leq c(u + d)$. Diese ist aber gleich

$$(au \leq c) (b \leq u + d) (b \leq c).$$

Wir können deshalb sagen, daß $U(u)$ durch die 3 Operationen des Aussagenkalküls aus Subsumtionen der drei Formen $au \leq b$, $a \leq u + b$, $a \leq b$ aufgebaut ist.

Durch Ausführung aller Negationen und Anwendung der distributiven Gesetze läßt sich $U(u)$ als ein Produkt von Summen von Subsumtionen und Unsubsumtionen der drei Formen schreiben. Um $\prod_u U(u)$ zu finden hat man dann \prod_u von jedem Faktor zu finden. Es kommt also alles darauf an \prod_u von einer Summe von Subsumtionen und Unsubsumtionen zu finden. In den meisten Fällen kann von einer Auswertung dieses Produktes keine Rede sein; es gibt aber ein Paar einfache Fälle, die ich hier besprechen möchte.

Setzen wir erstens voraus, daß die Summe nur ein Glied hat, und daß dieses eine Subsumtion ist. Wir haben also dann entweder $\prod_u (au \leq b)$ oder $\prod_u (a \leq b + u)$ oder $\prod_u (a \leq b)$. Das letzte Produkt ist natürlich $= (a \leq b)$. Weiter ist auch

$$\prod_u (au \leq b) = (a \leq b) \text{ und } \prod_u (a \leq b + u) = (a \leq b).$$

Denn soll $au \leq b$ sein für beliebige Werte von u , so gilt auch $aa \leq b$, d. h. $a \leq b$. Umgekehrt, wenn $a \leq b$ ist, so gilt $au \leq b$ für beliebige Werte von u . Entsprechendes gilt für $a \leq b + u$. Es gelingt deshalb auch immer $\prod_u U(u)$ auszuwerten in denjenigen Fällen, da $U(u)$ ein Produkt von Subsumtionen ist.

Setzen wir zweitens voraus, daß unter dem Zeichen \prod_u eine Summe $S(u)$ von lauter Unsubsumtionen steht. Wir können dann lieber die Negation der Aussage $\prod_u S(u)$ betrachten, d. h. $\Sigma \overline{S(u)}$. Hier ist dann $\overline{S(u)}$ ein Produkt von Subsumtionen, und da Subsumtionen der Form $a \leq b$, die von u unabhängig sind, sofort vor den Σ -Zeichen gestellt werden können, so können wir voraussetzen, daß $\overline{S(u)} = P_1(u) P_2(u)$ ist, wo $P_1(u)$ ein Produkt von Subsumtionen der Form $au \leq b$, $P_2(u)$ ein Produkt von Subsumtionen der Form $a \leq b + u$ ist.

Eine wirkliche Auswertung jeder solchen Summe $\prod_u P_1(u) P_2(u)$ ist nun, wie ich bald zeigen soll, immer möglich innerhalb eines Klassenringes, wo Division und Subtraktion ausführbar sind; sonst ist sie wohl kaum möglich. Aber auch im allgemeinsten Falle gelingt eine Umformung der Summe, wodurch sie auf Summen der Form $\prod_u (au \leq b) (c \leq d + u)$, wo also nur ein Subsumtionenfaktor jeder Art vorkommt, zurückgeführt wird. Wir haben in der Tat den folgenden Satz:

Theorem 14.

$$\sum_u \prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^n (a_r u \leq b_r) (c_s \leq d_s + u)$$

$$= \prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^n \sum_u (a_r u \leq b_r) (c_s \leq d_s + u).$$

Beweis: Aus

$$\prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^n (a_r u \leq b_r) (c_s \leq d_s + u) \leq (a_\varrho u \leq b_\varrho) (c_\sigma \leq d_\sigma + u)$$

folgt

$$\sum_u \prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^n (a_r u \leq b_r) (c_s \leq d_s + u) \leq \sum_u (a_\varrho u \leq b_\varrho) (c_\sigma \leq d_\sigma + u).$$

Da dies für beliebige Werte von ϱ und σ gilt, haben wir auch

$$\sum_u \prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^n (a_r u \leq b_r) (c_s \leq d_s + u) \leq \prod_{\varrho=1}^m \prod_{\sigma=1}^n \sum_u (a_\varrho u \leq b_\varrho) (c_\sigma \leq d_\sigma + u).$$

Hierdurch ist die Hälfte des Theorems bewiesen. Gehen wir nun umgekehrt davon aus, daß $\prod_{\varrho=1}^m \prod_{\sigma=1}^n \sum_u (a_\varrho u \leq b_\varrho) (c_\sigma \leq d_\sigma + u)$ gültig ist. Es sei dann $u_{\varrho, \sigma}$ einer der Werte von u , für welche $(a_\varrho u \leq b_\varrho) (c_\sigma \leq d_\sigma + u)$ stattfindet. Wir setzen $u = \prod_{\varrho=1}^m \sum_{\sigma=1}^n u_{\varrho, \sigma}$ und erhalten für jedes $r (= 1, 2, \dots, m)$ $u \leq \sum_{\sigma=1}^n u_{r, \sigma}$ und folglich

$$a_r u \leq a_r \sum_{\sigma=1}^n u_{r, \sigma} = \sum_{\sigma=1}^n a_r u_{r, \sigma} \leq \sum_{\sigma=1}^n b_\sigma = b_r;$$

entsprechend erhalten wir für jedes $s (= 1, 2, \dots, n)$ $u \geq \prod_{\varrho=1}^m u_{\varrho, s}$ und folglich

$$c_s = \prod_{\varrho=1}^m c_s \leq \prod_{\varrho=1}^m (d_s + u_{\varrho, s}) = d_s + \prod_{\varrho=1}^m u_{\varrho, s} \leq d_s + u.$$

Es gilt also die Aussage $\prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^n (a_r u \leq b_r) (c_s \leq d_s + u)$ für $u = \prod_{\varrho=1}^m \sum_{\sigma=1}^n u_{\varrho, \sigma}$. Die Aussage

$$\prod_{\sigma}^m \prod_{\sigma}^n \sum_u (a_{\sigma} u \leq b_{\sigma}) (c_{\sigma} \leq d_{\sigma} + u) \leq \sum_u \prod_r^m \prod_s^n (a_r u \leq b_r) (c_s \leq d_s + u)$$

ist also auch richtig, wodurch die zweite Hälfte des Theorems bewiesen ist.

Existieren für zwei beliebige Klassen a und b des gegebenen Klassenringes ein Quotient $\frac{a}{b}$ und eine Differenz $a - b$, so lassen sich die einfachen Summen $\sum_u (au \leq b) (c \leq d + u)$ ausführen. Wir haben ja in diesem

Fall $(au \leq b) = (u \leq \frac{b}{a})$ und $(c \leq d + u) = (c - d \leq u)$, wodurch

$$\sum_u (au \leq b) (c \leq d + u) = \sum_u (c - d \leq u) (u \leq \frac{b}{a}) = (c - d \leq \frac{b}{a}).$$

Aus Theorem 14 folgt dann

$$\begin{aligned} \sum_u \prod_r^m \prod_s^n (a_r u \leq b_r) (c_s \leq d_s + u) &= \prod_r^m \prod_s^n (c_s - d_s \leq \frac{b_r}{a_r}) \\ &= \left(\sum_s^n (c_s - d_s) \leq \prod_r^m \frac{b_r}{a_r} \right). \end{aligned}$$

Innerhalb solcher Klassenringe kann also das Eliminationsproblem¹ immer gelöst werden, solange man Subsumtionenprodukte betrachtet, wo die vorkommenden Subjekte und Prädikate aus den gegebenen Klassensymbolen durch Multiplikation und Addition allein gebildet sind. Kommt dagegen die Division oder die Subtraktion schon in den gegebenen Subsumtionen vor, gilt das allerdings nicht mehr. Ich will dies hier nicht weiter verfolgen.

§ 4.

In diesem Paragraphen gedenke ich zu zeigen, daß Produkte und Summen von Aussagen immer ausgewertet werden können, wenn man mit einer Art von Aussagen zu tun hat, die man passend *numerische* nennen kann. Ich stelle mich hier genau auf dem Standpunkte des gewöhnlichen SCHRÖDER'schen Klassenkalkuls und Relativkalkuls.

¹ Die Auswertung einer Aussagensumme ist ja mit einer Elimination gleichbedeutend. Siehe SCHRÖDER, I. c., B. I.

Unter »einfache« oder »ursprüngliche« numerische Aussagen, eine Klasse a betreffend, können wir Aussagen verstehen, die sprachlich so ausgedrückt werden: Es gibt mindestens n Dinge, welche zur Klasse a gehören; es gibt höchstens n Dinge in der Klasse a . Diese Aussagen können passend num. $a \geq n$ bzw. num. $a \leq n$ geschrieben werden, wo num. a die Zahl der Dinge a bedeutet. Ich ziehe es aber hier vor diese Aussagen kürzer einfach $a \geq n$ bzw. $a \leq n$ zu schreiben, indem der Buchstabe n (eventuel mit Indizes) immer eine Zahl bedeuten soll, nicht eine Klasse. Unter einer numerischen Aussage überhaupt verstehe ich jede Aussage, die durch die drei Operationen des Aussagenkalküls aus den ebengenannten einfachen numerischen Aussagen aufgebaut werden können.

Es verdient bemerkt zu werden, daß sowohl Subsumtionen wie Unsubsumtionen Spezialfälle der numerischen Aussagen sind. Denn es ist ja $(a \leq b) = (a\bar{b} = 0)$ und $(a \leq | b) \stackrel{?}{=} (a\bar{b} > 0)$.

Theorem 15 a. Die Summe $\sum_n U(u)$, wo $U(u)$ eine numerische Aussage ist, die sich auf die variable Klasse u außer eventuel anderen konstanten Klassen a, b, c, \dots bezieht, ist immer gleich einer numerischen Aussage $U(a, b, c, \dots)$, welche die konstanten Klassen allein betreffen. (Sind keine konstanten Klassen vorhanden, ist $\sum_n U(u)$ natürlich entweder eine Tautologie oder ein Widerspruch, und die Überlegungen des folgenden Beweises gibt ein Mittel zu entscheiden, ob das eine oder das andere stattfindet. Ich sehe übrigens hier von diesem trivialeren Fall ab.)

Beweis: Jede in $U(u)$ auftretende einfache numerische Aussage ist von der Form $A \geq n$ oder von der Form $A \leq n$, wo n eine ganze nicht-negative Zahl ist, während A ein Klassenausdruck ist, der durch die drei identischen Spezies aus einfachen Klassensymbolen, teils konstanten a, b, c, \dots , teils u , aufgebaut ist. Jeder solche Ausdruck läßt sich aber in BOOLE'scher Weise entwickeln. Es wird dann $A = K_1 + K_2 + \dots$, wo $K_1, K_2 \dots$ gewisse Konstituenten in der Entwicklung von 1 nach den Klassen a, b, c, \dots, u sind. Diese Konstituenten sind untereinander disjunkt, und infolgedessen wird es möglich sein jede der Aussagen $A \geq n$ oder $A \leq n$ in Aussagen der Formen $K \geq n$, $K \leq n$, wo K ein Konstituent ist, aufzuspalten. Dies geschieht mit Hülfe des folgenden Lemmas, dessen Richtigkeit unmittelbar einleuchtet:

Hilfsatz 1. Sind a und b disjunkte Klassen, so besteht die Gleichung

$$(a + b \supseteq n) = (a \supseteq n) + (a \supseteq n-1)(b \supseteq 1) + (a \supseteq n-2)(b \supseteq 2) + \dots \\ + (a \supseteq 1)(b \supseteq n-1) + (b \supseteq n),$$

aus welcher man durch Ersatz von n mit $n+1$ und beiderseitiges Negieren auch folgende Gleichung erhält:

$$(a + b \leq n) = (a \leq n)((a \leq n-1) + (b \leq 1)) \dots \\ ((a \leq 1) + (b \leq n-1))(b \leq n).$$

Nach diesem Satz wird es dann möglich sein sowohl jede Aussage $K_1 + K_2 + \dots \supseteq n$ wie jede Aussage $K_1 + K_2 + \dots \leq n$ in Aussagen der Formen $K \supseteq n$ und $K \leq n$ zu zerlegen. Der gegebene Aussagenausdruck läßt sich deshalb mit Hilfe der drei Operationen des Aussagenkalküls aus Aussagen der beiden Formen $K \supseteq n$ und $K \leq n$ aufbauen. Da aber die Verneinung von $K \supseteq n$ die Aussage $K \leq n-1$ ist, und die Verneinung von $K \leq n$ die Aussage $K \supseteq n+1$ ist, so kann $U(u)$ durch Ausführung aller Negationen als eine Summe von Produkten dargestellt werden, wobei jedes Produkt nur Aussagen der Formen $K \supseteq n$ und $K \leq n$ als Faktoren enthält. Setzen wir demgemäß $U(u) = \mathfrak{P}_1(u) + \dots + \mathfrak{P}_a(u)$, wo $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_a$ die Produkte sind, so haben wir:

$$\sum_u U(u) = \sum_u \mathfrak{P}_1(u) + \sum_u \mathfrak{P}_2(u) + \dots + \sum_u \mathfrak{P}_a(u).$$

Betrachten wir deshalb jetzt $\sum_u P(u)$, wo $P(u)$ ein Produkt von Aussagen der beiden Formen $K \supseteq n$, $K \leq n$ ist. Jeder Konstituent K ist entweder von der Form ku oder von der Form $k\bar{u}$, wo k ein Konstituent in der Entwicklung der Allklasse in Bezug auf die konstanten Klassen a, b, c, \dots ist. Es ist deshalb $P(u)$ ein Produkt von Faktoren der vier Formen $ku \supseteq n$, $ku \leq n$, $k\bar{u} \supseteq n$, $k\bar{u} \leq n$. Weiter können wir

$$P(u) = P_1(u)P_2(u) \dots P_m(u)$$

setzen, wo $P_1(u)$ alle Faktoren von $P(u)$ enthält, wo der Konstituent k_1 auftritt, $P_2(u)$ alle Faktoren von $P(u)$ enthält, wo der Konstituent k_2 auftritt, usw. Es ist dann:

$$\text{Hilfsatz 2:} \quad \sum_u P(u) = \sum_u P_1(u) \cdot \sum_u P_2(u) \dots \sum_u P_m(u).$$

Denn aus $P(u) \leq P_r(u)$ ¹ ($r = 1, 2, \dots, m$) folgt $\sum_u P(u) \leq \sum_u P_r(u)$, und da dies für jedes r gilt, auch $\sum_u P(u) \leq \sum_u P_1(u) \cdot \sum_u P_2(u) \dots \sum_u P_m(u)$. Wird umgekehrt die Gültigkeit von $\sum_u P_1(u) \dots \sum_u P_m(u)$ vorausgesetzt, so sei u_r ($r = 1, 2, \dots, m$) ein Wert von u , für den die Aussage $P_r(u)$ gültig ist, also $P_r(u_r)$ gültig. Setzen wir jetzt $u = \sum_1^m k_r u_r$. Jeder Faktor von $P_r(u)$ ist von einer der 4 Formen $k_r u \geq n$, $k_r u \leq n$, $k_r \bar{u} \geq n$, $k_r \bar{u} \leq n$. Setzt man $u = \sum_1^m k_s u_s$ in $k_r u \geq n$ ein, erhält man $k_r u_r \geq n$. Ebenso wird $k_r u \leq n$ zu $k_r u_r \leq n$. Da $\bar{u} = \sum_1^m k_s \bar{u}_s + \prod_1^m \bar{k}_s$ ist, gehen auch $k_r \bar{u} \geq n$ und $k_r \bar{u} \leq n$ bzw. in $k_r \bar{u}_r \geq n$ und $k_r \bar{u}_r \leq n$ über. Es ist deshalb für jedes r $P_r(u) = P_r(u_r)$. Da nun $P_r(u_r)$ für jedes r richtig ist, gilt also auch die Aussage $\prod_1^m P_r(u) = P(u)$, wenn $u = \sum_1^m k_r u_r$ ist, d. h. die Aussage $\sum_u P(u)$ ist erfüllt. Hierdurch ist unser Hilfsatz 2 bewiesen.

Unsere Aufgabe ist jetzt dazu reduziert die Summe $\sum_u p(u)$ zu finden, wo $p(u)$ ein Produkt von Faktoren der Formen $ku \geq n$, $ku \leq n$, $k\bar{u} \geq n$, $k\bar{u} \leq n$ ist, wo k überall derselbe Konstituent in der Entwicklung von r nach a, b, c, \dots ist. Es ist klar, daß wir höchstens einen Faktor jeder Art brauchen; denn kommen mehrere vor, ist nur einer wesentlich; die anderen sind Folgen davon und können vernachlässigt werden, ohne daß die Aussage ihren Sinn verändert. Denken wir uns diese Reduktion, wenn nötig, ausgeführt, so bleiben folgende Fälle: Entweder ist

$$p(u) = (ku \geq n_1) (ku \leq n_2) (k\bar{u} \geq n_3) (k\bar{u} \leq n_4),$$

oder $p(u)$ ist das Produkt von nur 3 oder nur 2 oder nur einem dieser vier Faktoren. Wir brauchen also bloß \sum_u in diesen Fällen zu finden.

Wenn alle 4 Faktoren auftreten, erhält man

$$\begin{aligned} \sum_u p(u) &= \sum_u (ku \geq n_1) (ku \leq n_2) (k\bar{u} \geq n_3) (k\bar{u} \leq n_4) = \\ &= (k \geq n_1 + n_3) (k \leq n_2 + n_4) (n_1 \leq n_2) (n_3 \leq n_4). \end{aligned}$$

Es treten hier Aussagenfaktoren, $(n_1 \leq n_2)$ und $(n_3 \leq n_4)$, auf, welche nur die gegebenen Zahlen betreffen.

¹ Das Zeichen \leq zwischen zwei Aussagen soll bedeuten, daß die letztere eine Folge der ersteren ist.

Wenn nur 3 der Faktoren auftreten, erhält man :

$$\sum_u (ku \geq n_1) (ku \leq n_2) (k\bar{u} \geq n_3) = (k \geq n_1 + n_3) (n_1 \leq n_2).$$

$$\sum_u (ku \geq n_1) (ku \leq n_2) (k\bar{u} < n_4) = (k \leq n_2 + n_4) (k \geq n_1) (n_1 \leq n_2).$$

$$\sum_u (ku \geq n_1) (k\bar{u} \geq n_3) (k\bar{u} < n_4) = (k \geq n_1 + n_3) (n_3 < n_4).$$

$$\sum_u (ku < n_2) (k\bar{u} \geq n_3) (k\bar{u} < n_4) = (k < n_2 + n_4) (k \geq n_3) (n_3 < n_4).$$

Wenn nur 2 der 4 Faktoren auftreten, erhalten wir :

$$\sum_u (ku > n_1) (ku \leq n_2) = (k > n_1) (n_1 \leq n_2).$$

$$\sum_u (k\bar{u} > n_3) (k\bar{u} < n_4) = (k \geq n_3) (n_3 \leq n_4).$$

$$\sum_u (ku \geq n_1) (k\bar{u} > n_3) = (k \geq n_1 + n_3).$$

$$\sum_u (ku \leq n_2) (k\bar{u} \leq n_4) = (k < n_2 + n_4).$$

$$\sum_u (ku > n_1) (k\bar{u} < n_4) = (k > n_1).$$

$$\sum_u (ku < n_2) (k\bar{u} > n_3) = (k \geq n_3).$$

Endlich haben wir :

$$\sum_u (ku \geq n_1) = (k \geq n_1).$$

$$\sum_u (ku < n_2) = 1.$$

$$\sum_u (k\bar{u} \geq n_3) = (k \geq n_3).$$

$$\sum_u (k\bar{u} < n_4) = 1.$$

Es ist also in jedem Falle die Summe $\sum_u p(u)$ als ein Produkt ausdrückbar, dessen Faktoren teils die Form $k < n$, teils die Form $k \geq n$ und teils die Form $n_1 < n_2$ haben. Wenn aber die in der zu summierenden Aussage auftretenden Zahlen bestimmt gegeben sind, so ist jede der letzten Aussagen $n_1 < n_2$ entweder $= 1$ oder $= 0$ unabhängig von den gegebenen Klassen. Infolgedessen wird $\sum_u p(u)$ in jedem Falle ein Produkt von Faktoren der Formen $k > n$, $k \leq n$.

Wir haben aber oben gefunden, daß $\sum_u \mathcal{U}(u) = \sum_u \mathfrak{P}_1(u) + \dots + \sum_u \mathfrak{P}_n(u)$ war, und hier war wieder jedes $\mathfrak{P}_r(u)$ von der Form $\mathfrak{P}_r(u) = \mathfrak{P}_{r,1}(u) \dots \mathfrak{P}_{r,n_r}(u)$, wo in jedem $\mathfrak{P}_{r,s}(u)$ bloß ein Konstituent vorkam,

und wir haben auch gesehen, daß $\sum_u \mathfrak{P}_1(u) = \sum_u \mathfrak{P}_{r,1}(u) \sum_u \mathfrak{P}_{r,2}(u) \dots \sum_u \mathfrak{P}_{r,s}(u)$ sein mußte. Nach dem zuletzt bewiesenen ist aber jede Summe $\sum_u \mathfrak{P}_{r,s}(u)$ ein Produkt von Aussagen der Formen $k \geq n$, $k \leq n$, wo k ein Konstituent in der Entwicklung von \mathfrak{r} nach den Klassen a, b, c, \dots ist. Infolgedessen wird $\sum_u U(u)$ in letzter Instanz eine numerische Aussage über die konstanten Klassen a, b, c, \dots .

Hierdurch ist das Theorem bewiesen.

Soll man eine gegebene numerische Aussage $U(u)$ in Bezug auf u *produktieren*, so kann man zuerst die Negation des Produktes $\prod_u U(u)$, also $\sum_u \overline{U(u)}$, suchen. Da die Negation einer numerischen Aussage wieder eine solche ist, können wir nach Theorem 15 a $\sum_u \overline{\overline{U(u)}}$ finden, und diese Summe wird eine numerische Aussage über die konstanten Klassen. Das Produkt $\prod_u U(u)$ wird deshalb auch eine numerische Aussage über die von u unabhängigen Klassen.

Die gefundenen Resultate führen sofort zu dem umfassenderen Satze:

Theorem 15 b. *Es sei $U(u, v, \dots)$ eine beliebige numerische Aussage, die gewisse variable Klassen u, v, \dots außer gewissen konstanten Klassen a, b, c, \dots betrifft. Dann ist es immer möglich Produktationen und Summationen dieser Aussage in Bezug auf die Klassen u, v, \dots auszuführen, (also z. B. $\prod_{u,v} \prod U(u, v)$, $\prod_{u,v} \sum U(u, v)$, $\sum_{u,v} \prod U(u, v)$, $\sum_{u,v} \sum U(u, v)$) zu finden im Falle zweier Variablen, u und v) und das Resultat wird immer eine numerische Aussage über die Klassen a, b, c, \dots . Doch kann es selbstverständlich eintreten, daß sich diese Aussage auf eine Tautologie oder einen Widerspruch reduziert.*

Beweis: Betrachten wir der Deutlichkeit halber den Spezialfall $\prod_{u,v,w} \sum U(u, v, w)$. Dann kann man zuerst $\prod_{u,v,w} U(u, v, w)$ finden; bei dieser Produktation bleiben auch u und v konstant außer den etwa sonst vorkommenden Klassen a, b, c, \dots , sodaß nach dem eben bewiesenen $\prod_{u,v,w} U(u, v, w)$ eine numerische Aussage $U^1(u, v)$ über u, v und a, b, c, \dots

wird. Dann läßt sich $\sum_v U^1(u, v)$ ausführen; es bleibt bei dieser Summation u konstant, sodaß wir $\sum_v U^1(u, v) = U^2(u)$ erhalten, wo $U^2(u)$ eine numerische Aussage über u und a, b, c, \dots ist. Endlich wird $\prod_u U^2(u)$ eine numerische Aussage, welche die Klassen a, b, c, \dots allein betrifft.

Es ist klar, daß dieses Verfahren auch in allen anderen Fällen möglich ist, wodurch Theorem 15 b bewiesen ist.

Wir haben bisher bloß Summationen und Produktationen betrachtet, die über *alle* Klassenwerte u überhaupt ausgedehnt waren. Statt dessen kann man natürlich auch Summationen und Produktationen auszuführen suchen, welche nur über diejenigen Werte einer variablen Klasse u ausgedehnt werden, die eine Bedingung erfüllen. Es ist aber leicht zu sehen, daß wenn diese Bedingung auch eine numerische Aussage ist, die Produktation oder Summation sich sofort auf die vorher behandelte uneingeschränkte Produktation oder Summation zurückführen läßt. Soll man z. B. $\sum' U_1(u)$ finden, wo der Strich beim \sum -Zeichen bedeutet, daß die Summation nur über diejenigen Werte von u ausgedehnt werden soll, für welche eine zweite numerische Aussage $U_2(u)$ stattfindet, so hat man $\sum' U_1(u) = \sum_u U_1(u) U_2(u)$, wo die Summation über alle Werte von u ausgedehnt wird.

Ich will hier einen Spezialfall davon besonders hervorheben. Daß eine Klasse i ein Individuum ist, kann durch die numerische Aussage $(i \geq 1)$ ($i \leq 1$) ausgedrückt werden. Infolgedessen werden Produktationen und Summationen in Bezug auf variable Individuumssymbole immer zu numerischen Aussagen über die von diesen Symbolen unabhängigen Klassensymbole führen. Wir haben also:

Theorem 16. *Es sei $U(i, j, \dots)$ eine numerische Aussage, die gewisse variable Individuen i, j, \dots und gewisse konstanten Klassen a, b, c, \dots betrifft. Es ist dann möglich Produktationen und Summationen in Bezug auf i, j, \dots auszuführen, indem also i, j, \dots unabhängig von einander alle Individuen des Denkbereiches durchlaufen, und das Ergebnis ist eine numerische Aussage über die konstanten Klassen a, b, c, \dots .*

Dies ist dadurch von besonderem Interesse, daß man hieraus leicht folgenden Satz ableiten kann:

Theorem 17 a. *Jede Zählgleichung¹, worin nur uninäre Relativkoeffizienten oder höchstens noch Koeffizienten von \mathbf{o}' und \mathbf{i}'^2 vorkommen, läßt sich in eine numerische Aussage über die auftretenden Klassen transformieren.*

Beweis: Man schreibe die Zählgleichung in der Form $Z = \mathbf{1}$, wo Z ein Zähl Ausdruck¹ ist. Wir können dann jeden auftretenden Relativkoeffizienten \mathbf{o}'_{ij} durch die Aussage $ij \leq \mathbf{o}$ und ebenso jeden Koeffizienten \mathbf{i}'_{ij} durch $ij \geq \mathbf{1}$ ersetzen. Außerdem kann jeder uninäre Relativkoeffizient \mathbf{a}_i durch $(ai \geq \mathbf{1})$ ersetzt werden. Der ganze Zähl Ausdruck Z entsteht dann aus der in dieser Weise gebildeten numerischen Aussage durch Produktationen und Summationen in Bezug auf die Individuumsymbole i, j, \dots Nach Theorem 16 wird aber das alles eine numerische Aussage über die vorkommenden uninären Relative oder Klassen.

Es gilt aber auch das umgekehrte:

Theorem 17 b. *Jede numerische Aussage über gewisse Klassen a, b, c, \dots läßt sich in einen Zähl Ausdruck transformieren, worin nur Koeffizienten der uninären Relative a, b, c, \dots außer Koeffizienten von \mathbf{o}' und \mathbf{i}' vorkommen.*

Es ist dies fast unmittelbar einleuchtend; denn die einfachen numerischen Aussagen $a \geq n, a < n$ sind ja bezw. mit den Zähl Ausdrücken³

$$\Sigma_{i_1} \Sigma_{i_2} \dots \Sigma_{i_n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} \mathbf{o}'_{i_1 i_2} \dots \mathbf{o}'_{i_1 i_n} \mathbf{o}'_{i_2 i_3} \dots \mathbf{o}'_{i_{n-1} i_n}$$

und

$$H_{i_1} \dots H_{i_{n+1}} (\bar{a}_{i_1} + \dots + \bar{a}_{i_{n+1}} + \mathbf{i}'_{i_1 i_2} + \dots + \mathbf{i}'_{i_1 i_{n+1}} + \\ + \mathbf{i}'_{i_2 i_3} + \dots + \mathbf{i}'_{i_n i_{n+1}})$$

gleichbedeutend. Da somit der Satz für ursprüngliche numerische Aussagen gültig ist, muß er auch für beliebige numerische Aussagen gültig sein, da die Zähl Ausdrücke sich durch Addition, Multiplikation und Negation reproduzieren.

¹ L. LÖWENHEIM, l. c., p. 448.

² \mathbf{o}' und \mathbf{i}' sollen bezw. die Relative, „verschieden von“ und „identisch mit“ bezeichnen.

³ Ich sehe hier die Zähl Ausdrücke selbst (und nicht erst die Zähl Gleichungen) als Aussagen an, was ja völlig berechtigt ist, wenn die Relativkoeffizienten schon als Aussagen angesehen werden.

Die Zähl ausdrücke der erwähnten Art sind also mit den numerischen Aussagen völlig gleichbedeutend.

Wir können deshalb das Theorem 15 b auch so ausdrücken :

Theorem 18. *Es sei $Z(u, v, \dots)$ ein Zähl ausdruck, worin nur Koeffizienten der uninären Relative u, v, \dots und der davon unabhängigen uninären Relative a, b, c, \dots außer Koeffizienten der relativen Moduln o' und i' vorkommen. Produktiert oder summiert man dann über die variablen uninären Relative u, v, \dots , so wird das Resultat immer ein Zähl ausdruck Z , worin nur Koeffizienten der konstanten uninären Relative a, b, c, \dots außer Koeffizienten von o' und i' auftreten, oder wenn man will, eine numerische Aussage über die konstanten Klassen a, b, c, \dots .*

Der Satz 4 bei LÖWENHEIM (l. c., p. 459) folgt ohne weiteres aus Theorem 18. Denn eine numerische Aussage, die keine Tautologie ist, ist natürlich innerhalb eines hinreichend groß gewählten endlichen Denkbereiches nicht identisch erfüllt.

Kristiania, 26. Mai 1917.

Th. S.

A CRYSTALLOGRAPHIC INVESTIGATION OF SOME ORGANIC ACIDS

BY
E. BERNER

(WITH 1 PLATE, AND 6 FIGURES IN THE TEXT)

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1919. No. 4)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

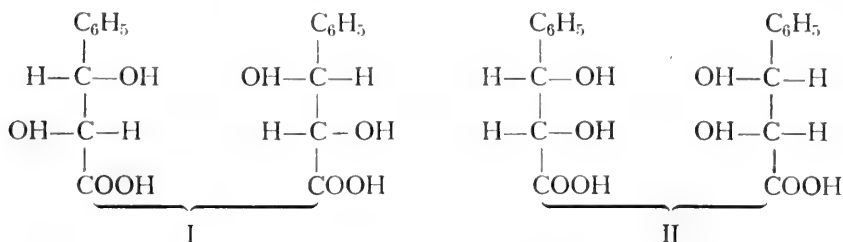
KRISTIANIA
IN COMMISSION BY JACOB DYBWAD

1920

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 1ste juni 1917
ved prof. dr. V. M. Goldschmidt.

**I. The Phenylglycerinic acid $C_6H_5 \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot COOH$
m. p. 122^0 and its optically active components.**

According to theory, the Phenylglycerinic acid $C_6H_5 \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot COOH$, is to be found in two different inactive forms, each of which may be separated into two optically active components. The constitutional formulæ of these acids are as follows:



In 1914, Prof. C. N. Riiber succeeded in separating one of these inactive acids (I m. p. 141^0) into its two optically active components.¹

A thorough crystallographic investigation of this 141^0 acid and its components was made in the same year by Prof. V. M. Goldschmidt.²

During the past year Prof. Riiber and I³ have separated the other inactive form of the Phenylglycerinic acid (II m. p. 122^0) into its optically active components. The crystallographic investigation of these acids was carried out by myself in the organic-chemical laboratory at Norges Tekniske Høiskole in Trondhjem.

¹ Ber. d. deutsch. chem. Ges. 48,823 (1915).

² Zeitschr. f. Kryst. u. Min. 55,123 (1915).

³ Ber. d. deutsch. chem. Ges. 50,893, (1917).

In order to obtain measureable crystals of the inactive 122° acid, I prepared a saturated watery solution (the acid is very easily soluble in water), dropped on the surface a few small grains of the same acid and evaporated the solution in a vacuumexsiccator above sulphuric acid. After a few days I obtained a number of crystals, consisting of needles and tables, which were removed from the mother liquor and dried between filter paper.

This inactive acid presents a very interesting case, for it crystallises in the monoclinic-sphenoidal class and appears, according to the symmetry of this class, in two enantiomorphous forms, which are completely inactive in solution. Each of these forms has also the same meltingpoint as a mixture containing 50 % of either.

This phenomenon seems to be a merely crystallographic one without any connection with the acid, as a true racemic compound, but only a result of the hemihedral symmetry of the class to which it belongs.

Such a case has till now been known only in compounds not containing asymmetric carbon-atoms, for example, in Quartz and Sodium chlorate.

As the case may possibly be of another nature, caused by the contents of two asymmetric carbon-atoms in the molecule, it will be subjected to a thorough investigation, as soon as I have worked out a new quantity of the acid.

In my attempts to crystallise the two optically active components of the 122° acid, I have hitherto only succeeded in preparing measureable crystals of one of them, the dextro-acid.

As this acid is too soluble in water, this solvent could not be used. However, by preparing a dilute solution of the dextro-acid in chemically pure methylal, adding to this an equal volume of benzene and evaporating this solution slowly above vaseline oil, a number of fairly well developed crystals were formed.

The racemic Phenylglycerinic acid.

Melting-point 122° C.

Specific gravity (by the Retgers suspension method) 1,370.

The crystals are obtained from a watery solution by $15-17^{\circ}$ C.

Class of symmetry: Monoclinic-sphenoidal.

Axial angle $\beta = 101^{\circ} 27'$.

Ratio of axes: $a:b:c = 2,5605:1:1,7251$.

Appears in two enantiomorphous forms, which in solution show no optical activity.

Forms observed, frequently: $a \{100\}$, $m \{110\}$, $\mu \{1\bar{1}0\}$, $r \{101\}$, $\rho \{10\bar{1}\}$, $c \{001\}$, $q \{011\}$, $o \{111\}$, rarely: $\{102\}$.

The crystals are partly elongated along the edge $a:r$, partly formed in tables parallel to $a \{100\}$.

Fig. 1 shows the two enantiomorphous forms.

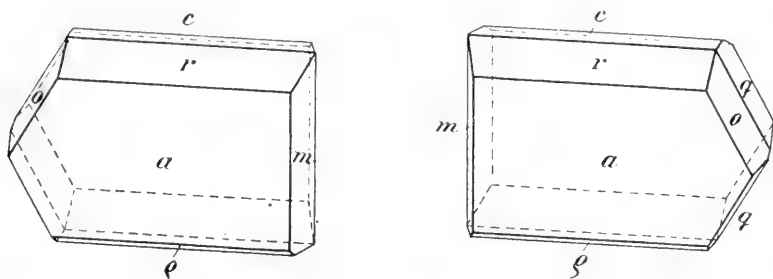


Fig. 1.

The results of the measurement of angles on 15 species of the dextro-form and 12 species of the lævo-form are given in table A.

Perfect cleavage parallel to $a \{100\}$, imperfect parallel to $c \{001\}$.

By means of a mixture of alcohol and benzene I have etched figures on the face $a \{100\}$. These etched figures show distinctly the sphenoidal symmetry of the crystals.

Fig. 2 shows the etched figures on $a \{100\}$ on the two forms. The figure on plate 1 is a microphotography of the etched figures on $a \{100\}$.

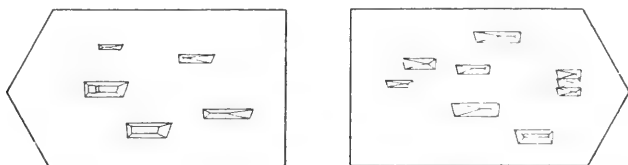


Fig. 2.

The crystals show extinction directions between crossed Nicols parallel to the edges $a:r$ and $a:m$.

The plane of the optic axes is $b \{010\}$; $2E = \text{ca. } 46^\circ$.

The first median line lies in the acute angle β , and inclines 3° to the c -axis.

The d-Phenylglycerinic acid.

Melting-point 95° .

Specific gravity: 1.419.

Table A

Angle	Dextro-form		Lavo-form		Mean of the two forms	Calculated
	No. of Measurements	Limits	Mean observed	No. of Measurements	Limits	Mean observed
(100):(101)	11	47° 16' — 49° 19'	48° 23'	7	46° 43' — 48° 57'	48° 20' *
(100):(011)	21	83 41 — 85 2	84 15	14	83 22 — 85 2	84 12 *
[010]:[011]	27	59 28 — 60 29	59 52	13	59 36 — 60 29	59 54 *
(100):(001)	8	78 0 — 79 53	78 46	6	77 7 — 79 49	78 41
(100):(101)	6	63 40 — 65 22	64 36	3	64 22 — 65 13	64 40
(100):(111)	9	66 0 — 66 54	66 14	5	65 25 — 66 31	66 11
(100):(111)	8	113 2 — 114 31	113 31	4	113 1 — 114 3	113 29
(100):(101)	4	115 4 — 116 13	115 28	—	—	115 28
(100):(110)	3	68 33 — 68 51	68 40	1	—	68 39
[010]:[001]	2	—	ca. 90°	1	—	ca. 90°
						90 0

The crystals are obtained from a solution in methylal-benzene.

Class of symmetry: Monoclinic-sphenoidal.

Axial angle $\beta = 90^{\circ} 40'$.

Ratio of axes: $a:b:c = 2,5408:1:2,2216$.

Forms observed: $a \{100\}$, $r \{101\}$, $q \{10\bar{1}\}$, $m \{110\}$, $\mu \{1\bar{1}0\}$, $c \{001\}$.

Faces of the fourth order are rarely developed but they are not measurable.

Cleavage, imperfect parallel to $m \{110\}$ and $c \{001\}$.

The measurement of angles on 16 species gave:

Table B

Angle	No. of Measurements	Limits	Mean observed	Calculated
$(100):(101)$	11	$47^{\circ} 51' - 49^{\circ} 9'$	$48^{\circ} 27' *$	—
$(100):(10\bar{1})$	14	$48 19 - 49 52$	$49 12 *$	—
$(100):(110)$	17	$68 9 - 68 56$	$68 31 *$	—
$(100):(001)$	14	$88 59 - 89 38$	$89 41$	$89^{\circ} 20'$
$[010]:[001]$	10	$89 53 - 90 24$	$90 10$	$90 0$

In fig 3 are shown the general appearance of the crystals.

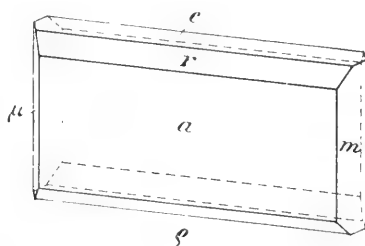


Fig. 3.

The etched figures on the face $a \{100\}$ show the sphenoidal symmetry.

The plane of the optic axes is $b \{010\}$; $2E = \text{ca. } 94^{\circ}$. The first median line is nearly parallel to the a -axis.

Knowing the axial angle, the axial ratios and the density of the crystals of the two Phenylglycerinic acids, I am able to calculate the molecular distance ratios χ , ψ and ω of the two acids. For this purpose I

have to use constants determined from the optically active acids, and not those from the inactive acids, because one of these, the 122° acid, is a true racemic compound and the other one a pseudo-racemic conglomerate; the first one having a density different from that of its components, and the other one the same density as its components.

The constants of the 141° acid are:¹

$a : b : c = 2,1875 : 1 : 2,0794$, $\beta = 93^{\circ} 53'$ and the density $d = 1,451$.

The density has later been determined by Prof. Goldschmidt and myself to be 1,442.

By using the formulæ: $\chi = \sqrt[3]{\frac{a^2 V}{c \cdot \sin \beta}}$, $\psi = \sqrt[3]{\frac{V}{a \cdot c \cdot \sin \beta}}$, $\omega = \sqrt[3]{\frac{c^2 V}{a \cdot \sin \beta}}$

and $V = \frac{M}{d}$, the molecular weight M being 182, I find:

For the act. comp. of the 122° acid $\chi = 7,1960$ $\psi = 2,8322$ $\omega = 6,2920$
 » » » » » » 141° » » = 6,6281 » = 3,0300 » = 6,3001

The melting-point curve between the inactive and the active acid has a form characteristic of the true racemic compounds.² The melting-points of different mixtures of the racemic- and the d-acid are as follows:

100 0/0 dextro-acid	0 0/0 rac. acid	m.p.
95 » » »	5 » » »	95°
95 » » »	5 » » »	93°
75 » » »	25 » » »	91°
60 » » »	40 » » »	102°
50 » » »	50 » » »	115°
25 » » »	75 » » »	118°
0 » » »	100 » » »	122°

II. The Phenyl β -bromo α -hydroxypropionic acid $C_6H_5 \cdot CHBr \cdot CHOH \cdot COOH$ m. p. 165° and its optically active components.

These acids are produced from the Phenylglycerinic acid 141° and its components by replacing the β -OH with Br.

Crystals of the racemic acid are obtained by the slow evaporation of a solution in absolutely dry ether. In crystallising the active components, chloroform was used as a solvent.

¹ Zeitschr. f. Kryst. u. Min. 55, 123 (1915).

² Roozeboom: Zeitsch. physikal. Chem. 28, 494 (1899).

The racemic acid.

Melting-point 165° .

Specific gravity 1.676.

Class of symmetry: monoclinic-prismatic or monoclinic-domal.

Axial angle $\beta = 92^{\circ} 42'$.Ratio of axes: $a:b:c = 1.822:1:0.999$.

All the crystals examined are twins, with the face $a(100)$ as a twin plane. (Fig. 4).

The twin nature is betrayed by the presence of a re-entrant angle between the two basal planes.

Forms observed: $a\{100\}$, $c\{001\}$, $m\{110\}$, $p\{310\}$, $x\{11\bar{2}\}$, $v\{12\bar{1}\}$.

The measurements of the angles on 15 species gave:

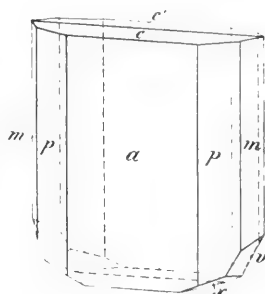


Fig. 4.

Table C

Angle	No. of Measurements	Limits	Mean observed	Calculated
$(100):(110)$	22	$59^{\circ} 24' - 62^{\circ} 48'$	$61^{\circ} 12' *$	—
$(100):(001)$	22	$86^{\circ} 3' - 87^{\circ} 35'$	$87^{\circ} 18' *$	—
$[010]:[011]$	7	$26^{\circ} 23' - 26^{\circ} 47'$	$26^{\circ} 34' *$	—
$(100):(310)$	26	$29^{\circ} 30' - 32^{\circ} 10'$	$30^{\circ} 45'$	$31^{\circ} 14'$
$(100):(12\bar{1})$	9	$77^{\circ} 23' - 78^{\circ} 39'$	$77^{\circ} 48'$	$77^{\circ} 20'$
$(100):(11\bar{2})$	8	$77^{\circ} 57' - 79^{\circ} 48'$	$78^{\circ} 59'$	$78^{\circ} 40'$
$[001]:[010]$	5	$62^{\circ} 35' - 63^{\circ} 53'$	$63^{\circ} 11'$	$63^{\circ} 26'$
$[001]:[010]$	7	$89^{\circ} 38' - 90^{\circ} 30'$	$90^{\circ} 10'$	$90^{\circ} 0'$

Cleavage imperfect parallel to $b\{010\}$ and $c\{001\}$.

The plane of the optic axes is nearly perpendicular to the face $a(100)$. The first median line lies in the $a-c$ plane.

Through $a\{100\}$, by using convergent light and an immersion oil of high refractive index, an interference figure is seen, demonstrating the twinning parallel to $a\{100\}$.

The active acids.

Melting-point 143° .

Specific gravity: d-acid 1.700; l-acid 1.700.

Class of symmetry: monoclinic-sphenoidal.

Axial angle $\beta = 94^{\circ} 11'$.

Ratio of axes: $a:b:c = 1,9862:1:0,8564$.

The crystals are elongated along the edge $a:r$.

Forms observed: frequently: $a\{100\}$, $m\{110\}$, $\mu\{1\bar{1}0\}$, $s\{101\}$, $\sigma\{10\bar{1}\}$, $r\{301\}$, $\varsigma\{30\bar{1}\}$; rarely: $\{501\}$ and $i\{454\}$.

Fig. 5 a shows a crystal of the lævorotary acid and fig. 5 b one of the dextrorotary acid.

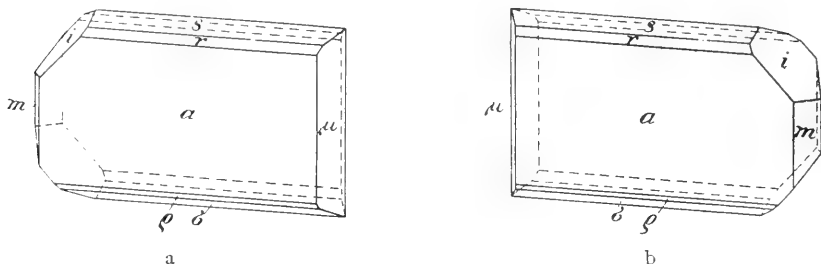


Fig. 5.

The results of measurement of the angles are given in table D.

Cleavage perfect parallel to $a\{100\}$, imperfect parallel to $b\{010\}$.

By means of alcohol, figures were etched on $a\{100\}$ showing the enantiomorphism of the d- and the l-acid. Fig. 6 a is the etched figures on the l-acid and fig. 6 b those on the d-acid.

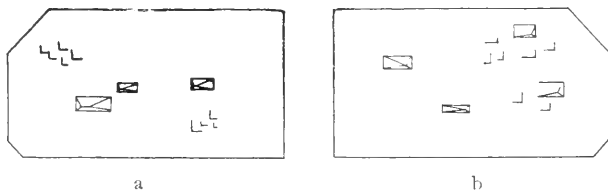


Fig. 6.

The plane of the optic axes is $b\{010\}$; $2E = \text{ca. } 88^{\circ}$.

The first median line lies in the obtuse angle β , and inclines $\text{ca. } 10^{\circ}$ to the c -axis.

Table D

Angle	Dextro-acid			Lævo-acid			Mean of the two forms	Calculated
	No. of Measurements	Limits	Mean observed	No. of Measurements	Limits	Mean observed		
(100):(101)	12	62° 42'—63° 23'	63° 9'	10	62° 52'—63° 38'	63° 13'	63° 11' *	—
(100):(101)	19	70 2—70 22	70 12	11	69 46—70 32	70 16	70 14 *	—
(100):(110)	6	62 58—63 19	63 11	10	62 23—63 40	63 15	63 13 *	—
(100):(301)	3	35 40—35 59	35 51	—	—	—	35 51	36° 7'
(100):(301)	12	38 42—39 26	39 10	11	38 41—39 27	39 1	39 6	39 15
(100):(501)	—	—	—	2	25 33—25 53	25 43	25 43	25 35
(100):(454)	10	—	ca. 70°	—	—	—	ca. 70°	70 58
[010]:[045]	10	—	ca. 46°	—	—	—	ca. 46°	46 57
[010]:[001]	7	89 40—90 15	89° 57'	6	89 37—90 24	90 3	90 0	90 0

III. The Phenyl β -bromo α -hydroxypropionic acid $C_6H_5 \cdot CHBr \cdot CHOH \cdot COOH$ m. p. 157^0 and its optically active components.

In analogy with the stereoisomeric acids, these compounds are obtained from the Phenylglycerinic acid 122^0 and its components by replacing the β -OH with Br.

As a solvent for the racemic acid are used ether, for the components chloroform.

The racemic acid.

Melting-point 157^0 .

Specific gravity 1.674.

Class of symmetry: monoclinic-prismatic or monoclinic-domal.

Axial angle $\beta = 93^0 21'$.

Ratio of axes: $a:b:c = 1.814:1:0.976$.

All the crystals examined are twins, with the face $a(100)$ as a twin plane.

The appearance of the crystals is as in fig. 4, but without the face x . The twin nature is, as by the isomeric acid, betrayed by the presence of a re-entrant angle between the two basal planes.

Forms observed: $a\{100\}$, $c\{001\}$, $m\{110\}$, $p\{310\}$, $v\{12\bar{1}\}$.

As the crystals are small and badly developed, a large number had to be measured. The results of the measurements of 29 species are given in the following table:

Table E

Angle	No. of Measure- ments	Limits	Mean. observed	Calculated
$(100):(310)$	43	$30^0 \quad 1' - 32^0 \quad 30'$	$31^0 \quad 8' *$	—
$(100):(001)$	28	$85 \quad 55 - 87 \quad 28$	$86 \quad 39 *$	—
$[010]:[011]$	11	$25 \quad 39 - 27 \quad 26$	$26 \quad 44 *$	—
$(100):(110)$	41	$59 \quad 18 - 62 \quad 7$	$60 \quad 52$	$61^0 \quad 6'$
$(100):(121)$	12	$76 \quad 30 - 78 \quad 40$	$77 \quad 43$	$77 \quad 35$
$[001]:[010]$	12	—	ca. 90^0	$90 \quad 0$

Cleavage, imperfect parallel to $b\{010\}$ and $c\{001\}$.

The plane of the optic axes is nearly perpendicular to the face $a(100)$. The first median line lies in the a - c plane.

The interference figure seen through $a\{100\}$, demonstrates the twinning parallel to $a\{100\}$.

The active acids.

Melting-point 138° .

Specific gravity d-acid 1,700, l-acid 1,700.

Class of symmetry: monoclinic-sphenoidal.

Axial angle $\beta = 94^{\circ} 5'$.

Ratio of axes: $a:b:c = 1,9840:1:0,8543$.

The crystals are elongated along the edge $a:r$.

Forms observed: $a\{100\}$, $m\{110\}$, $\mu\{1\bar{1}0\}$, $s\{101\}$, $\sigma\{10\bar{1}\}$, $\varsigma\{30\bar{1}\}$.

Faces of the fourth order are frequently developed, but they are not measureable. The appearance of the crystals is about the same as that of the two isomeric acids (Fig. 5 a and b).

The measurement of the angles are given in table F.

Cleavage perfect parallel to $a\{100\}$, imperfect parallel to $b\{010\}$.

The etched figures on the face $a\{100\}$ show the enantiomorphism of the d- and the l-acid.

The plane of the optic axes is $b\{010\}$; $2E = \text{ca. } 88^{\circ}$.

The first median line lies in the obtuse angle β and inclines $\text{ca. } 10^{\circ}$ to the c -axis.

As may be seen from the measurements of the two Phenyl β -bromo α -hydroxy-propionic acids and their components, there is a great conformity between these stereoisomeric compounds in all their crystallographic properties. This is an interesting fact, the chemical properties also being very similar. The chemical investigation of these compounds will be published shortly in Ber. d. deutsch. chem. Ges.

The melting-point curves between the inactive and the active form of the two Phenyl β -bromo α -hydroxypropionic acids are:

Between the inactive acid m. p. 165° and its d-component:

100 % rac. acid	0 % d-acid	m. p. 165°
75 » » »	25 » «	» 150°
50 » » »	50 » »	» $140,5^{\circ}$
37 » » »	63 » »	» $135,5^{\circ}$
25 » » »	75 » »	» 138°
0 » » »	100 » »	» 143°

Table I'

Angle	Dextro-acid		Levo-acid		Mean of the two forms	Calculated
	No. of Measurements	Limits	Mean observed	No. of Measurements	Limits	Mean observed
(100) : (101)	10	63° 3'—63° 52'	63° 28'	12	62° 44'—64° 3'	63° 17.5' *
(100) : (101)	18	69 35—70 45	70 12.5	12	69 35—70 26	70 10.5 *
(100) : (110)	12	62 25—64 24	63 14	15	62 17—63 53	63 12 *
(100) : (301)	10	38 44—39 30	39 15.5	9	38 54—39 39	39 16
[010] : [001]	9	89 45—90 18	89 57	8	89 48—90 15	89 59.5
						30° 14.5'
						90 0

Between the inactive acid m. p. 157° and its d-component:

100 % rac. acid	0 % d-acid	m. p. 157°
75 » » »	25 » »	» 144°
50 » » »	50 » »	» 134°
37 » » »	63 » »	» 133°
25 » » »	75 » »	» 135°
0 » » »	100 » »	» 138°

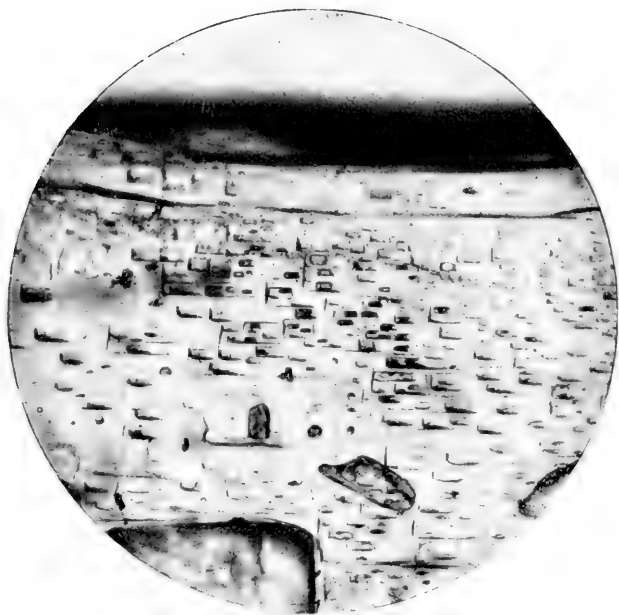
As may be seen from these curves, both the inactive acids are true racemic compounds.

The racemic nature is also evident from the solubilities of the acids: A saturated solution of inactive acid in chloroform is not saturated on active acid.¹

Trondhjem 29 May 1917.

¹ Roozeboom l. c.

Printed 27th January 1920.



A ————— B

The line A—B is parallel to the edge a:r.

AUFSTELLUNG EINER BASIS DES KUM-
MERSCHEN ZAHLKÖRPERS
SECHSTEN GRADES

VON

R. TAMBS LYCHE

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NAT. KLASSE. 1919. No. 5)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

1919

Fremlagt i den mat.-naturvid. klasses møte 21. sept. 1917 av prof. Palmstrøm.

Es sei $k(\zeta)$ der aus der Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gebildete Kreiskörper zweiten Grades; ferner sei μ eine beliebige ganze Zahl dieses Körpers, welche nicht die dritte Potenz einer Zahl desselben Körpers ist.

Der aus den Zahlen $\sqrt[3]{\mu} = \mathbf{M}$ und ζ gebildete Zahlkörper $k(\mathbf{M}, \zeta)$ heißt dann bekanntlich¹ ein Kummerscher Körper. Im vorliegenden Falle wird der Körper $k(\mathbf{M}, \zeta)$ vom sechsten Grade und ist zugleich der allgemeinste Kummersche Körper sechsten Grades.

Für den allgemeinen Zahlkörper dritten Grades läßt sich bekanntlich leicht eine Basis aufstellen²; es ist aber bemerkenswert, daß die dabei angewandte Schlußweise sich so modifizieren läßt, daß sie ermöglicht, eine Basis des Kummerschen Körpers sechsten Grades aufzustellen. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck dies zu zeigen. — Es wird dabei hervorgehen, daß diese Möglichkeit in erster Linie darauf beruht, daß der Kummersche Körper sechsten Grades als Relativkörper vom Relativgrade 3 in bezug auf den Körper $k(\zeta)$ aufgefaßt werden kann, und daß $k(\zeta)$ ein solcher Körper ist, in welchem das euklidische Teilerverfahren gilt — d. i. seine Klassenanzahl ist eins und seine Ideale sind sämtlich Hauptideale.

I.

Zuerst sei bemerkt, daß eine beliebige ganze Zahl \mathbf{A} in $k(\mathbf{M}, \zeta)$ in der Gestalt

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha + \beta \mathbf{M} + \gamma \mathbf{M}^2}{\delta}$$

geschrieben werden kann, wobei α, β, γ und δ ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ sind, die ohne gemeinsamen Idealfaktor vorausgesetzt werden

¹ Vergleiche z. B. D. HILBERT: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht d. deutsch. Mathematikervereins. 1894–95, p. 391.

² Siehe z. B. SOMMER: Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig u. Berlin 1907, p. 257 ff.

können. Es sei auch, was offenbar keine Einschränkung ist, vorausgesetzt, daß μ keinen Faktor enthält, der die dritte Potenz einer ganzen Zahl des Körpers $k(\zeta)$ ist.

Weil \mathbf{A} eine ganze Zahl ist, muß sie einer Gleichung der Gestalt

$$x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0$$

genügen, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ bedeuten. Es muß nämlich jedenfalls \mathbf{A} einer Gleichung der Gestalt

$$\alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0$$

genügen; daher genügt \mathbf{A} auch der Gleichung

$$(\alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3) \cdot (\alpha'_0 x^3 + \alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 x + \alpha'_3) = 0$$

indem die Accente, wie üblich, die zu der durch unaccentuierte Buchstaben dargestellten Zahlen konjugierten Zahlen in $k(\zeta)$ andeuten. Die letzte Gleichung hat aber ganzzahlige rationale Koeffizienten, und es sind daher nach der Definition einer ganzen Zahl sämtliche Koeffizienten dieser Gleichung durch $n(\alpha_0) = \alpha_0 \cdot \alpha'_0$ teilbar. Zuzufolge eines Satzes von HURWITZ¹, sind dann die Zahlen

$$\alpha_0 \alpha'_0, \alpha_0 \alpha'_1, \alpha_0 \alpha'_2, \alpha_0 \alpha'_3, \alpha_1 \alpha'_0, \dots, \alpha_3 \alpha'_3$$

sämtlich durch $\alpha_0 \alpha'_0$ teilbar. Es muß daher $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch α_0 teilbar sein, und wir können von vornherein annehmen, daß $\alpha_0 = 1$ ist, wie behauptet.

II.

Satz. Jede ganze Zahl \mathbf{A} des Körpers $k(\mathbf{M}, \zeta)$ kann in der Gestalt

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha + \beta \mathbf{M} + \gamma \mathbf{M}^2}{\delta}$$

geschrieben werden, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewisse ganze Zahlen aus $k(\zeta)$ sind, und die Primidealfaktoren von δ können nur sein:

1) Erste Potenz der von \mathbf{I} verschiedenen Primideale, deren Quadrat in μ aufgehen.

¹ HURWITZ: Ueber die Theorie der Ideale. Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1894.

2) l , wenn μ zu l prim oder durch l^2 teilbar ist.

3) l^2 , wenn μ zu l prim ist.

Es bedeutet dabei, wie üblich $l = (l) = (1 - \zeta)$.

Beweis. Wie üblich sei SQ die aus der ganzen Zahl Q des Körpers $k(\mathbf{M}, \zeta)$ durch die Substitution $(\mathbf{M} : \zeta \mathbf{M})$ hervorgehende Zahl. Wenn \mathbf{A} die frühere Bedeutung hat, so sind die Koeffizienten der Gleichung

$$x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0$$

der Reihe nach :

$$1, -(\mathbf{A} + S\mathbf{A} + S^2\mathbf{A}), \mathbf{A} \cdot S\mathbf{A} + S\mathbf{A} \cdot S^2\mathbf{A} + S^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, -\mathbf{A} \cdot S\mathbf{A} \cdot S^2\mathbf{A}.$$

Diese Zahlen müssen also ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ sein. Es ist dabei

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha + \beta \mathbf{M} + \gamma \mathbf{M}^2}{\delta}$$

$$S\mathbf{A} = \frac{\alpha + \beta \zeta \mathbf{M} + \gamma \zeta^2 \mathbf{M}^2}{\delta}$$

$$S^2\mathbf{A} = \frac{\alpha + \beta \zeta^2 \mathbf{M} + \gamma \zeta \mathbf{M}^2}{\delta}$$

d. h. es wird

$$\mathbf{A} + S\mathbf{A} + S^2\mathbf{A} = \frac{3\alpha}{\delta}$$

$$\mathbf{A} \cdot S\mathbf{A} = \frac{\alpha^2 - \zeta^2 \alpha \beta \mathbf{M} - \zeta \alpha \gamma \mathbf{M}^2 + \zeta^2 \beta^2 \mathbf{M}^2 - \beta \gamma \mu + \zeta^2 \gamma^2 \mu \mathbf{M}}{\delta^2}$$

sodafs

$$\mathbf{A} \cdot S\mathbf{A} + S\mathbf{A} \cdot S^2\mathbf{A} + S^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \frac{3\alpha^2 - 3\beta \gamma \mu}{\delta^2}$$

wird. Endlich gibt eine einfache Rechnung

$$\mathbf{A} \cdot S\mathbf{A} \cdot S^2\mathbf{A} = \frac{\alpha^3 + \beta^3 \mu + \gamma^3 \mu^2 - 3\alpha \beta \gamma \mu}{\delta^3}.$$

Es sei nun \mathfrak{p} ein von $l = (1 - \zeta)$ verschiedenes Primideal des Körpers $k(\zeta)$, welches in δ aufgeht; weil $\frac{3\alpha}{\delta}$ eine ganze Zahl ist, muß dann

$$(1) \quad \alpha \equiv 0 \quad (\mathfrak{p})$$

sein, also $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$. Da auch

$$\alpha^2 - \beta\gamma\mu \equiv 0 \pmod{p^2}$$

sein muß, folgt

$$(2) \quad \beta\gamma\mu \equiv 0 \pmod{p^2}$$

und daraus noch $\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \pmod{p^3}$; weil $\alpha^3 \equiv 0 \pmod{p^3}$, so folgt

$$(3) \quad \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Wäre nun μ nicht durch p teilbar, so würde infolge (2) p entweder in β oder in γ aufgehen und dann wegen (3) sowohl in β wie γ . Es haben aber $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Voraussetzung gemäß keinen gemeinsamen Idealfaktor; es muß daher

$$(4) \quad \mu \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wegen $\mu^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$ folgt aus (3)

$$\beta^3\mu \equiv 0 \pmod{p^2};$$

wäre daher μ nicht durch p^2 teilbar, so wäre β durch p teilbar und es wäre nach (3)

$$\gamma^3\mu^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$$

also auch γ durch p teilbar, was wieder mit der Voraussetzung unvereinbar ist.

Die Zahl δ kann daher außer dem Primideal \mathfrak{l} nur solche Primidealfaktoren enthalten, deren Quadrat in μ aufgehen. — Wäre nun δ durch p^2 teilbar, so wäre

$$\alpha \equiv 0 \pmod{p^2}$$

und daraus würde folgen, wegen $\alpha^2 - \beta\gamma\mu \equiv 0 \pmod{p^4}$, daß

$$\beta\gamma\mu \equiv 0 \pmod{p^4}$$

und $\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \pmod{p^6}$ wäre, und wegen $\alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 - 3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \pmod{p^6}$ würde $\beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \pmod{p^6}$, und umso mehr

$$\beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \pmod{p^4}$$

folgen; da aber sicher nicht $\mu \equiv 0 \pmod{p^3}$ ist, würde weiter $\beta^3\mu \equiv 0 \pmod{p^4}$ d. h. $\beta \equiv 0 \pmod{p}$ folgen, was endlich $\beta^3\mu \equiv 0 \pmod{p^5}$ und $\gamma^3\mu^2 \equiv 0 \pmod{p^5}$, also endlich auch $\gamma \equiv 0 \pmod{p}$ zufolge hätte, was wieder der Voraussetzung widerspricht.

Es ist damit der erste Teil des Satzes bewiesen.

Was das Primideal \mathfrak{l} betrifft, so nehmen wir erstens an, daß \mathfrak{l} , nicht aber \mathfrak{l}^2 in \mathfrak{o} aufgeht.

Es muß dann

$$\alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 - 3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^3),$$

daher

$$\alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^2)$$

sein; wäre dann μ durch \mathfrak{l} , aber nicht durch \mathfrak{l}^2 teilbar, so wäre $\alpha \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$, so daß $3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^3)$ und

$$\alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^3)$$

wäre; und da auch $\beta^3\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^2)$ sein müßte, wäre β durch \mathfrak{l} teilbar und damit, weil $\gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^3)$, auch γ . Dies ist aber wieder ausgeschlossen.

Geht dagegen \mathfrak{l}^2 in μ auf, so ist $\alpha \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$ und $\beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^3)$ was $\beta \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$, nicht aber $\gamma \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$ zufolge hat. Dies stellt sich also als möglich dar. Es ist dies die zweite Behauptung des Satzes.

Es gehe nun \mathfrak{l}^2 , nicht aber \mathfrak{l}^3 in \mathfrak{o} auf. Es ist dann

$$(5) \quad \alpha^2 - \beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^2).$$

$$(6) \quad \alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 - 3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^6).$$

Wäre nun μ durch \mathfrak{l} , aber nicht durch \mathfrak{l}^2 teilbar, so wäre α durch \mathfrak{l} teilbar und dann nach (5) $\beta\gamma$ durch \mathfrak{l} teilbar; es wäre dann $3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^5)$, d. h. nach

$$(6) \quad \alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^5).$$

Daraus würden aber wieder wie leicht ersichtlich sowohl $\beta \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$ als $\gamma \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$ folgen der Voraussetzung entgegen.

Wäre μ durch \mathfrak{l}^2 teilbar, würde aus (5) folgen, daß α durch \mathfrak{l} teilbar wäre, was wieder $3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^5)$ geben würde; daher $\beta^3\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^3)$, d. h. es wäre β durch \mathfrak{l} teilbar und also $3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^6)$; es wäre dann auch

$$\alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^6),$$

sodaß $\alpha^3 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^4)$, d. h. $\alpha \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^2)$ wäre. Dann weiter

$$\beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^6),$$

woraus wieder geschlossen würde, daß γ durch \mathfrak{l} teilbar wäre, was wieder unmöglich ist.

Wäre dann endlich δ durch l^3 teilbar, so wäre weil $\frac{3\alpha}{\delta}$ eine ganze Zahl ist, α durch l teilbar, und da $\frac{3(\alpha^2 - \beta\gamma\mu)}{\delta^2}$ eine ganze Zahl ist, wäre

$$(7) \quad \alpha^2 - \beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (l^4)$$

oder

$$(8) \quad \beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (l^2),$$

sodafß $3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (l^5)$ und

$$(9) \quad \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (l^3)$$

wäre. Wenn dann nicht μ durch l teilbar wäre, so würde nach (8) entweder β oder γ durch l teilbar sein müssen, und dann nach (9) beide, was nicht möglich ist. Wäre aber μ durch l , aber nicht durch l^2 teilbar, so würde aus (9) folgen, daß $\beta^3\mu$ durch l^2 , d. h. β durch l teilbar wäre; danach wäre aber $\gamma^3\mu^2$ durch l^3 , daher auch γ durch l teilbar; und wäre endlich μ durch l^2 teilbar, so gäbe (9) $\gamma^3\mu \equiv 0 \quad (l^3)$, sodafß β durch l teilbar wäre. Wegen (7) wäre dann α^2 durch l^3 d. h. α durch l^2 teilbar, und es wäre

$$3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (l^7).$$

Es wäre dann aber $\beta^3\mu + \gamma^3\mu^2$ durch l^6 teilbar, d. h. $\gamma^3\mu^2$ wäre durch l^5 und wieder γ durch l teilbar. Es kann daher δ nicht durch l^3 teilbar sein. Alle Behauptungen des Satzes sind damit bewiesen.

III.

An dieser Stelle sei bemerkt:

Bedeutend α und β zwei ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$, deren größter gemeinschaftlicher Idealteiler (τ) ist, so gibt es immer in $k(\zeta)$ zwei ganze Zahlen ξ und η , sodafß die Gleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta = \tau$$

gilt.

Es bedarf diese Behauptung kaum anderer Begründung als der Bemerkung, daß im Körper $k(\zeta)$ das euklidische Teilerverfahren gilt; sie kann aber auch sehr leicht folgendermaßen bewiesen werden:

Setzen wir

$$\alpha = \alpha_1 \tau, \quad \beta = \beta_1 \tau$$

so sind die ganzen Zahlen α_1 und β_1 des Körpers $k(\zeta)$ zu einander prim. Es bedeute

$$\omega_1, \dots, \omega_{n(\beta_1)}$$

ein vollständiges Restsystem mod. (β_1) ; es sind dann niemals zwei der Zahlen

$$(10) \quad \alpha_1 \omega_1, \dots, \alpha_1 \omega_{n(\beta_1)}$$

einander nach (β_1) kongruent; denn aus

$$\alpha_1 \omega_i \equiv \alpha_1 \omega_k \pmod{\beta_1}$$

würde $\omega_i \equiv \omega_k \pmod{\beta_1}$ folgen, da α_1 und β_1 zu einander prim sind. Unter den Zahlen (10) muß es daher eine geben, etwa $\alpha_1 \xi$, die kongruent 1 nach (β_1) ist; dann ist aber

$$\frac{1 - \alpha_1 \xi}{\beta_1} = \eta$$

eine ganze Zahl des Körpers $k(\zeta)$, und es ist

$$\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta = 1$$

und folglich

$$\alpha \xi + \beta \eta = \tau.$$

IV.

Wir denken uns nun alle von der Null verschiedenen ganzen Zahlen Φ_1, Φ_1^1, \dots des Körpers $k(\mathbf{M}, \zeta)$ von der Gestalt

$$\Phi_1 = \frac{\alpha}{\delta}, \quad \Phi_1^1 = \frac{\alpha^1}{\delta}, \dots$$

berechnet. Ist dann (τ) der größte gemeinschaftliche Idealteiler der Zahlen α und α^1 , so gibt es zwei solche ganze Zahlen ξ und ξ^1 in $k(\zeta)$, daß $\alpha \xi + \alpha^1 \xi^1 = \tau$ ist und es wird daher auch

$$\frac{\tau}{\delta} = \xi \cdot \phi_1 + \xi^1 \phi_1^1$$

eine Zahl der verlangten Beschaffenheit. Es sei daher ϕ_1 so gewählt, daß α der größte gemeinschaftliche Idealteiler aller Zahlen α, α^1, \dots ist.

Wir denken uns sodann alle ganzen Zahlen ϕ_2, ϕ_2^1, \dots des Körpers $k(\mathbf{M}, \xi)$ der Gestalt

$$\phi_2 = \frac{\alpha + \beta \mathbf{M}}{\delta}, \quad \phi_2^1 = \frac{\alpha^1 + \beta^1 \mathbf{M}}{\delta}, \dots$$

mit von Null verschiedenen β, β^1, \dots und es sei wieder ϕ_2 so gewählt, daß β der größte gemeinsame Idealteiler aller Zahlen β, β^1, \dots ist.

Endlich denken wir uns alle ganzen Zahlen ϕ_3, ϕ_3^1, \dots des Körpers $k(\mathbf{M}, \xi)$ der Gestalt

$$\phi_3 = \frac{\alpha + \beta \mathbf{M} + \gamma \mathbf{M}^2}{\delta}, \quad \phi_3^1 = \frac{\alpha^1 + \beta^1 \mathbf{M} + \gamma^1 \mathbf{M}^2}{\delta}, \dots$$

mit von Null verschieden γ, γ^1, \dots und es sei ϕ_3 in entsprechender Weise festgelegt.

Offenbar kann dann jede ganze Zahl \mathbf{A} des Körpers $k(\mathbf{M}, \xi)$ in der Gestalt

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3$$

geschrieben werden, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ganze Zahlen des Körpers $k(\xi)$ sind. Ich nenne daher der Kürze wegen die drei Zahlen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 eine Relativbasis des Körpers $k(\mathbf{M}, \xi)$ in Bezug auf $k(\xi)$.

Es sind dann die 6 Zahlen

$$\phi_1, \xi \phi_1, \phi_2, \xi \phi_2, \phi_3, \xi \phi_3$$

offenbar eine Basis des Körpers $k(\mathbf{M}, \xi)$.

Offenbar wird $\phi_1 = 1$ und es bleibt nur die Berechnung der Zahlen ϕ_2 und ϕ_3 übrig.

V.

Berechnung der Zahl ϕ_2 .

Soll $\frac{\alpha + \beta \mathbf{M}}{\delta}$ eine ganze Zahl sein, so müssen, wie aus dem vorhergehenden hervorgeht, die drei Zahlen

$$\frac{3\alpha}{\delta}, \quad \frac{3\alpha^2}{\delta^2}, \quad \frac{\alpha^3 + \beta^3 \mu}{\delta^3}$$

ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ sein. Setzen wir nun

$$\delta = \lambda^2 \pi$$

wobei π das Produkt aller von \mathbf{I} verschiedener Primideale, deren Quadrate in μ aufgehen und $\lambda = 1 - \zeta$ sind, so muß, wenn $\frac{3\alpha}{\delta}$ eine ganze Zahl sein soll, α durch π teilbar sein; soll $\frac{3\alpha^2}{\delta^2}$ eine ganze Zahl sein, so muß α durch $\lambda\pi$ teilbar sein; soll endlich $\frac{\alpha^3 + \beta^3 \mu}{\delta^3}$ eine ganze Zahl sein, so muß

$$\alpha^3 + \beta^3 \mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^6(\pi^3))$$

und da α^3 durch $\lambda^3 \pi^3$ teilbar ist, muß $\beta^3 \mu$ durch $\lambda^3 \pi^3$ teilbar sein. Es geht nun π^2 , nicht aber die dritte Potenz irgend eines in π aufgehenden Primideals in μ auf, auch nicht \mathfrak{l}^3 , daher wird β durch $\lambda\pi$ teilbar. Setzen wir daher

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \lambda\pi, \quad \beta = \beta_1 \cdot \lambda\pi,$$

so muß, wenn $\frac{\alpha + \beta \mathbf{M}}{\delta}$ eine ganze Zahl sein soll,

$$\alpha_1^3 + \beta_1^3 \mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^3)$$

sein. Ist nun $\mu \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$ so wird auch $\alpha_1 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$ und daher auch $\beta_1 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l})$. Es ergibt sich in diesem Falle $\phi_2 = \mathbf{M}$.

Sind α_1 und β_1 nicht durch \mathfrak{l} teilbar, so ist aber sicher

$$\alpha_1^3 \equiv \pm 1, \quad \beta_1^3 \equiv \pm 1 \quad (\mathfrak{l}^3)$$

und es muß auch

$$\mu \equiv \pm 1 \quad (l^3)$$

sein. Ist daher $\mu \equiv \pm 1 \quad (l^3)$, so ist $\alpha_1 \equiv \mp \beta_1 \quad (l)$ d. h.

$$\alpha_1 = \mp \beta_1 + \varrho \cdot \lambda$$

wobei unter ϱ eine ganze Zahl des Körpers $k(\zeta)$ verstanden wird. Seien auch ϱ und β_1 beliebige ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$, so wird doch immer

$$\frac{\mp \beta + \varrho \delta + \beta \mathbf{M}}{\delta} \quad \text{oder auch} \quad \frac{\mp \beta + \beta \mathbf{M}}{\delta}$$

eine ganze Zahl des Körpers $k(\mathbf{M}, \zeta)$; der größte gemeinsame Idealteiler aller Zahlen β ist offenbar $\lambda \pi$ und es wird daher

$$\phi_2 = \frac{\mp 1 + \mathbf{M}}{\lambda} \quad \text{je nachdem} \quad \mu \equiv \pm 1 \quad (l^3)$$

ist.

Ist dagegen nicht $\mu \equiv \pm 1 \quad (l^3)$ so müssen α_1 und β_1 beide durch l teilbar sein, und es folgt

$$\phi_2 = \mathbf{M}.$$

VI.

Berechnung der Zahl ϕ_3 .

Nehmen wir erstens an, daß μ durch l teilbar ist; nach dem Satze in II kann dann δ nicht durch l^2 teilbar sein; wir setzen daher

$$\delta = \lambda \cdot \pi.$$

Es ist $\frac{3\alpha}{\delta}$ dann und nur dann eine ganze Zahl, wenn α durch π teilbar ist. Es soll weiter $\frac{3(\alpha^2 - \beta\gamma\mu)}{\delta^2}$ eine ganze Zahl sein; dazu ist notwendig und hinreichend, daß $\beta\gamma\mu$ durch π^2 teilbar ist; dies ist aber nach dem soeben erwähnten Satze immer der Fall. Endlich muß

$$\alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 - 3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (\pi^3)$$

sein, d. h. $\beta^3\mu$ muß durch π^3 , daher β durch π teilbar sein; und weiter

$$\alpha^3 + \beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 - 3\alpha\beta\gamma\mu \equiv 0 \quad (l^3)$$

Weil μ durch 1 teilbar ist, folgt daraus zuerst $\alpha \equiv 0 \quad (l)$ und alsdann

$$\beta^3\mu + \gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (l^3).$$

Geht nun l^2 in μ auf, so folgt hieraus $\beta \equiv 0 \quad (l)$; geht aber l^2 nicht in μ auf, so muß $\beta^3\mu$ durch l^2 , daher wieder β durch 1 teilbar sein. In beiden Fällen wird daher

$$\gamma^3\mu^2 \equiv 0 \quad (l^3).$$

Falls μ nicht durch l^2 teilbar ist, folgt dann $\gamma \equiv 0 \quad (l)$; in diesem Falle kann daher jede Zahl der verlangten Gestalt folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\alpha_1\delta + \beta_1\delta\mathbf{M} + \gamma_1\lambda\mathbf{M}^2}{\delta} = \alpha_1 + \beta_1\mathbf{M} + \gamma_1 \frac{\mathbf{M}^2}{\pi}$$

und es wird

$$\phi_3 = \frac{\mathbf{M}^2}{\pi}.$$

Ist aber μ durch l^2 teilbar, so wird

$$\phi_3 = \frac{\mathbf{M}^2}{\lambda^2\pi}.$$

Nehmen wir zweitens an, daß μ nicht durch 1 teilbar ist. — Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem μ kongruent ± 1 nach l^3 ist oder nicht.

Es sei erstens μ nicht kongruent $\pm 1 \quad (l^3)$. Es wurde dann $\phi_2 = \mathbf{M}$ gefunden; natürlich kann ebensogut $\phi_2 = \alpha + \mathbf{M}$ gesetzt werden, wenn α eine ganze Zahl des Körpers $k(\zeta)$ ist. Setzen wir dann

$$\phi_3 = \frac{\gamma + \gamma_1\mathbf{M} + \gamma_2\mathbf{M}^2}{\lambda^2 \cdot \pi}$$

so geht sicher γ_2 in $\lambda^2\pi$ auf. Bezeichnet nämlich δ den größten gemeinschaftlichen Faktor von γ_2 und $\lambda^2 \cdot \pi$, so gibt es zwei ganze Zahlen ξ und η des Körpers $k(\zeta)$, sodaß

$$\xi \cdot \lambda^2\pi + \eta \cdot \gamma_2 = \delta$$

ist, und daher wird

$$\begin{aligned}\eta \cdot \Phi_3 + \xi \cdot \Phi_2^2 &= \eta \cdot \frac{\gamma + \gamma_1 \mathbf{M} + \gamma_2 \mathbf{M}^2}{\lambda^2 \tau} + \xi (\alpha^2 + 2\alpha \mathbf{M} + \mathbf{M}^2) \\ &= \frac{\gamma^1 + \gamma_1^1 \mathbf{M} + \delta \cdot \mathbf{M}^2}{\lambda^2 \tau}\end{aligned}$$

wobei unter γ^1, γ_1^1 wieder ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ verstanden werden. Nach der über γ_2 getroffenen Voraussetzung muß dann $\gamma_2 = \delta$ sein.

Setzen wir weiter

$$\Phi_2^2 = \varrho + \sigma \Phi_2 + \tau \Phi_3$$

wobei ϱ, σ, τ ganze Zahlen in $k(\zeta)$ bedeuten, so wird einerseits

$$\begin{aligned}\Phi_2^2 &= \varrho + \sigma \alpha + \sigma \mathbf{M} + \frac{\tau \gamma + \tau \gamma_1 \mathbf{M} + \tau \gamma_2 \mathbf{M}^2}{\lambda^2 \tau} \\ &= \frac{(\varrho \gamma_2 \pi^1 + \sigma \alpha \gamma_2 \pi^1 + \tau \gamma) + (\sigma \gamma_2 \pi^1 + \tau \gamma_1) \mathbf{M} + \tau \gamma_2 \mathbf{M}^2}{\gamma_2 \pi^1}\end{aligned}$$

wo $\lambda^2 \tau = \gamma_2 \pi^1$ gesetzt ist. Andererseits ist

$$\Phi_2^2 = \alpha^2 + 2\alpha \mathbf{M} + \mathbf{M}^2$$

woraus folgt

$$\tau \gamma_2 = \gamma_2 \pi^1, \quad \sigma \gamma_2 \pi^1 + \tau \gamma_1 = 2\alpha \cdot \gamma_2 \pi^1, \quad \varrho \gamma_2 \pi^1 + \sigma \alpha \gamma_2 \pi^1 + \tau \gamma = \alpha^2 \gamma_2 \pi^1$$

oder

$$\tau = \pi^1, \quad \gamma_1 = \gamma_2(2\alpha - \sigma), \quad \gamma = \gamma_2(\alpha^2 - \varrho - \sigma \alpha)$$

sodaß sowohl γ_1 wie γ durch γ_2 teilbar werden; wir können daher schreiben

$$\Phi_3 = \frac{\gamma + \gamma_1 \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\tau \pi^1}$$

wobei immer unter γ und γ_1 ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ verstanden werden; es ist also dabei π^1 ein Faktor von $\lambda^2 \cdot \pi$.

Es soll nun untersucht werden, ob solche geänderte Werte der Zahlen γ und γ_1 gefunden werden können, daß die Gleichung

$$\Phi_2^2 - \kappa = \varrho + \sigma \Phi_2 + \tau \Phi_3$$

besteht, wobei ϱ, σ, τ dieselben Zahlen sind wie oben, und κ eine

gewisse ganze Zahl des Körpers $k(\zeta)$ ist. Es müssen dann die folgenden Gleichungen gelten:

$$\tau = \pi^1, \quad \sigma\pi^1 + \tau\gamma_1 = 2\alpha\pi^1, \quad \varrho\pi^1 + \sigma\alpha\pi^1 + \tau\gamma = \alpha^2\pi^1 - \pi\tau^1$$

oder

$$\tau = \pi^1, \quad \gamma_1 = 2\alpha - \sigma, \quad \gamma = \alpha^2 - \varrho - \sigma\alpha - \pi.$$

Es wird daher

$$\gamma - \gamma_1^2 = \alpha^2 - \varrho - \sigma\alpha - (2\alpha - \sigma)^2 - \pi$$

gefunden. Wählen wir

$$\pi = \alpha^2 - \varrho - \sigma\alpha - (2\alpha - \sigma)^2$$

so wird $\gamma = \gamma_1^2$ und es wird

$$\Phi_3 = \frac{\gamma^2 + \gamma\mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\pi^1}$$

indem γ für γ_1 geschrieben ist.

Es sei zweitens $\mu \equiv \pm 1 \pmod{3}$. Dieser Fall wird durch die nämliche Schlußweise erledigt. Es ist schon gefunden $\Phi_2 = \frac{\mp 1 + \mathbf{M}}{\lambda}$ oder auch

$$\Phi_2 = \alpha + \frac{\mp 1 + \mathbf{M}}{\lambda} = \frac{(\alpha\lambda \mp 1) + \mathbf{M}}{\lambda};$$

oder daraus

$$\Phi_2^2 = \frac{(\alpha\lambda \mp 1)^2 + 2(\alpha\lambda \mp 1)\mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda^2}.$$

Wie früher setzen wir

$$\Phi_2^2 = \varrho + \sigma\Phi_2 + \tau\Phi_3$$

oder mit $\Phi_3 = \frac{\gamma + \gamma_1\mathbf{M} + \gamma_2\mathbf{M}^2}{\lambda^2\pi}$, weil γ_2 in π aufgehen muß, sodaß

$\pi = \gamma_2\pi^1$ gesetzt werden kann:

$$\Phi_2^2 = \frac{(\varrho\gamma_2\pi^1 + \sigma\lambda\gamma_2(\alpha\lambda \mp 1) + \tau\gamma) + (\sigma\lambda\gamma_2\pi^1 + \tau\gamma_1)\mathbf{M} + \tau\gamma_2\mathbf{M}^2}{\lambda^2\gamma_2\pi^1}.$$

Werden auch hier die zwei Ausdrücke für ϕ_2^2 verglichen, so ergibt sich

$$\tau\gamma_2 = \gamma_2\tau^1$$

$$\sigma\lambda\gamma_2\tau^1 + \tau\gamma_1 = \gamma_2\tau^1 \cdot 2(\alpha\lambda \mp 1)$$

$$\varrho\gamma_2\tau^1 + \sigma\lambda\gamma_2\tau^1(\alpha\lambda \mp 1) + \tau^1\gamma = \gamma_2\tau^1(\alpha\lambda \mp 1)^2$$

oder

$$\tau = \tau^1$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \cdot [2(\alpha\lambda \mp 1) - \sigma\lambda]$$

$$\gamma = \gamma_2[(\alpha\lambda \mp 1)^2 - \varrho - \sigma\lambda(\alpha\lambda \mp 1)]$$

sodaß auch hier γ_1 und γ durch γ_2 teilbar werden.

Setzen wir daher kurz

$$\phi_3 = \frac{\gamma + \gamma_1 \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda^2 \cdot \tau^1}.$$

Suchen wir auch hier solche veränderten Werte der Zahlen γ und γ_1 , daß die Gleichung

$$\phi_3^2 - z = \varrho + \sigma\phi_2 + \tau\phi_3$$

besteht, wobei ϱ , σ , τ die frühere Bedeutung haben und z eine gewisse ganze Zahl des Körpers $k(\zeta)$ ist; es ergibt sich

$$\gamma_1 = 2(\alpha\lambda \mp 1) - \sigma\lambda$$

$$\gamma = (\alpha\lambda \mp 1)^2 - \varrho - \sigma\lambda(\alpha\lambda \mp 1) - \lambda^2 z.$$

Es wird hier

$$\gamma - \gamma_1^2 = (\alpha\lambda \mp 1)^2 - \varrho - \sigma\lambda(\alpha\lambda \mp 1) - [2(\alpha\lambda \mp 1) - \sigma\lambda]^2 - \lambda^2 z$$

oder ausgerechnet

$$(A) \quad \gamma - \gamma_1^2 = -\varrho + \lambda^2 \varrho - \lambda^2 z$$

wobei unter ϱ eine gewisse ganze Zahl in $k(\zeta)$ verstanden wird, welche nur von α und σ abhängt. Wählen wir daher $z = \varrho$, so wird

$$\gamma = \gamma_1^2 - \varrho$$

und wir können setzen

$$\phi_3 = \frac{\gamma_1^2 - \varrho + \gamma_1 \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda^2 \cdot \tau^1}.$$

Aus den Bedingungen dafür, daß Φ_3 eine ganze Zahl sein soll, folgt aber

$$(11) \quad \begin{cases} (\gamma_1^2 - \varrho)^3 + \gamma_1^3 \cdot \mu + \mu^2 - 3(\gamma_1^2 - \varrho)\gamma_1\mu \equiv 0 & (l^6) \\ (\gamma_1^2 - \varrho)^2 - \gamma_1\mu \equiv 0 & (l^2) \end{cases}$$

Wäre hier γ_1 durch l teilbar, so würde aus der ersten der Kongruenzen (11), weil $\mu^2 \equiv 1 \pmod{l}$ folgen, daß $\varrho^3 \equiv 1 \pmod{l}$ wäre; aus der zweiten Kongruenz (11) würde aber $\varrho \equiv 0 \pmod{l}$ folgen, was damit in Widerspruch steht. Es ist daher γ_1 zu l prim und daher $\gamma_1^3 \equiv \pm 1 \pmod{l^3}$, daher auch $\gamma_1^3\mu \equiv \pm 1 \pmod{l^3}$. Aus der ersten Kongruenz (11) folgt dann

$$(\gamma_1^2 - \varrho)^3 + \gamma_1^3\mu + \mu^2 \equiv 0 \pmod{l^2}$$

was notwendig

$$\gamma_1^3\mu \equiv 1, \quad (\gamma_1^2 - \varrho)^3 \equiv 1 \pmod{l^2}$$

zufolge hat. D. h. es ist nach der letzten Kongruenz

$$\varrho^3 \equiv 1 - \gamma_1^6 \pmod{l^2}$$

oder endlich $\varrho \equiv 0 \pmod{l}$. Die zweite Kongruenz (11) gibt dann

$$\gamma_1^4 - 2\gamma_1^2\varrho - \gamma_1\mu \equiv 0 \pmod{l^2}$$

oder weil γ_1 nicht durch l teilbar ist

$$\gamma_1^3 - 2\gamma_1\varrho - \mu \equiv 0 \pmod{l^2}.$$

Nun war aber $\gamma_1^3\mu \equiv 1 \pmod{l^2}$ und wegen $\mu \equiv \pm 1, \gamma^3 \equiv \pm 1 \pmod{l^2}$ muß $\gamma^3 - \mu \equiv 0 \pmod{l^2}$ sein, d. h.

$$\varrho \equiv 0 \pmod{l^2}.$$

Es kann daher die Gleichung (A) so geschrieben werden

$$\gamma - \gamma_1^2 = k^2\psi - k^2x$$

wobei ψ eine bestimmte ganze Zahl des Körpers $k(\zeta)$ ist (die nicht von x abhängt). Wir hätten dabei auch $x = \psi$ wählen können, und es ergibt sich

$$\Phi_3 = \frac{\gamma^2 + \gamma\mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{k^2x^1}$$

indem auch hier γ für γ_1 geschrieben wird.

Wenn also μ zu l prim ist, können wir immer

$$\Phi_3 = \frac{\gamma^2 + \gamma M + M^2}{\pi^1}$$

ansetzen, indem π^1 einen Faktor von $\lambda^2\pi$ bedeutet.

VII.

Bestimmung der Zahl γ .

Die Bedingungen dafür, daß Φ_3 eine ganze Zahl sein soll, werden nun, daß die drei Zahlen

$$\frac{3\gamma^2}{\pi^1}, \quad \frac{3(\gamma^4 - \gamma\mu)}{\pi^{1^2}}, \quad \frac{\gamma^6 + \gamma^3\mu + \mu^2 - 3\gamma^3\mu}{\pi^{1^3}}$$

ganze Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ sind. Die letzte Zahl wird aber $\frac{(\gamma^3 - \mu)^2}{\pi^{1^3}}$; wenn sie ganz ist, so ist sicher $\gamma^3 - \mu$ durch das Quadrat sämtlicher von l verschiedener Primfaktoren in π^1 teilbar, und wenn π^1 durch l teilbar ist, auch durch l^2 . Es ist somit jedenfalls $\frac{3\gamma(\gamma^3 - \mu)}{\pi^{1^2}}$ eine ganze Zahl; es bleiben daher nur die zwei Bedingungen übrig:

$$(12) \quad 3\gamma^2 \equiv 0 \pmod{\pi^1}$$

$$(13) \quad (\gamma^3 - \mu)^2 \equiv 0 \pmod{\pi^{1^3}}.$$

Es werden drei Fälle unterschieden:

a). $\mu \equiv \pm 1 \pmod{l^3}$. Setzen wir der Allgemeinheit wegen zuerst $\pi^1 = \lambda^2\pi$; aus $3\gamma^2 \equiv 0 \pmod{\lambda^2\pi}$ folgt $\gamma \equiv 0 \pmod{\pi}$, oder $\gamma = \nu \cdot \pi$, indem ν eine ganze Zahl des Körpers $k(\zeta)$ ist. Weiter muß

$$(\gamma^3 - \mu)^2 \equiv 0 \pmod{\lambda^6\pi^3}$$

sein, d. h. es ist $\gamma^3 \equiv \mu \pmod{l^3}$; da immer $\gamma^3 \equiv \pm 1 \pmod{l^3}$ genügt es, daß $\gamma \equiv \mu \pmod{l}$ ist. Beide Bedingungen werden daher für $\gamma = \mu$ erfüllt, und es wird daher

$$\Phi_3 = \frac{\mu^2 + \mu M + M^2}{\lambda^2\pi}$$

gesetzt.

b). $\mu \equiv \pm 1 \pmod{1^2}$, aber nicht $\mu \equiv \pm 1 \pmod{1^3}$. Wir nehmen erstens $\pi^1 = \lambda^2 \pi$ an. Aus $3\gamma^2 \equiv 0 \pmod{\lambda^2 \pi}$ folgt wie früher $\gamma = \nu \pi$. Aus (13) folgt $\gamma^3 \equiv \mu \pmod{1^3}$, was wegen μ nicht $\equiv \pm 1$, $\gamma^3 \equiv \pm 1 \pmod{1^3}$ nicht möglich ist. Es werde sonach $\pi^1 = \lambda \cdot \pi$ angenommen; (12) gibt wieder $\gamma = \nu \pi$ und (13) gibt $\gamma^3 \equiv \mu \pmod{1^2}$; beide Bedingungen werden für $\gamma = \mu$ erfüllt. Es wird daher gesetzt

$$\Phi_3 = \frac{\mu^2 + \mu \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda \cdot \pi}.$$

c). μ nicht $\equiv \pm 1 \pmod{1^2}$. Würde $\pi^1 = \lambda^2 \pi$ angenommen, so müßte folglich $\gamma^3 \equiv \mu \pmod{1^3}$ sein, was nicht möglich ist; auch die Annahme $\pi^1 = \lambda \pi$ gibt die unmögliche Kongruenz $\gamma^3 \equiv \mu \pmod{1^2}$. Es werde daher $\pi^1 = \pi$ angenommen; es ergibt sich wieder $\gamma = \nu \pi$. Die Kongruenz (13) wird

$$\gamma^3 \equiv \mu \pmod{1^2}$$

oder noch $\gamma \equiv 0 \pmod{\pi}$. Es werde daher einfach $\gamma = 0$ gesetzt und wir bekommen endlich

$$\Phi_3 = \frac{\mathbf{M}^2}{\pi}.$$

VIII.

Zusammenfassung der Resultate. Beispiele.

Die bisher abgeleiteten Resultate können in einem einzigen Satze so zusammengefaßt werden:

Satz. Wenn μ eine ganze Zahl des Körpers $k(\zeta)$ ist, die keinen Faktor enthält, welcher die dritte Potenz einer ganzen Zahl desselben Körpers ist, so wird eine Basis des Kummerschen Zahlkörpers $k(\sqrt[3]{\mu}, \zeta)$ durch die 6 Zahlen $1, \zeta, \Phi, \zeta\Phi, \Omega, \zeta\Omega$ dargestellt, und es ist

$$1^0. \text{ wenn } \mu \equiv 0 \pmod{1^2}: \Phi = \mathbf{M}, \Omega = \frac{\mathbf{M}^2}{\lambda \pi}.$$

$$2^0. \text{ wenn } \mu \equiv 0 \pmod{1}, \mu \text{ nicht } \equiv 0 \pmod{1^2}: \Phi = \mathbf{M}, \Omega = \frac{\mathbf{M}^2}{\pi}.$$

$$3^0. \text{ wenn } \mu \equiv \pm 1 \pmod{1^3}: \Phi = \frac{\mp 1 + \mathbf{M}}{\lambda}, \Omega = \frac{\mu^2 + \mu \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda^2 \pi}.$$

$$4^0. \text{ wenn } \mu \equiv \pm 1 \text{ (I}^2\text{), } \mu \text{ nicht } \equiv \pm 1 \text{ (I}^3\text{): } \Phi = \mathbf{M}, \Omega = \frac{\mu^2 + \mu \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda \pi}.$$

$$5^0. \text{ wenn } \mu \text{ nicht } \equiv \pm 1 \text{ (I}^2\text{): } \Phi = \mathbf{M}, \Omega = \frac{\mathbf{M}^2}{\pi},$$

wobei π das Produkt aller von 1 verschiedener Primideale, deren Quadrate in μ aufgehen, bedeutet und $\mathbf{M} = \sqrt[3]{\mu}$, $\lambda = 1 - \zeta$, $1 = (\lambda)$ ist.

Beispiel 1: $\mu = \zeta$. Es ist $\mu \text{ nicht } \equiv \pm 1 \text{ (I}^2\text{), } \pi = 1$, sodaß $\Phi = \sqrt[3]{\zeta} = \zeta'$, $\Omega = \zeta'^2$ wird. Eine Basis des Körpers $k(\zeta')$ ist daher durch die Zahlen 1, ζ' , ζ'^2 , ζ'^3 , ζ'^4 , ζ'^5 dargestellt, was auch aus der Theorie des Kreiskörpers der neunten Einheitswurzel ζ' hervorgeht.

Beispiel 2. $\mu = \lambda$. Es wird $\mu \equiv 0 \text{ (I), } \mu \text{ nicht } \equiv 0 \text{ (I}^2\text{), } \pi = 1$, daher $\Phi = \mathbf{M}$, $\Omega = \mathbf{M}^2$; die Basiszahlen des Körpers $k(\sqrt[3]{\lambda}, \zeta)$ sind daher 1, ζ , \mathbf{M} , $\zeta \mathbf{M}$, \mathbf{M}^2 , $\zeta \mathbf{M}^2$.

Beispiel 3. $\mu = 2$. Wegen $\mu \equiv -1 \text{ (I}^2\text{), } \mu \text{ nicht } \equiv -1 \text{ (I}^3\text{), } \pi = 1$ wird $\Phi = \mathbf{M}$, $\Omega = \frac{4 + 2\mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda}$ oder auch

$$\Phi = \mathbf{M}, \Omega = \frac{1 - \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda}.$$

Beispiel 4. $\mu = 19$. Es ist $\mu \equiv 1 \text{ (I}^3\text{), } \pi = 1$, daher $\Phi = \frac{-1 + \mathbf{M}}{\lambda}$, $\Omega = \frac{19^2 + 19\mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda^2}$ oder auch

$$\Phi = \frac{\mathbf{M} - 1}{\lambda}, \quad \Omega = \frac{1 + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{3}.$$

Beispiel 5. $\mu = 9$. Es ist $9 = \zeta \cdot \lambda^4$; setzen wir daher $\mu^* = \zeta \lambda$, $\mathbf{M}^* = \sqrt[3]{\mu^*}$, so ist $k(\mathbf{M}, \zeta)$ identisch mit $k(\mathbf{M}^*, \zeta)$, dessen Basiszahlen durch $\Phi = \mathbf{M}^*$, $\Omega = \mathbf{M}^{*2}$ bestimmt sind; es ist also

$$\Phi = \frac{\mathbf{M}}{\lambda}, \quad \Omega = \frac{\mathbf{M}^2}{\lambda^2}.$$

Beispiel 6. $\mu = 100$, $\mu \equiv 1 \pmod{1^3}$, $\pi = 10$, daher $\phi = \frac{-1 + \mathbf{M}}{\lambda}$,
 $\omega = \frac{\mu^2 + \mu \mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{\lambda^2 \cdot 10}$ oder auch

$$\phi = \frac{\mathbf{M} - 1}{\lambda}, \quad \omega = \frac{10 + 10\mathbf{M} + \mathbf{M}^2}{30}.$$

Beispiel 7. $\mu = 51 + 38\zeta$. Es ergibt sich $\mu = (3 + \zeta)^2 \cdot (7 + \zeta)$, wobei $(3 + \zeta)$ und $(7 + \zeta)$ Primideale des Körpers $k(\zeta)$ sind. Es ist somit $\pi = 3 + \zeta$. Es wird weiter

$$\mu \equiv -1 + \lambda \pmod{1^2}$$

gefunden, daher

$$\phi = \mathbf{M}, \quad \omega = \frac{\mathbf{M}^2}{3 + \zeta}.$$

EN GENERALISATION AV KJEDEBRØKEN

AV

VIGGO BRUN

I.

(Avec un résumé en français et 11 figures dans le texte).

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NAT. KLASSE. 1919. No. 6)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA

I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

1919

Fremlagt i den mat.-naturvid. klasses møte 25. jan. 1918 ved prof. Størmer.

§ 1.

Blandt de forsøk, som er gjort paa at generalisere den almindelige kjedebrøk¹, er sikkert ingen av den betydning som H. POINCARÉ'S. Hans metode er like simpel som elegant. Han benytter sig av den geometriske betydning, man kan gi kjedebrøken. I planet tænker han sig indtegnet alle »gitterpunkter«, det vil si punkter, hvis koordinater er heltallige. Disse punkter repræsenterer alle rationale tal $\frac{y}{x}$.

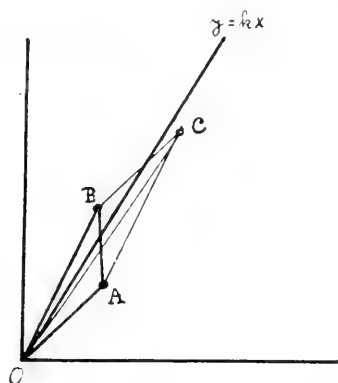


Fig. 1.

POINCARÉ fæster opmærksomheten ved den egenskap hos kjedebrøken, at

$$\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} = \pm 1$$

naar $\frac{y_n}{x_n}$ og $\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ betegner to paahinandenfølgende tilnærmelsesbrøker til det tal k , som er tænkt utviklet i kjedebrøk :

¹ Se JACOBI i Journal für die reine und angew. Mathematik, B. 69 (1868). E. FÜRSTENAU i Jahresbericht über das Königl. Realgymnasium zu Wiesbaden von Ostern 1873 bis Ostern 1874. H. POINCARÉ i Comptes Rendus, Tome 99 (1884). H. MINKOWSKI: Geometrie der Zahlen etc. I Minkowskis betydningsfulde arbeider angives dog ikke nogen algoritme.

$$k = q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots$$

Da værdien av k ligger mellem de to tilnærmelsesbrøkers, blir den geometriske betydning herav et gitterpunkttriangel $(0, 0)$, (x_n, y_n) , (x_{n+1}, y_{n+1}) , som gjennemskjæres av linjen $y = kx$, og hvis flateindhold er $\frac{1}{2}$.

Kjender man et saadant triangel OAB , kan man let bestemme et til, OBC , ved at utfylde triangelet OAB til et parallelogram $OACB$ og saa dele dette i to nye triangler ved at trække diagonalen OC . Det av de to nye triangler, hvorigjennem linjen $y = kx$ gaar, har da samme egenskap som det oprindelige triangel. Saaledes kan man da bestemme en hel række av den slags triangler.

POINCARÉ benytter sig herav til sin generalisation. Istedenfor planet betrakter han rummet med dets »gitterpunkter«. Trianglerne erstattes med tetraedere. Lad linjen $y = kx$, $z = hx$ skjære gjennom et gitterpunkt-tetraeder, $OABC$, av volum $\frac{1}{6}$. POINCARÉ bestemmer da et nyt tetraeder med samme egenskaper, idet han først av tetraederet $OABC$ danner et parallelepiped ved gjennom A , B og C at lægge planer parallelle med de motstaaende sideflater i tetraederet $OABC$. Derpaa deler han parallelepipedet i 6 tetraedere, som alle har sin spids i origo. Av disse 6 tetraedere vælger han saa det, som gjennemskjæres av den givne linje $y = kx$, $z = hx$. Derved er han istand til at bestemme en hel række av tetraedere med samme egenskap. En aritmetisk behandling av problemet fører til en enkel algoritme, som er en generalisation av EUKLIDS algoritme. Som man ser, maa POINCARÉ regne med 6 *muligheter* ved overgangen fra et tetraeder til det næste, mens der i planet ved overgangen fra et triangel til det næste foreligger to muligheter.

Den generalisation, som jeg i det følgende skal utvikle, bygger paa den samme tanke som POINCARÉS. Den skiller sig blandt andet fra denne derved, at jeg regner med 3 *muligheter* ved overgangen fra et tetraeder til det næste. Dette er av væsentlig betydning, ikke mindst ved studiet av de kubiske irrationaliteter.

De tre muligheter som foreligger betegner jeg med bokstaverne α , β og γ . Til hver linje i rummet $y = kx$, $z = hx$ svarer der da en bokstavrække, bestaaende av bokstaverne α , β og γ , som træder istedenfor kjedebrøksutviklingen.

For bedre at klargjøre betydningen av en saadan bokstavrække, skal vi først vise, hvorledes man i et langt enklere tilfælde kan gjøre bruk av en saadan.

La os studere de gitterpunkter, som omslutter linjen $y = kx$.

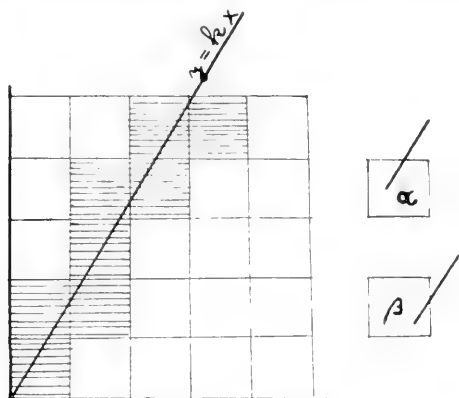


Fig. 2.

La os forutsætte k positiv og irrational. For hvert kvadrat, linjen passerer, foreligger der to muligheter: linjen gaar ut av kvadratet gjennom en horisontal eller en vertikal side. Vi betegner de to tilfælder med α og β . Paa fig. 2 blir da tallet k definert ved en bokstavrække, som begynder saaledes:

$$\alpha \beta \alpha \alpha \beta \alpha \beta \dots$$

Som eksempel kan vi nævne, at $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gir anledning til bokstavrækken

$$\beta \alpha \cdot \beta \cdot \beta \alpha \cdot \beta \alpha \beta \cdot \beta \alpha \beta \beta \alpha \cdot \beta \alpha \beta \beta \alpha \beta \alpha \beta \cdot \beta \alpha \beta \beta \alpha \dots$$

som har den egenskap, at hvert parti mellem to punktumer er identisk med et like stort parti ved rækkens begyndelse.

Generalisationen til rummet falder av sig selv. Kvadraterne erstattes av kuber. Til bestemmelse av den række kuber, som omslutter linjen $y = kx$, $z = hx$, hvor k og h er positive og irrationale, faar vi da en

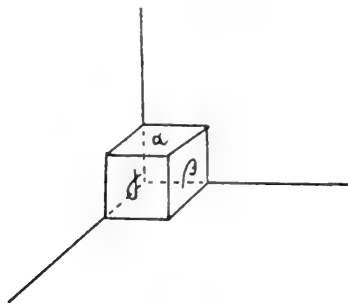


Fig. 3.

bokstavrække, bestaaende av de tre bokstaver α , β og γ , idet der foreligger tre muligheter, eftersom linjen forlater en kubus gjennom en av de tre mulige sideflater (se fig. 3).

Som vi senere skal se, foregaar dannelsen av de bokstavrækker, som erstatter kjedebrøken, paa en analog maate.

Vi vil foreta vår undersøkelse i to dele, idet vi først vil studere gitterpunkterne rundt linjen $y = kx$, $z = hx$ og saa studere gitterpunkterne omkring planet $x + ky + hz = 0$. Derefter vil vi tilslut studere generalisationen i det almindelige tilfælde, hvor vi opererer med n størrelser.

§ 2.

POINCARÉ utleder av et tetraeder $OABC$, som gjennemskjæres av linjen $y = kx$, $z = hx$ og som har volumet $1/6$, et nyt tetraeder $OADE$ med samme egenskaper. Det nye tetraeder har foruten origo (O) kun ett

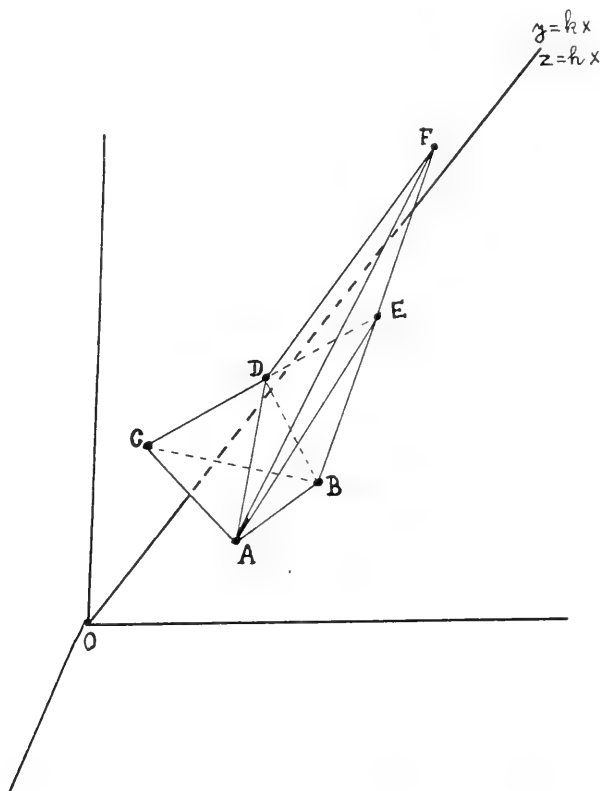


Fig. 4.

hjørne (A) fælles med det oprindelige tetraeder. Jeg sætter mig derimot som opgave av tetraederet $OABC$ at utlede et nyt $OABD$, som foruten

origo har to hjørner fælles med det oprindelige. Derved opnaar jeg at faa linjen $y = kx$, $z = hx$ indesluttet i et legeme, bestaaende av en sammenhængende række av tetraedere (hvoriblandt $ABCD$). (Se fig. 4).

Den tilsvarende plane betragtning fører til den fra kjedebrokslæren kjendte indeslutning av linjen $y = kx$ i en række triangler av areal $\frac{1}{2}$. (Se fig. 5).

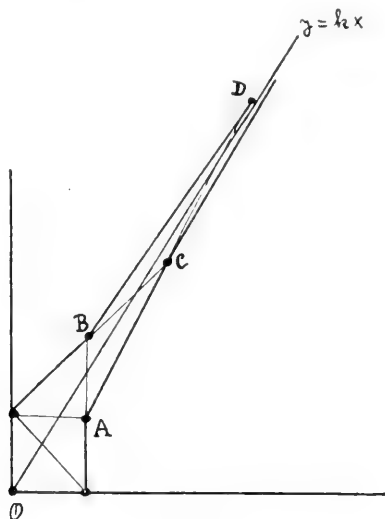


Fig. 5.

Vi har forlangt, at $OABC$ og $OABD$ (fig. 4) begge skal ha volumet $\frac{1}{6}$. Derimot er vi ikke nødt til at forlange, at $ABCD$ skal ha volumet $\frac{1}{6}$, selv om vi fastholder, at det skal være gitterpunkt-frit, det vil si, at det ikke skal indeholde andre gitterpunkter end hjørnerne. Man kan nemlig i rummet konstruere gitterpunkt-fri tetraedere av volum $\frac{2}{6}$, mens man i planet ikke kan konstruere gitterpunkt-fri triangler av større flateindhold end $\frac{1}{2}$, naar hjørnerne er forutsat at være gitterpunkter. Vi kan saaledes utfylde tetraederet $OABC$ til et parallelepiped ved gjennom hjørnerne A , B og C at lægge planer parallelle med de motstaaende sideflater, og saa vælge det til origo motstaaende hjørne i parallelepipedet til toppunkt i det nye tetraeder. $ABCD$ faar da volumet $\frac{2}{6}$. Der foreligger tre muligheter, eftersom linjen $y = kx$, $z = hx$ forlater tetraederet $ABCD$ gjennom en av de tre sideflater ABC , BCD eller CAD . Det kunde derfor være naturlig at vælge denne enkle betragtningsmaate til utgangspunkt for en generalisation av kjedebroken. En aritmetisk behandling leder ogsaa til en enkel algoritme. Vi skal dog ikke gaa nærmere ind paa denne metode, da den lider av enkelte mangler, blandt andet den, at den ikke er naturlig i det ekstreme tilfælde, hvor linjen $y = kx$, $z = hx$ ligger i en av tetraederets sideflater, f. eks. OAC . I dette tilfælde er det

eneste naturlige valg av det nye toppunkt D det punkt, som med OAC danner et parallelogram, idet vi her er ført tilbake til et tilfælde analogt med det plane. Tar vi hensyn hertil, er vi henvist til som nyt toppunkt at vælge et av de tre punkter D_1 , D_2 eller D_3 , som med OAB , OBC eller OCA danner parallelogramer (se fig. 6).

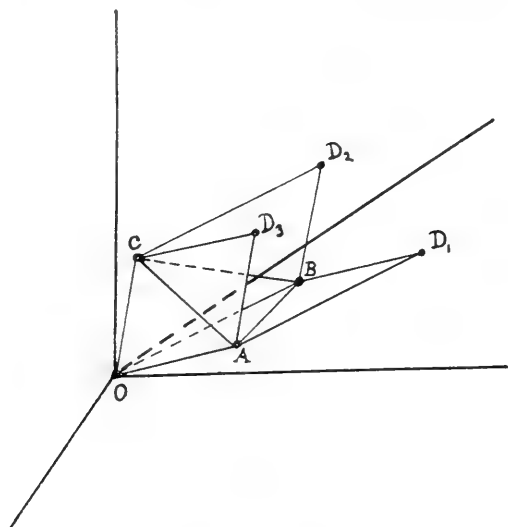


Fig. 6.

Betingelsen for at linjen $y = kx$, $z = hx$ falder i planet OAB , OBC eller OCA er henholdsvis at

$$a = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad b = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad c = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = 0$$

hvor $(X_1 Y_1 Z_1)$, $(X_2 Y_2 Z_2)$ og $(X_3 Y_3 Z_3)$ er koordinaterne for A , B og C . I disse tre ekstreme tilfælde er saken klar. I det almindelige tilfælde, hvor a , b og c er forskjellige fra 0, falder det naturlig at vælge det av de tre punkter D , som svarer til den mindste av de tre størrelser a , b og c .

La os forutsætte

$$a > b > c.$$

(Størrelserne a , b og c er proportionale med flateindholdet av trianglerne a' , b' og c' paa fig. 7). Da c er mindst, vælger vi D_3 til toppunkt i det nye tetraeder. Da $a > b$ gaar linjen $y = kx$, $z = hx$ ut gjen-

nem sideflaten CBD_3 , og paa denne sideflate faar vi da at bygge et nyt tetraeder efter samme regel. Vi maa da undersøke de til a , b og c tilsvarende størrelser a_1 , b_1 og c_1 i triangelet CBD_3 .

Vi erstatter da A med D_3 og faar da :

$$a_1 = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_1+X_3 & Y_1+Y_3 & Z_1+Z_3 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \quad b_1 = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \quad c_1 = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1+X_3 & Y_1+Y_3 & Z_1+Z_3 \end{vmatrix}$$

hvorav

$$a_1 = a - b \qquad b_1 = b \qquad c_1 = c.$$

Vi faar da følgende regel:

Av de tre størrelser a , b og c danner vi tre tilsvarende nye ved fra den største at trække den mellemste og at beholde den mellemste og den mindste.

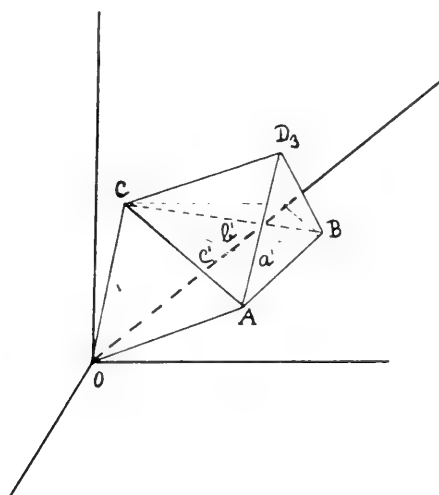


Fig. 7.

Som man ser er regelen entydig kun med undtagelse av det tilfælde, at to av størrelserne er like store. Vi ser dog foreløbig bort fra dette tilfælde.

La os se paa dannelsen av koordinaterne. Vi fastsætter da, at til determinanten a hører koordinaterne $X_3 Y_3 Z_3$, som *ikke* forekommer i determinanten. Likesaa hører da til b koordinaterne $X_1 Y_1 Z_1$ og til c $X_2 Y_2 Z_2$.

Vi faar da følgende regel:

De koordinater, som tilhører den mellemste av størrelserne a , b og c , erstattes med summen av de koordinater, som tilhører den største og den mellemste av disse størrelser, mens de koordinater, som tilhører den største og den mindste, beholdes.

Som de tre utgangspunkter vælger vi de, som er beliggende i koordinataksene i en afstand av 1 fra origo. Sammen med origo danner de et tetraeder av volum $\frac{1}{6}$, som gjennomskjæres av linjen $y = kx$, $z = hx$, naar vi, som altid i det følgende, forutsætter k og h positive. De tre størrelser a , b og c blir da:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad b = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = k \quad c = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = h$$

Vi begynner derfor altid regningen med at skrive op størrelserne 1 , k , h og ved siden av disse de tilhørende koordinater, saaledes:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Derpaa erstatter vi den største av de tre størrelser 1 , k og h med differensen mellem den største og mellemste og gjentar den mellemste og den mindste uforandret. Likesaa erstatter vi koordinaterne for den mellemste av størrelserne med summen av koordinaterne for den største og den mellemste og gjentar koordinaterne for den største og den mellemste uforandret.

De tre nye størrelser med tilhørende koordinater behandles likedan.

Denne algoritme, som er en generalisation av EUKLIDS, hvor rigtignok flere subtraktioner er sammenfattet til divisioner, gir anledning til tre muligheter.

Det nye tal, differensen mellem den største og den mellemste størrelse, kan være størst, mellemst eller mindst, sammenlignet med leddene i det nye taltripel. *Disse tre muligheter vil vi betegne med α , β og γ .* For at undgaa tvetydighet vil vi fastsætte, at hvis den nye størrelse er lik en av de øvrige størrelser i samme taltripel, vil vi regne den nye størrelse for at være større end den anden.

Likeledes fastsætter vi, at

$$1 > k > h.$$

Dette kan vi gjøre uten at innskærpe almenlydigheten, idet det er likegyldig enten vi betrakter de tre størrelser 1 , k og h eller tre dermed proportionale. I det første taltripel regner vi derfor altid den første for størst, den næste for mellemst og den sidste for mindst ogsaa i tilfælde av at der er likhet mellem nogen av størrelserne.

Til hvert positivt talpar k , h hører der da en bestemt bokstavrekke, bestaaende av bokstaverne α , β og γ . Denne bokstavrekke træder istedenfor kjedebrøksutviklingen. Behandler vi nemlig det tilsvarende problem i planet paa samme maate, ledes vi til følgende algoritme:

Av de to størrelser a og b danner vi to nye ved at subtrahere den mindste fra den største og beholde den mindste. Eftersom den førstnævnte av de to nye størrelser er størst eller mindst, faar vi to muligheter, som vi vil betegne med α og β . Tallet k definerer da en bokstavrekke $\alpha\beta\dots$. La os anta at rækken begynder med $q_1 - 1$ bokstaver α , og at derpaa følger β , og at der saa mellem hvert av de følgende β er $q_2 - 1$, $q_3 - 1, \dots$ bokstaver α . Den vanlige kjedebrøksutvikling av k er da

$$k = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots$$

Saaledes vil $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$

gi anledning til følgende rekke

$$\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\dots$$

Som eksempel paa vor algoritme vil vi vælge $k = 0,683$, $h = 0,466$:

	1	1,000	1 0 0
	k	0,683	0 1 0
	h	0,466	0 0 1
γ	$1 - k$	0,317	1 0 0
	k	0,683	1 1 0
	h	0,466	0 0 1
γ	$1 - k$	0,317	1 0 0
	$k - h$	0,217	1 1 0
	h	0,466	1 1 1
γ	$1 - k$	0,317	2 1 1
	$k - h$	0,217	1 1 0
	$h + k - 1$	0,149	1 1 1

Hvis de tre sidste størrelser er proportionale med de tre første, vil algoritmen fortsætte uforandret. Betingelsen herfor er let at opstille. k maa være rot i ligningen

$$k^3 + k = 1$$

og $h = k^2.$

Disse to størrelser $k = 0,683\dots$, $h = 0,466\dots$ definerer derfor den periodiske bokstavrække

$$\gamma\gamma\gamma\gamma\dots$$

Som man ser danner leddene i hvert tredje taltripel geometriske rækker. Kvotienten $\lambda = 0,317\dots$ er ogsaa rot i en tredjegradslikning

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda = 1.$$

Vi vil vælge endnu et eksempel. Vi vælger λ som rot i ligningen

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\text{og } k = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = 0,526\dots \qquad h = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cdot \lambda = 0,163\dots$$

Talparret k, h definerer da den periodiske bokstavrække

$$\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\dots$$

Vi skal bevise en vigtig egenskab ved vor algoritme: *Samtlige led i algoritmen gaar mot 0, hvis algoritmen kan fortsættes i det uendelige.*

Som bekendt gjælder samme sats for EUKLIDS algoritme. Først vil vi bevise, at ialfald det mindste tal i hvert taltripel maa gaa mot 0. Sæt nemlig at alle tre størrelser holdt sig større end et opgit tal ε . Hver subtraktion vi foretar, vil da formindske summen av de tre tal i et taltripel med en størrelse større end ε , hvorved tilslut summen maatte bli mindre end ε mot forudsætningen.

Vi skal saa bevise, at ogsaa den mellemste størrelse i hvert taltripel maa gaa mot 0. Sæt nemlig at den altid var større end ε . Vi fortsætter da først algoritmen saa langt, at den mindste størrelse er mindre end ε . Denne mindste størrelse vilde da ved algoritmens fortsættelse stadig forbli uforandret, og algoritmen vilde være reducirert til en EUKLIDS algoritme mellem den største og mellemste av størrelserne. Men da leddene i en EUKLIDS algoritme gaar mot 0, leder dette til en modsigelse.

La os endelig bevise, at ogsaa den største av de tre størrelser i et taltripel maa gaa mot 0. Sæt at den største var større end ε , mens vi tænker os algoritmen ført saa langt frem, at den mellemste størrelse var

mindre end ε . En gjentagen subtraktion av den mellemste fra den største vil da tilslut føre til, at den største størrelse blir mindre end ε . Dermed er bevist fuldstændig.

POINCARÉ'S algoritme har ikke denne egenskap.

Heller ikke den algoritme, som kan utledes av den generalisation, som er antydnet paa side 7.

Hvis en av størrelserne i algoritmen blir 0, vil den fortsætte som en EUKLID'S algoritme med veksling av bokstaverne α og β , mens γ ikke mere vil forekomme.

Denne EUKLID'S algoritme kan da enten stanse, idet et led til antar værdien 0, eller den kan fortsætte i det uendelige.

La os se paa den geometriske betydning herav.

Hvis linjen $y = kx$, $z = hx$ definerer en uendelig bokstavrække, som fra et visst punkt av mangler γ , vil det si, at linjen ligger i et plan, som foruten gjennom origo gaar gjennom to (og dermed uendelig mange) gitterpunkter, mens linjen selv ikke gaar gjennom andre gitterpunkter end origo. En av algoritmens led maa jo være 0, f. eks.:

$$c = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Vi vil kalde en saadan linje en halvratjonal linje. Den ligger i et ratjonalt plan, men gaar ikke gjennom rationale punkter.

Hvis derimot bokstavrækken er endelig, vil linjen $y = kx$, $z = hx$ gaa gjennom et gitterpunkt (og dermed gjennom uendelig mange) utenfor origo. Vi vil kalde en saadan linje for en ratjonal linje.

§ 3.

Vi skal saa gaa over til at studere gitterpunkterne omkring planet

$$x + ky + hz = 0$$

hvor vi som før vil anta k og h for positive og

$$1 \geq k \geq h.$$

Vi vil her som i forrige paragraf ta vort utgangspunkt i den plane betragtning av gitterpunkterne omkring en linje, idet vi varierer denne betragtning noget.

Vi har hittil bare betraktet den del av linjen $y = kx$, som ligger i den positive kvadrant (se fig. 5), idet vi har indesluttet den i en sammen-

hængende række triangler, som begrænses af to polygoner. Det er let at konstruere de tilsvarende polygoner i den negative kvadrant og derved faa hele linjen indesluttet mellem to polygoner. Hver av disse polygoner kan tænkes opbygget av en række triangler som *ikke* gennemskjæres av den givne linje (se fig. 8).

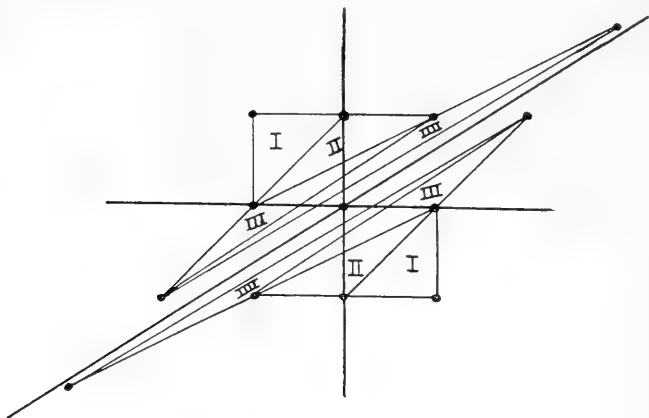


Fig. 8.

Paa grund av symmetrien er det unødvendig at studere mere end den ene av de to polygoner.

Vi vil stille os som opgave at bestemme en lignende række punkter paa den ene side av planet $x + ky + lz = 0$. Vi vil tænke os disse punkter som hjørner i en sammenhængende række tetraedere som ikke skjæres av planet. (Se fig. 9).

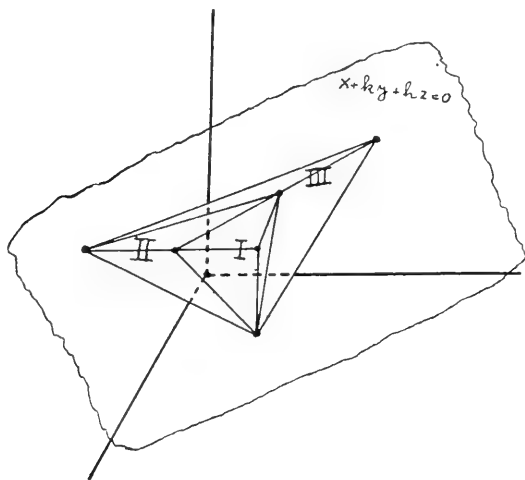


Fig. 9.

Vi vil dog straks bemærke, at ved den algoritme, som vi ledes til, faar rækken av tetraedere et mindre oversigtlig forløp end paa fig. 9.

Tænker vi os her hvert av de forekommende tetraeders grundflater forbundet med origo, staar vi overfor den opgave av et tetraeder med spids i origo at danne et nyt, som foruten origo har *to hjørner* fælles med det første. Dette er betingelsen for dannelsen av et sammenhængende legeme bestaaende av tetraedere, som skitsert paa fig. 9.

La os tænke os, at det givne tetraeder er 0, 1, 2, 3. (Se fig. 10).

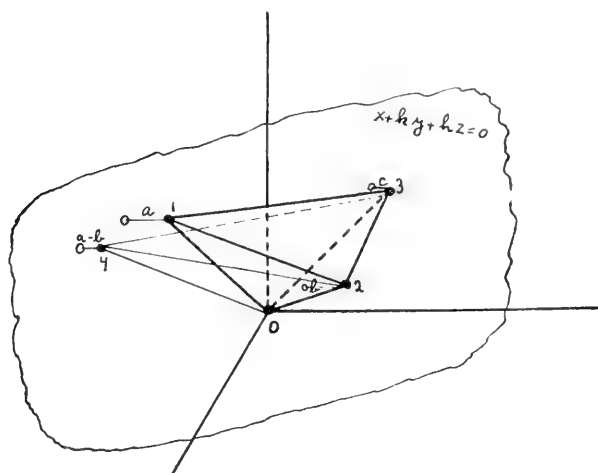


Fig. 10.

Hjørnernes koordinater være x_1, y_1, z_1 , etc.

Størrelserne

$$a = x_1 + ky_1 + lz_1$$

$$b = x_2 + ky_2 + lz_2$$

$$c = x_3 + ky_3 + lz_3$$

betegner da de tre punkters » x -afstand« fra planet $x + ky + lz = 0$. Ved et punkts x -afstand fra et plan forstaar vi da længden av et linjestykke, parallelt med x -aksen fra punktet til planet. a, b og c er forøvrig proportionale med de tre punkters virkelige afstand fra planet.

La os forudsætte

$$a > b > c.$$

Naar vi nu vil erstatte et av de tre punkter (1, 2, 3) med et nyt (4), falder det naturligst at erstatte det længst fra planet liggende av de tre punkter, altsaa 1, med et nyt. Nu har vi et enkelt middel til at bestemme et nyt punkt med mindre afstand fra planet end punktet 1, nemlig ved at danne differensen mellem koordinaterne av de givne punkter og dermed ogsaa differensen mellem størrelserne a, b og c .

Fastholder vi, at denne sidste differens skal bli positiv, idet tetraederet ikke skal gjennemskjæres av planet, har vi kun valget mellem følgende muligheter :

$$a - b, \quad a - c, \quad b - c,$$

hvorav den første gir et gunstigere resultat end den anden, og hvorav den sidste bortfalder, idet det nye tetraeder 0, 2, 3, 4 da blir av volum 0. Derimot blir volumet av 0, 2, 3, 4 lik $\frac{1}{6}$ ved begge de to første muligheter, naar det oprindelige tetraeder 0, 1, 2, 3 har volumet $\frac{1}{6}$.

Naar

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 1$$

er jo ogsaa

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Vi faar da følgende regel til den successive dannelse av størrelserne a , b og c :

Av tre givne størrelser a , b og c danner vi tre nye ved fra den største at trække den mellemste og at beholde den mellemste og den mindste.

For dannelsen av koordinaterne faar vi følgende regel :

Koordinaterne tilhørende den største av de tre størrelser a , b og c erstattes av differensen mellem koordinaterne tilhørende den største og den mellemste, mens koordinaterne til den mellemste og mindste beholdes uforandret.

Vi er saaledes ledet til nøiagtig samme algoritme som tidligere (§ 2), mens dannelsen av koordinaterne i dette tilfælde forsaavidt er enklere, som den helt følger dannelsen av størrelserne a , b og c i algoritmen.

Vi begynder ogsaa her regningen med de samme koordinater som tidligere, nemlig 1, 0, 0 og 0, 1, 0 og 0, 0, 1, hvorav

$$a = 1, \quad b = k, \quad c = h.$$

For at skjelne mellem de tetraedere, vi tidligere har behandlet, og de, vi her behandler, vil vi kalde de førstnævnte for de *spidse tetraedere*, mens vi vil kalde de sidstnævnte for de *flate tetraedere*. Koordinaterne i de spidse tetraedere har vi betegnet med store bokstaver. De er alle positive og stadig voksende. Koordinaterne i de flate tetraedere har vi betegnet med smaa bokstaver. De er avvekslende positive og negative.

Vi vil se nærmere paa to paahinandenfølgende taltripler i vor algoritme.

Tilhoire for størrelserne a , b og c vil vi skrive koordinaterne for de flate tetraeders hjørner og tilhoire herfor igjen koordinaterne for de spidse tetraeders hjørner.

Vi forudsætter $a > b > c$.

a	x_1	y_1	z_1	X_1	Y_1	Z_1
b	x_2	y_2	z_2	X_2	Y_2	Z_2
c	x_3	y_3	z_3	X_3	Y_3	Z_3
$a - b$	$x_1 - x_2$	$y_1 - y_2$	$z_1 - z_2$	X_1	Y_1	Z_1
b	x_2	y_2	z_2	$X_1 + X_2$	$Y_1 + Y_2$	$Z_1 + Z_2$
c	x_3	y_3	z_3	X_3	Y_3	Z_3

Vi skal vise en interessant sammenhæng mellem koordinaterne ved de flate tetraedere og ved de spidse, idet vi opfatter ovenstaaende koordinat-tripler som determinanter.

Underdeterminanten for x_1 er lik X_1 , og omvendt er underdeterminanten for X_1 lik x_1 . Det samme gjælder de øvrige koordinater.

Man indser direkte, at hvis dette er tilfælde for de to øverste determinanter, saa er det ogsaa tilfælde for de to nederste, og da det er tilfælde for de to determinanter, som vi gaar ut fra, nemlig

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

er dermed satsen bevist. Vi kan ogsaa uttale dette saaledes:

De determinanter, som kan dannes av koordinaterne til hjørnerne i tilsvarende flate og spidse tetraedere, er indbyrdes reciproke.

Som bekjendt vil en determinant, hvis værdi er 1, ha den egenskap, at hvis man av dens underdeterminanter danner en ny determinant (den reciproke) og av dennes underdeterminanter atter en ny determinant, saa vil denne være identisk med den første.

Vi kan ogsaa gi vor sats en geometrisk form:

Projektionerne paa koordinatplanerne av de tre sideflater (med spids i origo) i et av de flate tetraedere er lik koordinaterne for hjørnerne i det tilsvarende spidse tetraeder og omvendt.

Da koordinaterne for hjørnerne i de spidse tetraedere altid er positive, idet de dannes ved en række additioner, vil det samme gjælde projektio-

nerne av de tre nævnte sideflater. Herav kan vi slutte, at hvis vi projicerer paa et av koordinatplanerne den sideflate i en av de flate tetraedere, som ikke gaar gjennem origo, saa vil denne projektion indeholde origo (se fig. 11). Likesaa at arealet av denne projektion vil vokse over alle grænser, naar algoritmen kan fortsættes i det uendelige.

La os se paa dannelsen av de nævnte koordinater i et specielt tilfælde, idet vi vælger $k = 0,683$, $h = 0,466$ (se s. 11):

	$x + ky + hz$	$x \ y \ z$	$X \ Y \ Z$
	1,000	1 0 0	1 0 0
	0,683	0 1 0	0 1 0
	0,466	0 0 1	0 0 1
γ	0,317	1 -1 0	1 0 0
	0,683	0 1 0	1 1 0
	0,466	0 0 1	0 0 1
γ	0,317	1 -1 0	1 0 0
	0,217	0 1 -1	1 1 0
	0,466	0 0 1	1 1 1
γ	0,317	1 -1 0	2 1 1
	0,217	0 1 -1	1 1 0
	0,149	-1 1 1	1 1 1
γ	0,100	1 -2 1	2 1 1
	0,217	0 1 -1	3 2 1
	0,149	-1 1 1	1 1 1
γ	0,100	1 -2 1	2 1 1
	0,068	1 0 -2	3 2 1
	0,149	-1 1 1	4 3 2
γ	0,100	1 -2 1	6 4 3
	0,068	1 0 -2	3 2 1
	0,049	-2 3 0	4 3 2
γ	0,032	0 -2 3	6 4 3
	0,068	1 0 -2	9 6 4
	0,049	-2 3 0	4 3 2
x — afstande fra punkt til plan.		Koordinater for hjørner i de flate tetraedere.	Koordinater for hjørner i de spidse tetraedere.
Determinanter av formen		Projektioner av sideflater i de spidse tetraedere	Projektioner av sideflater i de flate tetraedere.
$\begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$			

Paa fig. 11 har vi tegnet projeksjonen i xy -planet av de sideflater i de tre sidste tetraedere, som ikke gaar gjennem origo.

Som vi ser, ligger origo inde i hvert av trianglerne.

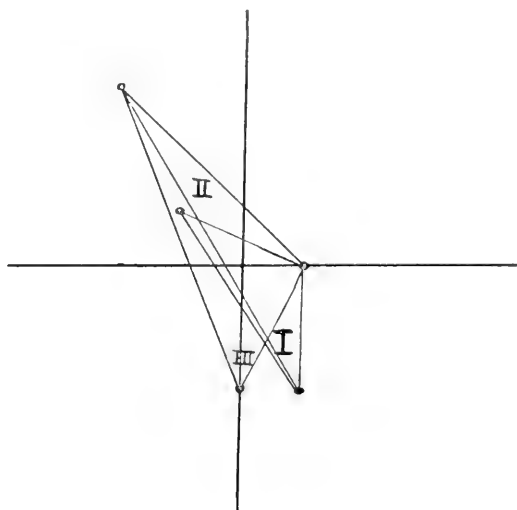


Fig. 11.

Naar det gjælder længere utregninger, er den form, vi har git vor algoritme, mindre hensigtsmæssig, idet man for hvert nyt tal gjentar to gamle. Vi kan da bedre gi algoritmen følgende form:

Av tre givne størrelser strykes det største, derpaa tilføies differensen mellem det største og mellemste.

De tre ustrøkne størrelser behandles saa paa samme maate.

Om man vil, kan man tilhøre for disse størrelser skrive koordinaterne for hjørnerne i de flate tetraedere og foreta de samme strykninger og subtraktioner blandt disse. Man mister dog ved denne metode oversigten over hvilke punkter tilsammen danner tetraedere.

Nedenfor gjengives en saadan regning, idet vi dog har utelatt overstrykningerne, som kun har interesse under regningens utførelse. Vi har valgt

$$k = e^{-1} \quad \text{og} \quad h = e^{-2}.$$

Istedenfor at begynde med de tre tal 1 , e^{-1} , e^{-2} har vi begyndt med de dermed proportionale

$$e^2, e, 1.$$

	7,3890561	1	0	0
	2,7182818	0	1	0
	1,0000000	0	0	1
α	4,6707743	1	-1	0
β	1,9524925	1	-2	0
γ	0,7657893	-1	3	0
β	0,9524925	1	-2	1
γ	0,0475075	-1	2	2
β	0,1867032	2	-5	-1
α	0,5790861	-3	8	1
α	0,3923829	-5	13	2
α	0,2056797	-7	18	3
γ	0,0189765	-9	23	4
α	0,1391957	3	-7	-3
α	0,0916882	4	-9	-5
β	0,0441807	5	-11	-7
γ	0,0033268	-6	13	9

Planets ligning er i dette tilfælde $x + e^{-1}y + e^{-2}z = 0$ eller

$$e^2x + ey + z = 0.$$

Av ovenstaaende regning ser vi, at

$$-e^2 + 2e + 2 = 0,0475 \dots$$

$$-6e^2 + 13e + 9 = 0,0033 \dots$$

Ved at fortsætte regningen erholder man ogsaa

$$744e^2 - 1759e - 716 = 0,0000013 \dots$$

Vil man søge gode tilnærmelser til e og e^2 med fælles nævner, maa man studere koordinaterne for hjørnerne i de spidse tetraedere. Saaledes finder man f. eks.:

$$\frac{68903}{9325} = 7,389061 \dots \quad \frac{25348}{9325} \quad 2,718284 \dots$$

Ved at regne med 20 decimaler for e og e^2 finder man, at tallene e og e^2 definerer følgende bokstavrække:

$$\alpha\beta\gamma\beta\gamma\beta\alpha\alpha\alpha\gamma\alpha\alpha\beta\gamma\alpha\beta\alpha\alpha\gamma\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\gamma\gamma\alpha\gamma\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta\gamma\alpha\gamma\dots$$

Det vilde selvfølgelig være av stor interesse, om man kunde opdage en lovmæssighet i denne bokstavrække. Selv om der er en saadan, kan det naturligvis være overmaade vanskelig at opdage den. Selv en saa enkel lovmæssighet som den der bestemmer bokstavrækken paa side 5 vil det ikke være let at opdage, og det endda den bare indeholder to bokstaver.

Hvis en av størrelserne i algoritmen blir 0, vil den som nævnt (se side 13) fortsætte som en EUKLIDS algoritme, som da enten kan stanse, idet et led til antar værdien 0, eller den kan fortsættes i det uendelige. Vi vil se paa den geometriske betydning herav.

Hvis størrelserne k, h definerer en uendelig bokstavrække, som fra et visst punkt av mangler γ , vil det si, at planet $x + ky + hz = 0$ foruten gjennom origo gaar gjennom et gitterpunkt til og dermed gjennom uendelig mange, som ligger paa en ret linje. Derimot vil planet ikke gaa gjennom flere gitterpunkter. Et saadant plan gjennom origo vil vi kalde et halvrationalt plan. Hvis derimot bokstavrækken er endelig, vil to av algoritmens led være 0. Planet vil da gaa gjennom to gitterpunkter utenfor origo, som ikke ligger paa ret linje med origo, og dermed gjennom en dobbelt uendelighet av gitterpunkter. Et saadant plan vil vi kalde et rationalt plan.

Som eksempel paa et halvrationalt plan vil vi vælge

$$x + (\sqrt{2} - 1)y + (3 - 2\sqrt{2})z = 0.$$

Tallene $\sqrt{2} - 1 = 0,4142 \dots$, $3 - 2\sqrt{2} = 0,1716 \dots$ gir anledning til følgende bokstavrække:

$$\alpha\beta\alpha\gamma\gamma\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\dots,$$

som fortsætter periodisk med veksling av α og β og saaledes ikke mere indeholder γ . Ved hjælp av algoritmen finder vi, at

$$1 - 2k - h = 0$$

eller at planet gaar gjennom punktet $(1, -2, -1)$.

§ 4.

Vi skal tilslut danne en generalisation av kjedebrøken i det almindelige tilfælde, hvor vi har git n størrelser

$$1, k, h \dots l, m,$$

som vi forutsætter positive. Vi forlater nu den geometriske betragtning og stiller os kun som opgave at danne lineære heltallige uttryk

$$x + ky + hz + \dots + mu,$$

hvis værdi er mindst mulig.

Vi skriver da som før værdierne av $x, y, z, \dots u$ tilhøre og værdien av det tilsvarende lineære uttryk tilvenstre, idet vi begynder med følgende værdier:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \\ k & 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \\ h & 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0 \\ \vdots & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \vdots & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \vdots & \\ l & 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \\ m & 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1. \end{array}$$

Vi vil holde fast ved vor metode, bare at erstatte ett av leddene om gangen med et nyt. Det falder da naturlig at erstatte det av leddene tilvenstre, som har størst værdi, med differensen mellem det største og det næststørste. Rigtignok er det mulig, at differensen mellem to av de andre størrelser vil gi en mindre værdi, men vi vilde da ikke opnaa den fordel, at determinanten av de n^2 sammenhørende størrelser stadig beholdt samme værdi 1. Heller ikke vilde vi opnaa, at algoritmen for n led, naar et av leddene blev 0, gik over i den algoritme, som er fastsat for $n-1$ led.

Vi ledes derfor til følgende generelle algoritme:

Av n givne størrelser danner vi n nye ved at erstatte den største med differensen mellem den største og den næststørste og ved at beholde de øvrige størrelser uforandret. De tilhørende »koordinater« tilhøre behandles paa samme maale.

Ved siden av disse koordinater, som betegner koefficienterne i de lineære uttryk, er det av interesse at tilføie en anden art koordinater, som vi vil betegne med store bokstaver og som fremkommer ved, at man danner underdeterminanterne til hver av de n^2 sammenhørende koordinater,

som vi har betegnet med smaa bokstaver. X_1 er da lik underdeterminanten til x_1 , og omvendt er ogsaa x_1 lik underdeterminanten til X_1 .

Disse »store koordinater« gir os et middel til at bestemme tilnærmelsesbrøker med fælles nævner til størrelserne $k, h, \dots l, m$, idet vi vælger X til nævner.

Algoritmen gir anledning til n muligheder, eftersom den nye størrelse er størst, næststørst, \dots eller mindst. Vi vil betegne disse n muligheder med bokstaverne $\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$.

La os som eksempel vælge $n = 4$. Og la k være en positiv rot i

$$k^4 + k = 1$$

hvorav $k = 0,7245 \dots$

og la $h = k^2 = 0,5249 \dots$

og $l = k^3 = 0,3803 \dots$

Algoritmen med tilhørende »små« og »store« koordinater blir da:

	1,0000	1	0	0	0	1	0	0	0
	0,7245	0	1	0	0	0	1	0	0
	0,5249	0	0	1	0	0	0	1	0
	0,3803	0	0	0	1	0	0	0	1
δ	0,2755	1	—1	0	0	1	0	0	0
	0,7245	0	1	0	0	1	1	0	0
	0,5249	0	0	1	0	0	0	1	0
	0,3803	0	0	0	1	0	0	0	1
δ	0,2755	1	—1	0	0	1	0	0	0
	0,1996	0	1	—1	0	1	1	0	0
	0,5249	0	0	1	0	1	1	1	0
	0,3803	0	0	0	1	0	0	0	1
δ	0,2755	1	—1	0	0	1	0	0	0
	0,1996	0	1	—1	0	1	1	0	0
	0,1446	0	0	1	—1	1	1	1	0
	0,3803	0	0	0	1	1	1	1	1
δ	0,2755	1	—1	0	0	2	1	1	1
	0,1996	0	1	—1	0	1	1	0	0
	0,1446	0	0	1	—1	1	1	1	0
	0,1048	—1	1	0	1	1	1	1	1

(Forts. næste side.)

δ	0,0759	1 — 2	1	0	2	1	1	1
	0,1996	0	1 — 1	0	3	2	1	1
	0,1446	0	0	1 — 1	1	1	1	0
	0,1048	— 1	1	0	1	1	1	1
δ	0,0759	1 — 2	1	0	2	1	1	1
	0,0550	0	1 — 2	1	3	2	1	1
	0,1446	0	0	1 — 1	4	3	2	1
	0,1048	— 1	1	0	1	1	1	1

Herav ser vi f. eks. at

$$0 \cdot 1 + k - 2h + l = 0,0550 \dots$$

Som tilnærmelsesbrøker med fælles nævner for

$$k = 0,7245 \dots \quad h = 0,5249 \dots \quad l = 0,3803 \dots$$

faar vi

$$\frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{2}{4} = 0,5, \quad \frac{1}{4} = 0,25.$$

Som man let overbeviser sig om, kan man ogsaa danne de »store koordinater« paa følgende maate: De koordinater, som tilhører den næststørste av størrelserne, erstattes med summen av koordinaterne for den største og den næststørste av størrelserne. De er altsaa alle positive.

Vi kan ogsaa her gi vor algoritme en forkortet form, idet vi undgaar de mange gjentagelser:

Av n givne størrelser strykes det største. Derpaa tilføies differensen mellem det største og det næststørste.

De n ustrøkne størrelser underkastes samme behandling. Ved denne form for algoritmen kan vi ogsaa medta de »små koordinater«, som behandles fuldstændig tilsvarende.

Som eksempel herpaa vil vi vælge følgende n størrelser:

$$1 \quad k \quad k^2 \quad k^3 \dots k^{n-1},$$

hvor k er den reelle positive rot i ligningen

$$k^n + k = 1.$$

Vi utelater dog her overstrykningerne.

Vi faar følgende algoritme :

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 k \\
 k^2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 k^{n-1} \\
 \hline
 1 - k = k^n \\
 k - k^2 = k^{n+1} \\
 k^2 - k^3 = k^{n+2} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 k^{n-2} - k^{n-1} = k^{2n-2} \\
 k^{n-1} - k^n = k^{2n-1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}$$

Som man ser, er hvert nyt led mindre end alle foregaaende og altsaa mindst blandt de ustrøkne. Tallene $1, k, k^2, \dots, k^{n-1}$, hvor $k^n + k = 1$, definerer derfor den periodiske bokstavrække :

$$v \ v \ v \ v \ v \ \dots$$

Vi har allerede behandlet det tilfælde hvor $n = 4$. I dette tilfælde definerer tallene $1, k, k^2, k^3$, hvor $k^4 + k = 1$, den periodiske bokstav-række

$$\delta \ \delta \ \delta \ \delta \ \delta \ \dots$$

Résumé.

Une généralisation des fractions continues.

I partie.

H. POINCARÉ a donné une généralisation des fractions continues très élégante (Comptes Rendus, Tome 99, 1884). Il se sert d'une interprétation géométrique. Soit donné un tétraèdre $OABC$, dont tous les sommets ont leurs trois coordonnées entières ayant un sommet dans l'origine et contenant la droite $y = kx$, $z = lx$. POINCARÉ construit un parallélépipède $OABCDEFG$, qu'il divise en six tétraèdres ayant tous un sommet dans l'origine, et il conserve celui de ces tétraèdres qui contient la droite $y = kx$, $z = lx$.

La généralisation que j'ai donnée ici est analogue à celle de POINCARÉ. Elle est différente en quelques points importants :

1^o. A l'aide d'un tétraèdre $OABC$, j'en construis un autre $OABD$, qui a deux sommets (et l'origine) communs avec $OABC$. Les deux tétraèdres successifs de POINCARÉ ont *un* sommet (et l'origine) commun. Nous pouvons alors construire un tétraèdre $ABCD$ et une infinité de ce genre, qui forment un corps continu contenant la droite donnée (voir fig. 4).

2^o. D'après la méthode de POINCARÉ, il existe six éventualités en allant d'un tétraèdre au suivant; d'après ma méthode, il en existe trois.

3^o. Tous termes de mon algorithme ont pour limite 0. Il n'en est pas toujours ainsi des termes de l'algorithme de POINCARÉ.

Nous désignerons les trois éventualités par les lettres α , β , γ . (Nous montrerons d'abord (au § 1) comment on peut, dans un cas plus simple, employer une méthode analogue pour définir les nombres au moyen des séries des lettres (figs 2 et 3)).

Au § 2, on déduit un algorithme se fondant sur l'interprétation géométrique (figs 4, 6 et 7).

L'algorithme est :

Soient donnés trois termes a , b , c . Nous en formons trois nouveaux en soustrayant le terme intermédiaire du terme supérieur et en conservant le terme intermédiaire et inférieur.

Nous formons les coordonnées des sommets des tétraèdres d'après la règle suivante :

Nous remplaçons les coordonnées appartenant au terme intermédiaire des termes a , b , c par la somme des coordonnées, qui appartiennent au terme supérieur et au terme intermédiaire, en conservant les autres coordonnées.

Ici a , b et c sont définis ainsi,

$$a = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & k & h \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix}$$

L'algorithme commence par les termes 1 , k , h (ou termes proportionaux), en supposant $1 > k > h$.

Comme coordonnées leur appartenant, nous choisissons les nombres 1 , 0 , 0 et 0 , 1 , 0 et 0 , 0 , 1 .

L'algorithme est une généralisation de l'algorithme d'EUCLIDE où cependant plusieurs soustractions sont remplacées par une division.

Considérons deux triples successifs de l'algorithme.

Il existe trois éventualités, selon que le terme nouveau du deuxième triple est le terme supérieur, intermédiaire ou inférieur. Nous désignons ces trois éventualités par α , β , γ .

Chaque couple des nombres positifs k , h définit alors une certaine série de lettres, composée des lettres α , β et γ . Cette série remplace la détermination d'un nombre par une fraction continue. On peut aussi, si l'on veut, définir le nombre

$$k = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots$$

par la série de lettres suivante :

$$\underbrace{\alpha \alpha \dots \alpha}_{q_1 - 1} \beta \underbrace{\alpha \alpha \dots \alpha}_{q_2 - 1} \beta \dots$$

Au § 3, nous étudions des points ayant des coordonnées entières autour du plan $x + ky + lz = 0$, en formant une série continue de tétraèdres, qui ne sont pas coupés par le plan (figs 9 et 10). Nous obtenons le même algorithme que plus haut pour les termes a, b, c , qui sont alors définis ainsi :

$$a = x_1 + ky_1 + lz_1$$

$$b = x_2 + ky_2 + lz_2$$

$$c = x_3 + ky_3 + lz_3.$$

Nous obtenons par contre la règle suivante pour la formation des coordonnées des sommets des tétraèdres :

Les coordonnées appartenant au terme supérieur des termes a, b, c sont remplacées par la différence entre les coordonnées appartenant au terme supérieur et au terme intermédiaire, tout en conservant les autres coordonnées.

Comme coordonnées premières, nous choisissons 1, 0, 0 et 0, 1, 0 et 0, 0, 1.

A la page 17, on voit la formation des coordonnées.

Si l'on suppose que les trois triples sont des déterminants, X est égal au déterminant mineur de x et inversement. Un exemple de l'algorithme avec les coordonnées lui appartenant est donné à la page 18.

Au § 4 nous étudions le cas général où n termes 1, $k, h, \dots l, m$ sont donnés. Nous sommes conduits à l'algorithme suivant :

Soient donnés n termes. Nous en formons n nouveaux, en remplaçant le terme supérieur par la différence entre le terme supérieur et le terme immédiatement inférieur et en conservant les autres termes.

Selon que le terme nouveau est le terme supérieur, le terme immédiatement inférieur, ou le terme inférieur, n éventualités se présentent. Désignons ces éventualités par les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$. Nous étudions ici aussi des coordonnées de deux espèces $x, y, z, \dots u$ et $X, Y, Z, \dots U$, qui sont des nombres entiers (voir page 23).

Les premières servent à former des expressions linéaires $x + ky + lz + \dots + mu$ d'une petite valeur. Les deuxièmes servent à donner des valeurs approchées de $k, h, \dots m$ ayant dénominateurs communs.

Comme exemples de séries de lettres nous avons mentionné les suivants :

Les nombres

- $1, k$ définissent $\alpha \beta \alpha \beta \alpha \beta \dots$ quand $k = \sqrt{2} - 1$.
 $1, k$ » $\beta \beta \beta \beta \beta \beta \dots$ quand $k = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.
 $1, k, k^2$ » $\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots$ quand $k^3 + k = 1$ (page 11 et 18).
 $1, k, h$ » $\beta \gamma \alpha \beta \gamma \alpha \dots$ quand $k = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ et $h = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cdot \lambda$
 où $\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ (page 12).
 $1, k, k^2, k^3$ » $\delta \delta \delta \delta \delta \delta \dots$ quand $k^4 + k = 1$ (page 23).
 $1, k, k^2, \dots, k^{n-1}$ » $\nu \nu \nu \nu \nu \nu \dots$ quand $k^n + k = 1$ (page 25).
 $1, e^{-1}, e^{-2},$
 ou
 $e^2, e, 1$ » $\alpha \beta \gamma \beta \gamma \beta \dots$ (voir page 20).

Nous ajouterons ici aussi l'exemple suivant :

Les nombres

$f(1), \varphi(1), \psi(1)$ définissent $\gamma \gamma \alpha \gamma \alpha \gamma \alpha \alpha \gamma \alpha \alpha \alpha \gamma \alpha \alpha \alpha \gamma \alpha \alpha \alpha \gamma \dots$
 quand

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \frac{x^3}{(3!)^3} + \frac{x^4}{(4!)^3} + \dots$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{1} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{(2!)^3} + \frac{1}{4} \frac{x^3}{(3!)^3} + \frac{1}{5} \frac{x^4}{(4!)^3} + \dots$$

$$\psi(x) = 1 + \frac{1}{2^2} \frac{x}{1} + \frac{1}{3^2} \frac{x^2}{(2!)^3} + \frac{1}{4^2} \frac{x^3}{(3!)^3} + \frac{1}{5^2} \frac{x^4}{(4!)^3} + \dots$$

Les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ satisfont aux équations différentielles :

$$f'(x) = \psi(x)$$

$$x \varphi'(x) = f(x) - \varphi(x)$$

$$x \psi'(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

d'où l'on tire p. ex.

$$x^2 f'''(x) + 3x f''(x) + f'(x) = f(x)$$

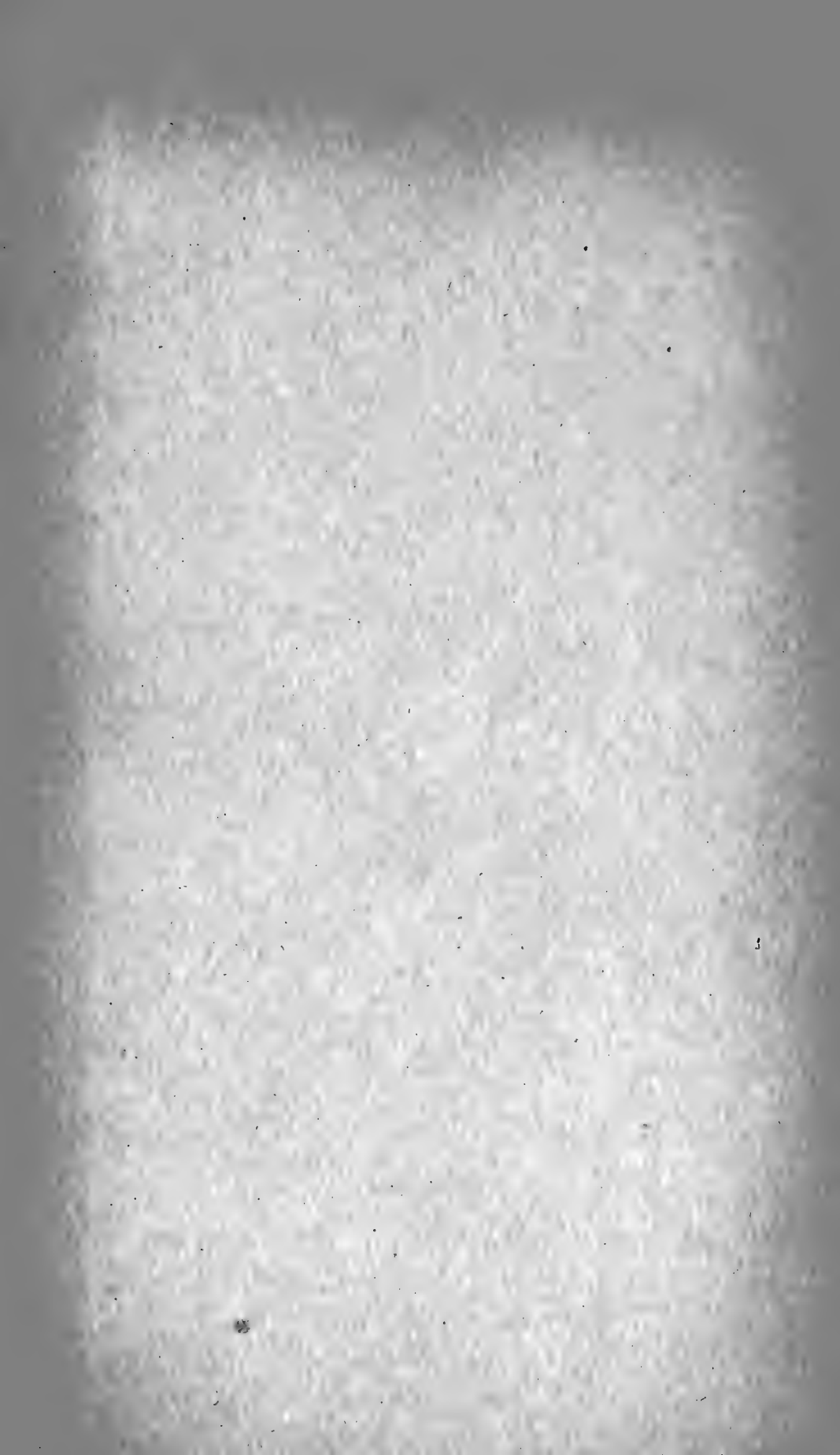
Les valeurs numériques de $f(1)$, $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ sont :

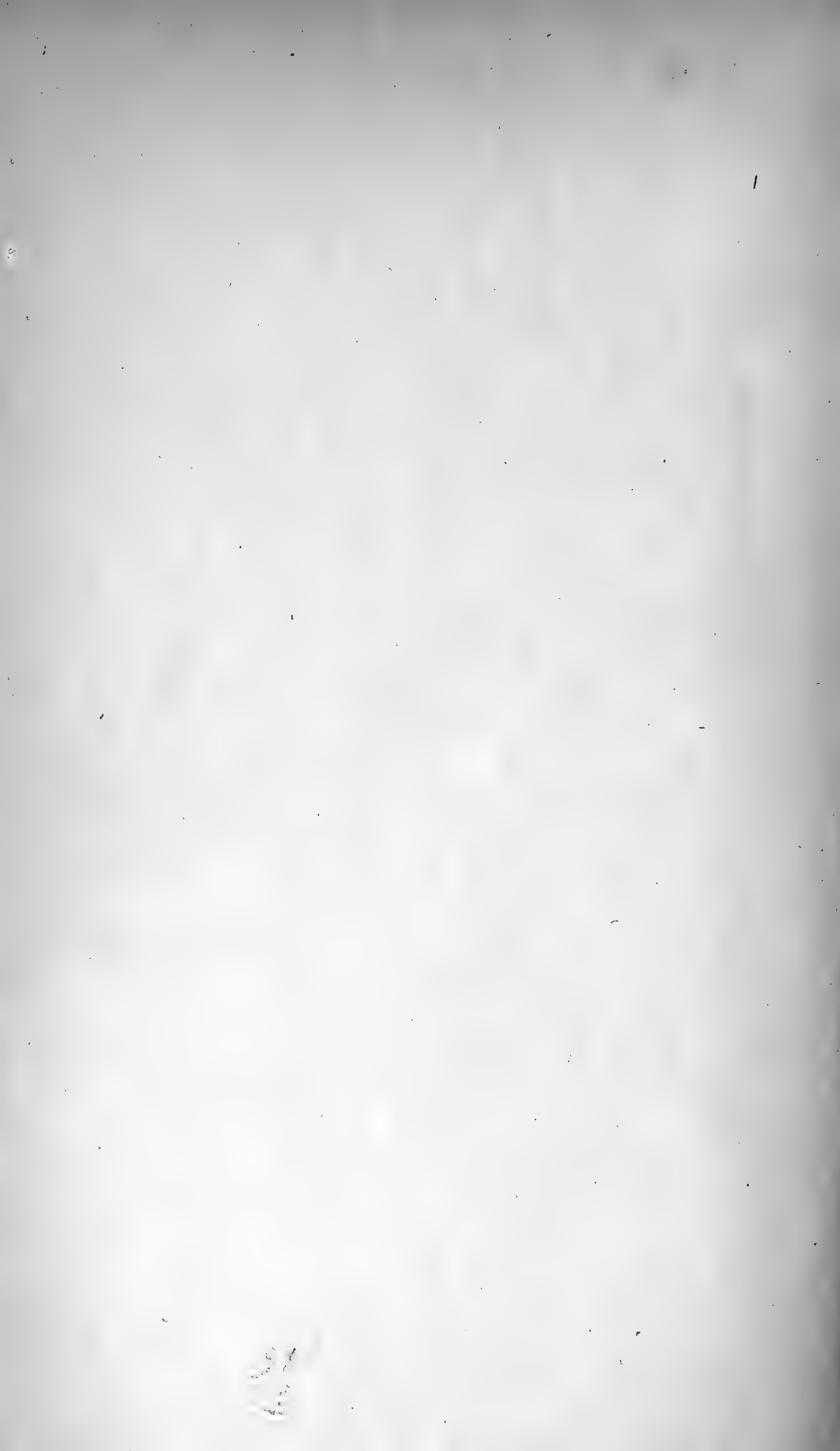
$$f(1) = 2,12970255 \dots$$

$$\varphi(1) = 1,54283864 \dots$$

$$\psi(1) = 1,26418115 \dots$$

Trykt 29. oktober 1919.





New York Botanical Garden Library



3 5185 00280 4704

